2.1.1. IL CONFLITTO AREA-PERIMETRO[1], analisi delle concezioni degli allievi

Sunto

Presentazione di un problema: "Il giardino del signor Torquato" e della sua analisi a priori.

Inventario delle diverse procedure di risoluzione su un centinaio di classi dei livelli 3 e 4.

Analisi dettagliata di tali procedure e delle concezioni degli allievi che esse rivelano: stima, misura del perimetro, procedura mista, sovrapposizione, suddivisione, pavimentazione o quadrettatura.

Ad un dato momento, verso i 10 -11 anni, secondo i paesi, i programmi introducono il calcolo della misura dell'area del rettangolo a partire dalle misure delle lunghezze dei suoi lati. Questo calcolo fa appello al prodotto di due misure. Quello che qui è un atto di routine per l'adulto, è per il giovane allievo un'operazione assolutamente nuova, addirittura sconcertante: mentre egli sa addizionare delle misure di lunghezze, la somma delle quali è sempre una misura di lunghezza, deve ora, moltiplicare due misure della stessa natura per ottenerne un'altra di natura completamente differente. Inoltre deve differenziare sullo stesso oggetto fisico o su una rappresentazione geometrica le grandezze caratterizzate da una sola dimensione da quelle bidimensionali. E qui c'è un ostacolo, inevitabile, che bisogna arrivare a superare. Si tratta del conflitto tra area e perimetro delle figura geometriche.

Il problema che si vuole analizzare qui per illustrare gli apporti del rally alla didattica è stato proposto a classi di terza e quarta elementare (8 -10 anni) nel gennaio e febbraio 2000.

IL GIARDINO DEL SIGNOR TORQUATO

Questo è il giardino del signor Torquato:

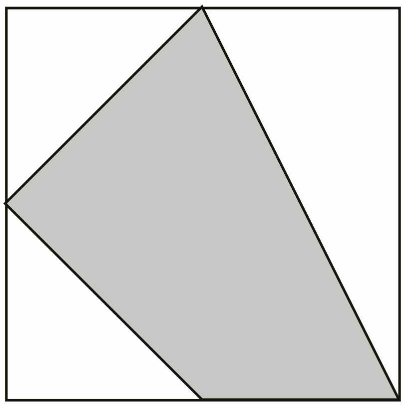
Nella parte grigia egli ha piantato fiori e ha seminato a prato la parte bianca.

Il signor Torquato osserva il suo giardino e si chiede:

"Sarà maggiore la parte con i fiori o quella con il prato ?"

E voi che cosa ne pensate?

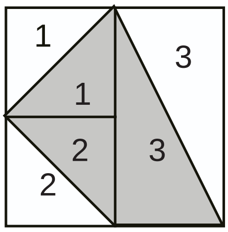
Spiegate la vostra risposta.



[1] Estratto dell'articolo : Jaquet F., (2000), Il conflitto area-perimetro, *L'educazione Matematica.* (Anno XXI - Serie VI - Vol 2, n.2 pp. 66 - 77, e n.3 (pp.126 - 143).

Come tutti i problemi del RMT, anche questo è stato analizzato a priori[2]:

ANALISI A PRIORI



Ambito concettuale

- Geometria: figure congruenti, scomposizione e ricomposizione di figure, equivalenza

Analisi del compito

- Intuire che la parte grigia e quella bianca sono formate dagli stessi "pezzi"
- Verificarlo ritagliando i pezzi
- Dedurre che la parte con i fiori ha la stessa estensione di quella seminata a prato

Valutazione

4 Risposta corretta con giustificazione (disegno corretto, ritaglio, argomentazione)

3 Risposta corretta con giustificazione approssimativa

2 Valutata correttamente solo metà figura o risposta corretta senza giustificazione

1 Inizio di ragionamento corretto

0 Incomprensione del problema o risposta sbagliata

Livello: 3 - 4; **Origine:** Praga - Incontro di Siena

L'analisi a priori è poco sviluppata nella sintesi più sopra presentata in quanto non si tratta di un testo per la ricerca in didattica. Si tratta di una semplice descrizione del quadro del problema, destinata innanzi tutto alle persone che, nelle diverse regioni, nelle quali si svolge il RMT, sono incaricate di valutare, secondo criteri comuni, le risposte date. In realtà, la parte essenziale dell'analisi a priori viene sviluppata parallelamente all'elaborazione dell'enunciato e non c'è il tempo di trascrivere tutto lo sviluppo. Ricordiamo che una prova del RMT consta di una quindicina di problemi per categorie che vanno dal terzo all'ottavo anno di scolarità. E' dunque all'atto dell'analisi a posteriori di un problema che vengono rilevati gli elementi apparsi nel corso delle riflessioni preliminari che hanno presieduto alla sua elaborazione e alla sua scelta.

I risultati presentati qui sono quelli relativi a classi che fanno parte del bacino d'utenza di Parma e della Svizzera romanda: 39 classi di terza elementare (rispettivamente 8 e 31) e 70 classi di quarta (14 56).

La tabella che segue presenta le diverse procedure rilevate (prima colonna) Nelle altre colonne figurano le frequenze ottenute (espresse in percentuale) di ciascuna delle tre risposte possibili per ciascuna procedura:

- "prato", la parte maggiore è il prato,
- "fiori", la parte maggiore è quella con i fiori,
- "equivalenza", le due parti sono della stessa grandezza.

Per ciascuna risposta, le frequenze sono calcolate per le terze (3) e per le quarte (4)

[2] L'argomento del problema è stato proposto dalla équipe di Praga, l'enunciato è stato elaborato come lavoro di gruppo nell'ambito del terzo incontro internazionale del RMT (Siena, ottobre 1999) e la stesura definitiva dell'analisi a priori è il frutto della collaborazione fra le équipe di Parma, Siena e Svizzera romanda.

procedure	risposte (in %)						totale	
	prato		fiori		equivalenza			
	3	4	3	4	3	4	3	4
stima	15,4	15,7	7,7		7,7	1,4	30,8	17,1
misura del perimetro	12,8	20,0	2,6	5,7	2,6	1,4	17,9	27,1
procedura mista	5,1	4,3					5,1	4,3
sovrapposizione	12,8	4,3	7,7	4,3	20,5	31,4	41,0	40,0
suddivisione					2,6	7,1	2,6	7,1
pavimentazione		2,9	2,6				2,6	2,9
senza risposta								1,4
	46,1	47,1	20,5	10,0	33,3	41,4		

- **"Stima"**. In questa categoria di procedure sono state raggruppate le risposte basate su una stima visiva globale o che evocano confronti per spostamento di figure, ma senza alcuna traccia scritta.

- **"Misura del perimetro"**. Le procedure raggruppate in questa categoria riposano tutte su misure di lati e sulla loro addizione. Talvolta tale "perimetro" è incompleto. Le misure sono effettuate con il righello, con i dettagli dei calcoli o del perimetro ottenuto.

  I gruppi che hanno scelto di misurare tutti i lati delle diverse parti del giardino per confrontarle dovevano logicamente arrivare alla conclusione che la parte con il prato è la più grande.

  Ci sono però solo 19 risposte "prato" tra le 26 classi che hanno optato per questa procedura; figurano anche 5 risposte "fiori" e 2 risposte "equivalenza".

  Si potrebbe allora pensare che i 19 gruppi che hanno trovato che il perimetro delle parti bianche era più grande di quello della parte grigia abbiano effettuato misure corrette. Ma anche in questo caso non c'è un legame evidente fra la procedura scelta e la sua corretta gestione.

  Poiché il quadrato della figura dell'enunciato misura 6 cm di lato, i perimetri attesi potevano "variare" da 17 a 19 cm (misura dei lati 3 ; ≈ 4,2 ; ≈ 4,2 ; ≈ 6,7) per la parte fiorita e da 35 a 37 cm (≈ 10,2 due volte e ≈ 15,7) per i tre triangoli del prato.

  Solo 6 risposte su 19 si situano in tali intervalli: *prato 35 1/2, fiori 17 1/2 - 36,2 e 18,2 - 36,2 e 18 - 35,9 e 18,1 - 36,3 e 18,5*) - *36,1 e 17,9* .

  Le altre 20 risposte - 13 "prato", 5 "fiori" e 2 "equivalenza" - presentano tipi di errori differenti:

  - dimenticanza evidente di uno o più lati, sovente il lato inferiore del quadrilatero grigio non adiacente ai triangoli bianchi: *36,3 e 15,2 - 35,9 e 13,4 - 34,5 e 14,73 - ...*

- imprecisioni, senza giustificazione:

  (R. 325; Svizzera romanda, 3a) : *E' il prato, misura 38 cm e la parte grigia misura 18,6 cm* .

  (R. 459) : *la parte bianca è la parte più grande. la parte grigia m 14 cm. La parte bianca cm. 32.*

  (R. 324) : *la parte più piccola è la parte dei fiori fa 12 cm la parte più grande è la parte a prato che fa 35 cm e 50 millimetri*

  (P.304; Parma, 3a) :*Nella parte grigia ci sono 13 centimetri. Nella parte bianca invece ci sono 32 centimetri. Torquato a seminato più prato che fiori. - ...*

- errori di addizione:

  (R. 333) :*bianco3 + 6,6 + 4,6 + 3 + 3 + 4,1 + 3 + 3 = 363, grigio 6,6 + 4,1 + 3,2 + 3,1 = 18, abbiamo misurato tutto con il righello abbiamo segnato tutto quello che abbiamo misurato e* *abbiamo calcolato tutto con la calcolatrice (dimenticanza di un lato del grande triangolo bianco*)

- errori di riporto nell'addizione:

  (R. 436) : *La parte più grande del giardino del signor Torquato è la parte grigia. Per trovare la risposta abbiamo calcolato col righello. E abbiamo addizionato i numeri. La risposta è 29 1/2*

  (prima confusione tra le misure "4" dei due lati del quadrilatero e il perimetro "10" indicato nel triangolo di sinistra:

  10 + 10 + 3 + 6 1/2 = 29 1/2

  seconda confusione per la parte bianca :

  10 + 10 + 6 1/2 = 26 1/2 al posto di

  10 + 10 + 15 1/2 = 35 1/2 peraltro annotato.

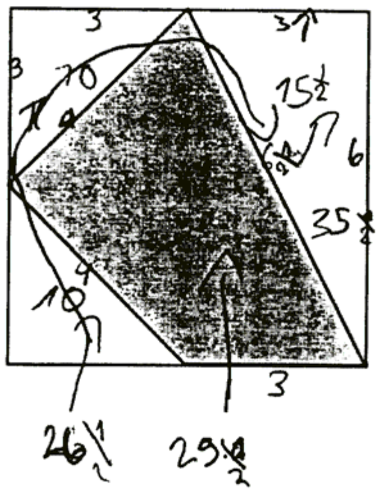


Fig. 5 (R. 436)

- **"Procedura mista"**. Cinque classi hanno preso in considerazione contemporaneamente gli elementi caratteristici dell'area e del perimetro. I loro elaborati sembrano rilevatori di un cambiamento di rappresentazione in rapporto a quelli della categoria precedente che riposano sulle misure di lati e sulla loro addizione sistematica.

Una classe (R. 444) ha ritagliato i tre triangoli del prato per ricomporli formando un solo poligono, un quadrilatero come la parte dei fiori, ma convesso. Ha poi calcolato i due perimetri, correttamente, fino a trovare 17,9 cm e 21,5 cm. L'idea di conservazione delle aree nell'assemblaggio dei tre triangoli è chiaramente sottintesa, l'accento sul perimetro è messo solo al momento del confronto numerico. Non c'è più, come in precedenza, un'addizione sistematica dei perimetri di tutte le parti. I lati comuni dei triangoli assemblati non sono più presi in considerazione.

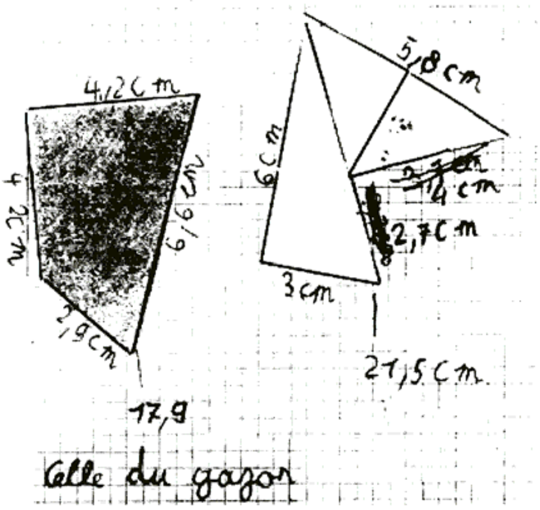


Fig. 6 (R.444)

Una altra classe (R. 420) moltiplica la somma di due lati di un triangolo per un altro lato per determinarne la "misura": *(3 + 3) x 4 = 24, (3 + 7) x 6 = 60* ; procede nello stesso modo con i tre lati del quadrilatero comuni al triangolo: *(4 + 4) x 7 = 56* ; addiziona poi le "misure" dei tre triangoli e confronta questa somma con quella relativa al quadrilatero.

Questi cinque elaborati testimoniano un'evoluzione delle rappresentazioni della "grandezza" delle parti del giardino. Gli allievi sono in modo manifesto alla ricerca di misure sulle figure date diverse da quelle delle lunghezze dei lati e di un'operazione diversa dall'addizione.

- **"Sovrapposizione"**. La procedura per "sovrapposizione" - col ritaglio delle tre parti bianche e incollatura sulla parte grigia o con dettaglio del ricoprimento - è nettamente la più frequente, sia in terza che in quarta, scelta dal 40 % delle classi in ciascuna delle due categorie. E' anche la più efficace, dopo la procedura per "suddivisione": sulle 44 classi che hanno sovrapposto le due parti , 30 hanno concluso che dovevano essere equivalenti (68 %). La riuscita è migliore in quarta (22 su 28 o 79%) che in terza (8 su 16 o 50%).

  Con un metodo corretto ci si può domandare per quale ragione figurano comunque 8 risposte "prato" e 6 risposte "fiori". Ecco qualche esempio:

- (R. 427) :

  Risposta: E' il prato che è più grande.

  Strategia: Abbiamo disegnato il quadrato poi ritagliato l'esterno abbiamo cercato di sistemate il prato nella parte grigia e abbiamo constatato che non andava. (senza ulteriori dettagli)

- (R. 466) Il ricoprimento per collage sembra perfetto, ma il commento lo smentisce a causa dei filetti grigi che appaiono sotto i tre triangoli bianchi:

  La parte grigia è più grande della bianca, lo proviamo con questi pezzi. Ecco il risultato:

Fig. 7 (R. 466)

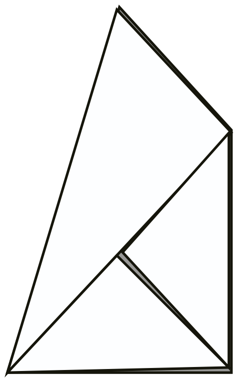
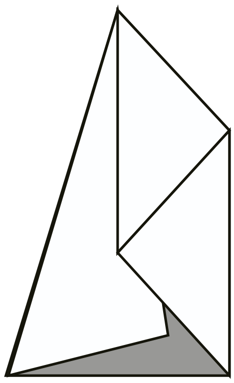


Fig. 8 (R.321)



Questi esempi mostrano bene come la manipolazione non sia sufficiente a convincersi dell'equivalenza delle due parti, sia perché gli allievi non trovano la buona disposizione dei pezzi del "puzzle" (R. 466) e (R. 321), sia perché le imprecisioni dei loro ritagli e incollaggi li perturbano.

Restano ora da analizzare i risultati di 30 gruppi che, per ritaglio, collage o sovrapposizione, hanno concluso che le due parti sono equivalenti. Le procedure sono le stesse: gli allievi hanno riprodotto la figura con il ricalco o hanno usato direttamente quella del foglio dell'enunciato; hanno poi ritagliato i tre triangoli bianchi per sistemarli sul quadrilatero grigiol. 29 gruppi sono arrivati a ricostruire questo puzzle di tre pezzi, un solo gruppo non c'è riuscito, ma ha comunque concluso che le parti fossero equivalenti :

(R. 314) Una linea viene disegnata sul collage per mettere in evidenza la parte del triangolo bianco che "esce" e verosimilmente confrontarla con la parte grigia ancora visibile:

Risposta: le parti sono uguali. Abbiamo tagliato le parti di prato e le abbiamo incollate.

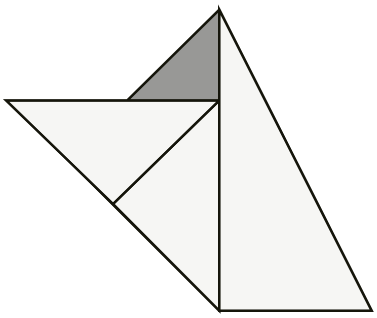


Fig 9 (R.314)

Un'osservazione generale si impone a proposito di questa categoria di procedure "per sovrapposizione": nessuno dei gruppi ha fatto seguire a tali manipolazioni delle argomentazioni. Che l'equivalenza delle due parti sia stata trovata o meno, le spiegazioni fornite fanno riferimento solo a oggetti reali: *forme bianche e grigie, parti di prato, pezzi, prato, fiori , ...* Anche le conclusioni sono espresse in termini di grandezze fisiche o di manipolazioni: *territori uguali, lo spazio che occupano è uguale, siamo riusciti, si arriva alla stessa forma, le due parti sono la stessa cosa, è la stessa grandezza, parti uguali, riusciamo a sistemarle, abbiamo visto che l'erba è più grande ... .*

Queste constatazioni non vogliono essere delle critiche - l'enunciato stesso si pone in un contesto concreto - ma sono necessarie per determinare il quadro dell'attività.

- **"Suddivisione".** Questa procedura era prevista dall'analisi a priori (si veda la figura): la parte grigia è divisa in tre parti, ciascuna equivalente ad uno dei triangoli bianchi;

  La differenza tra le risposte di questa categoria e quelle della precedente non sono così evidenti ad una prima analisi in quanto gli allievi di tali gruppi hanno anch'essi ritagliato le diverse parti. E' all'atto della giustificazione che appaiono gli elementi caratteristici di queste spiegazioni: una divisione del quadrilatero in tre zone esplicitamente confrontate con le tre parti del prato. I disegni sono simili a quelli della categoria precedente nei quali figura il quadrato iniziale (esempio di retta nella figura precedente, ma le tre parti non sono più dei semplici collage, si tratta piuttosto della trascrizione di un'immagine mentale dove il quadrato iniziale non è disegnato, non per comodità o per caso, ma per evidenziare la suddivisione in sei parti, equivalenti due a due.

  Per esempio, la giustificazione (R. 405) parla di confronto dei terreni, di ritaglio (nel senso di suddivisione) dei fiori (e non delle tre parti di prato):

  Abbiamo ritagliato i fiori e abbiamo confrontato i terreni. Risposta: l fiori sono della stessa grandezza del prato

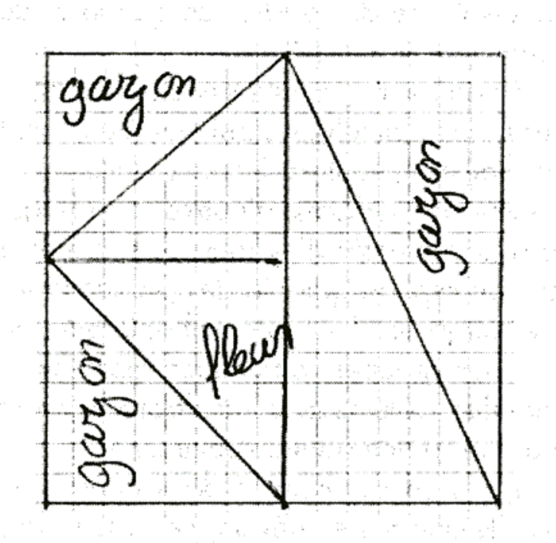


Fig. 10 (R. 405)

- **"Pavimentazione o quadrettatura".** Le superfici sono quadrettate o ricoperte da pavimentazioni "unitarie" che vengono contate .

  Il metodo della quadrettatura non è certamente adatto al confronto di figure i cui lati non sono perpendicolari.

Come si è visto nella discussione dei risultati precedenti, "Il giardino del signor Torquato" apporta preziose informazioni sulla ricchezza delle procedure di risoluzione di questo problema.

La prima constatazione è che ognuno dei 109 gruppi, con l'eccezione forse di quello che ha lasciato il foglio in bianco, si è perfettamente appropriato del problema, si è "messo nei panni" del signor Torquato e si è veramente posto la domanda relativa all'equivalenza delle parti di prato e di fiori.

Alcuni si sono interessati al contorno delle diverse parti, alle linee che ne determinano i limiti, altri le hanno considerate come superfici, altri ancora, che si sono accontentati di una stima, si sono affidati alla loro percezione globale delle parti bianche e grigie. E' molto probabile che, in seno ai gruppi, siano state messe in gioco diverse rappresentazioni del problema prima di arrivare ad una soluzione comune.

In ogni caso, è stata sviluppata un'intensa attività in seno ai gruppi, per misurare e addizionare lunghezze, per riprodurre, ritagliare e ricostituire le figure. Poi è stato necessario giustificare affermazioni e conclusioni tramite disegni, frasi, operazioni.

Queste varie fasi ci consentano di constatare che il rally ha raggiunto uno dei suoi obiettivi: mettere gli allievi davanti ad una situazione problematica.

Ma dal punto di vista dell'apprendimento o dell'insegnamento della matematica manca evidentemente una tappa: quella del dibattito nell'ambito del quale vengono messe a confronto le diverse soluzioni e dove esse vengono validate. Il rally non pretende di arrivare fino lì. Quest'ultima tappa, essenziale, è a carico degli insegnanti, nella fase di analisi in classe successiva alla prova.

In conclusione, mediante i due esempi analizzati un questa presentazione possiamo affermare che i problemi del rally apportano alla didattica della matematica numerose informazioni fra le quali quelle sulle strategie risolutive messe in atto dagli allievi e quelle relative all'importanza delle variabili didattiche e al senso dell'enunciato.

Inoltre gli insegnanti che partecipano al rally possono trarne profitto per l'insegnamento.

Bibliografia

Actes des journées d'études sur le RMT, Brigue 1997-98, (1999), L. Grugnetti & F. Jaquet (Eds) Dipartimento di Matematica, Università di Parma & Institut de recherche pédagogique, Neuchâtel

Actes des journées d'études sur le RMT, Siena et Neuchâtel 1999-2000, (2001 in stampa), Dipartimento di Matematica, Università di Siena & Institut de recherche pédagogique, Neuchâtel

Arsac G., Germain G., Mante M. (1988), *Problème ouvert et situation-ptoblème*. IREM de Lyon

Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public.(1995),*JEUX 4, de l'intérêt des problèmes de rallyes*, Publication de l'APMEP, no. 97, Paris.

Brousseau G., (1982), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 7/2, pp. 33-115, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Brousseau G., (1989), Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 9/3, pp. 309-336, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Comité international des jeux mathématiques, (1996), *Panoramath 96,* 1999 *Panoramath 2000.* Coédition CIJM. APMEP. ACL. Paris.

Grugnetti L., Jaquet F., (1997-1998), La résolution de problèmes par classes, *Grand N,* 61, pp 61-69.

Grugnetti L., (a cura di), (1994), *L'évaluation centrée sur l'élève,* Actes de la 45e Rencontre de la CIEAEM, Cagliari 5-10 luglio 1993, CLAS Bergamo.

Jaquet F., (2000), Il conflitto area-perimetro, *L'educazione Matematica.* (Anno XXI - Serie VI - Vol 2, n.2 pp. 66 - 77, e n.3 pp. 126 – 143)