1.3.1 I TESTI DEI PROBLEMI: ostacoli, devoluzione ed effetti sulle strategie di risoluzione[1]

Sunto

Introduzione, un esempio di problema «I confetti» (sistema di equazioni di primo grado in 5 incognite) in due versioni, con procedura di risoluzione per tentativi.

La costruzione di una rappresentazione del problema, qualche considerazione teorica per illustrare la fase dell'appropriazione del problema.

Un esempio degli effetti di modifica di una rappresentazione dell'enunciato.

Due esempi delle difficoltà legate a rappresentazioni errate indotte dall'enunciato.

Due esempi di casi in cui l'enunciato si fa carico di una parte della risoluzione, cioè impedisce la devoluzione di una parte del problema all'allievo.

1. Introduzione

Quali sono le strategie che permettono di risolvere il problema seguente?

I confetti (I)

100 confetti sono stati ripartiti in 5 vassoi.

nel 1° e nel 2° vassoio ci sono in tutto 52 confetti,

nel 2° e nel 3° vassoio ci sono in tutto 43 confetti,

nel 3° e nel 4° vassoio ci sono in tutto 34 confetti,

nel 4° e nel 5° vassoio ci sono in tutto 30 confetti,

Quanti confetti ci sono in ciascun vassoio?

Spiegate in che modo avete risolto il problema. Annotate tutti i calcoli.

Questo problema vi sembra semplice?

Proposto a dei gruppi di allievi di quarta e quinta elementare, nell'ambito di una gara matematica[2], questo problema ha incontrato delle difficoltà. Le risposte giuste o più o meno corrette sono state tutte ottenute con procedimenti di approssimazione successiva - o di "falsa posizione" - del genere:

- prima ipotesi, 1° e 2° vassoio: 26 + 26 = 52, 3° vassoio : 43 - 26 = 17, 4°: 34 - 17 = 17, 5°: 30 - 17 = 13, verifica: 26 + 26 + 17 + 17 + 13 = 99.

  Lo scarto è 1, modifichiamo l'ipotesi di 1;
- seconda ipotesi: 1° et 2° vassoio: 25 + 27 = 52, 3°: 43 -27 = 16,

  4°: 34 - 16 = 18, 5°: 30 - 18 = 12, verifica: 25 + 27 + 16 + 18 + 12 = 98. Lo scarto è aumentato, è di 2. Ripartiamo dalla prima ipotesi, "nell'altro senso".
- terza ipotesi: 1° e 2° vassoio: 27 + 25 = 52, 3°: 43 -25= 18,

  4°: 34 - 18 = 16, 5°: 30 - 16 = 14, verifica: 27 + 27 + 18+ 16 + 14 = 100. E' la soluzione giusta.

Anche nel caso di allievi più vecchi e di adulti il problema non è di facile soluzione.

In generale si ricorre a ciò che ci si ricorda sulle equazioni e ci si scoraggia di fronte al sistema lineare a cinque equazione a cinque variabili:

$$a+b+c+d+e = 100$$
$$a+b = 52$$
$$b+c = 43$$
$$c+d = 34$$
$$d+e = 30$$

---

1 Da una relazione presentata al II Seminario Internazionale di Didattica della Matematica "Lingue e linguaggi nella pratica della didattica ". Sulmona, 30, 31 marzo e 1 aprile 1995.

2 Rally matematico transalpino Prova I 1994

In tutte le procedure prese in esame si rileva una stretta analogia tra l'enunciato e il procedimento risolutivo. Sia nel caso delle prove successive che nel procedimento di tipo algebrico, il procedimento risolutivo, nel tempo, riproduce quello dell'enunciato. Si è portati ad una traduzione del testo, frase per frase. La sola libertà che si accorda riguarda la posizione dell'informazione relativa al numero totale (100) degli oggetti.

Cosa succede allora se si modifica l'ordine di presentazione dei dati?

Si può provare riprendendo il problema, ma con l'enunciato seguente:

I confetti (II)

100 confetti sono stati ripartiti in 5 vassoi.

nel 1° e nel 2° vassoio ci sono in tutto 52 confetti,

nel 3° e nel 4° vassoio ci sono in tutto 34 confetti,

Quanti confetti ci sono nel quinto vassoio?

Si sa anche che:

nel 2° e nel 3° vassoio ci sono in tutto 43 confetti,

nel 4° e nel 5° vassoio ci sono in tutto 30 confetti,

Quanti confetti ci sono in ciascun vassoio?

Questa volta il problema è più semplice! Non c'è più bisogno né di prove, né di equazioni. La risoluzione procede in maniera lineare: $52 + 34 = 86$, $100 - 86 = 14$ (per la 5°), $30 - 14 = 16$ (per la 4°), ...

In questo esempio si può constatare come una modifica dell'enunciato possa modificare totalmente la natura del problema.

Le conseguenze sono importanti per la pratica scolastica:

a seconda degli obiettivi che spera di raggiungere, l'insegnante ha il potere di determinare il tipo di attività matematica per la risoluzione di un problema, agendo sulla loro presentazione.

E' dunque essenziale cercare di conoscere meglio le relazioni tra le variabili di un enunciato e le conoscenze o competenze messe in gioco dall'allievo che cerca la soluzione.

Il campo di ricerca è vasto. L'esposizione che segue ne prende in considerazione solo qualche aspetto, come sensibilizzazione all'interesse e all'importanza del tema.

2. La costruzione di una rappresentazione del problema

Contrariamente a ciò che potremmo pensare in un primo momento, o anche contrariamente a ciò che è successo nell'esempio precedente, la lettura di un enunciato non risponde sempre all'ordine tipografico proposto. Il lettore non accorda la stessa importanza a tutte le parole, a tutte le figure. Egli fa una lettura selettiva in funzione dei suoi obiettivi, delle sue rappresentazioni precedenti, del contratto stabilito tra lui stesso e colui che gli propone il problema.

Secondo Grunderbeeck (1986), l'attività percettiva si combina con un'attività cognitiva consistente nel elaborare gli indici grafici e le parole dell'enunciato, le immagini e i ricordi evocati da questa lettura.

Tale elaborazione fa intervenire la memoria a breve termine nella quale sono immagazzinate le prime informazioni trovate e la memoria a lungo termine dove sono registrate le esperienze sociali e scolastiche sotto forma di problemi di riferimento, di schemi generali di procedure e di regole del contratto didattico.

M. Mante (1993) illustra questa attività di costruzione di una rappresentazione del problema tramite lo schema della figura 1 che richiede qualche spiegazione:

per un'allievo, il problema di riferimento potrebbe essere, ad esempio:

"*Ho 135 biglie. Voglio metterle in sacchetti da 15. Quanti sacchetti posso riempire?*"

Se lo stesso allievo incontra, un pò più tardi, il problema seguente :

"273 uova vengono sistemate in contenitori da 12. Quanti contenitori possiamo riempire?"

Egli potrà forse fare il legame con il problema delle biglie, grazie agli indici trovati nell'enunciato, per identificazione: uova <=> biglie, contenitori da 12 <=> sacchetti da15, 273 <=> 135 e riprodurre, per le uova, la procedura di divisione utilizzata per le biglie. Dopo vari problemi di questo tipo, l'allievo può dimenticare gli enunciati e memorizzare l'operazione di divisione che collega a tali tipi di problemi. Si è allora costruito uno schema generale di procedura più interessante del problema di riferimento in quanto si applica a un maggior numero di problemi.

Quanto al contratto didattico, secondo la definizione di G. Brousseau: "*L''insieme dei comportamenti dell'insegnante che sono attesi dall'allievo e l'insieme dei comportamenti dell'allievo che sono attesi dall'insegnante....*". è costituito da regole implicite, stabilite dai fatti, come, ad esempio:

- ogni problema ha una soluzione e una sola,
- dobbiamo utilizzare tutti i numeri dell'enunciato nell'ordine in cui vengono dati,
- l'allievo deve pensare ad applicare le operazioni che si stanno studiando,
- l'allievo deve arrivare ad ogni costo alla soluzione,
- ...

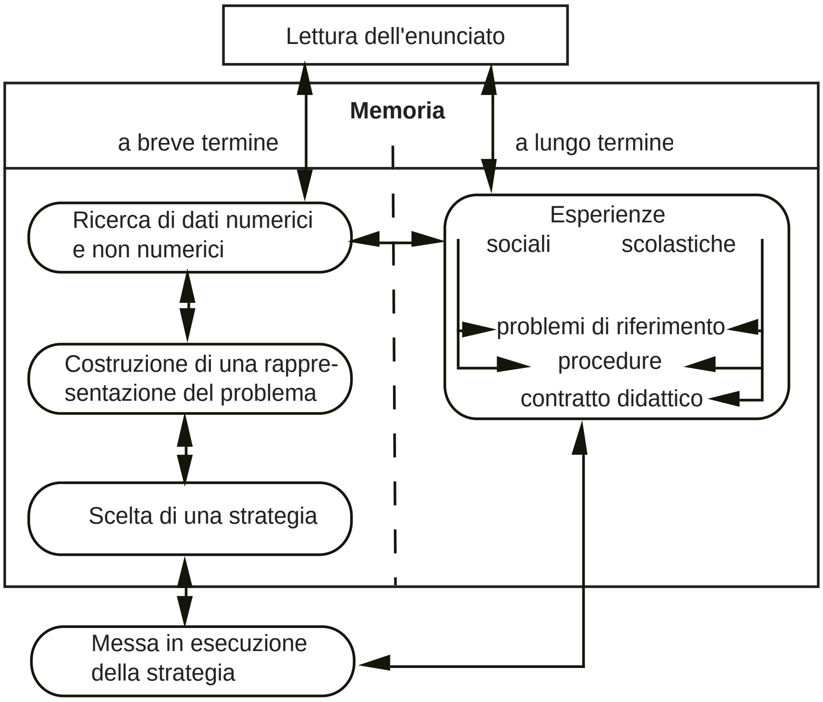


Fig 1.

La prima rappresentazione del problema può essere inadeguata o incompleta in quanto la lettura non ha evidenziato tutti i dati necessari alla risoluzione. Bisogna, allora, cercare altri indici e fare appello ad altre esperienze.

Poi, l'allievo passa alla ricerca di una strategia di risoluzione, anch'essa ispirata, per il tramite delle rappresentazioni, da problemi di riferimento o da schemi generali di procedura.

Una volta risolto, il problema viene immagazzinato nella memoria a lungo termine e rinforza o modifica le esperienze precedenti.

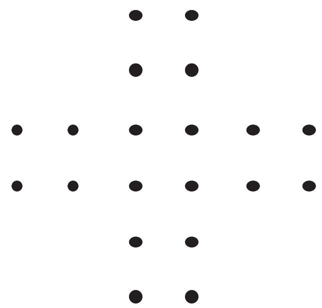
Il nostro proposito non è quello di attardarci sulla scelta di strategie, né sui processi di controllo permanente necessari. Gli esempi che seguono cercheranno di illustrare qualche legame tra l'enunciato, la sua lettura, le esperienze dell'allievo e la costruzione delle sue rappresentazioni del problema.

3. Lettura di rappresentazioni grafiche dell'enunciato

Esempio:

I quadrati

Quanti quadrati aventi per vertici quattro punti di questa figura si possono disegnare?



Nei libri di testo e negli enunciati di problemi, quasi tutte le figure occupano delle posizioni molto particolari: i triangoli hanno un lato orizzontale (detto base), i lati dei quadrati e le diagonali dei rombi sono lati paralleli ai bordi del foglio, etc.

In questo esempio, la figura è orientata secondo le convenzioni implicite, generalmente rispettate, che hanno manifestamente un'influenza sui risultati:

Su 137 protocolli di allievi dagli 11 ai 18 anni analizzati (Boggini, 1992), troviamo:

8 % di risposte "5":	quadrati isolati, uno al centro, quattro alle estremità de lla croce, ogni punto è il vertice di un solo quadrato,
31% di risposte "9"	tutti i quadrati uniti con lati comuni, sistemati sulla croce; alcuni punti sono i vertici di due o tre quadrati,
9 % di risposte "13"	i quattro nuovi quadrati hanno diagonali parallele ai bordi del foglio, di lato $\sqrt{2}$
10% di risposte "17"	gli quattro quadrati supplementari hanno diagonali parallele ai bordi del foglio, di lato $2\sqrt{2}$,
12 % di risposte "21"	la risposta giusta: ai 17quadrati precedenti si aggiungono i quattro quadrati "le cui diagonali non sono parallele ai bordi del foglio

30 % di altre risposte

La rappresentazione del problema è in questo caso strettamente dipendente dai problemi di riferimento o dalle procedure di base, che hanno spesso portato alla riuscita (risposta corretta) nelle esperienze precedenti. Per arrivare a immaginare dei quadrati in posizioni "inabituali", bisogna distruggere le vecchie rappresentazioni e rimandare l'allievo all'enunciato.

Un altro modo di arrivarci consiste, da parte dell'insegnante, nel fornire all'allievo degli aiuti diretti.

E' la scelta fatta dagli autori di un libro di testo che hanno modificato così l'enunciato del problema:

(la figura è la stessa, ma è stato aggiunto, tratteggiato, un quadrato unità e un quadrato di lato $\sqrt{2}$). "Riproduci questa figura sul tuo quaderno, poi conta i quadrati aventi un punto su ciascun vertice che puoi disegnare. Due quadrati sono già stati disegnati come esempio.

Ti renderai il compito più semplice se indicherai ogni punto con una lettera o un numero."

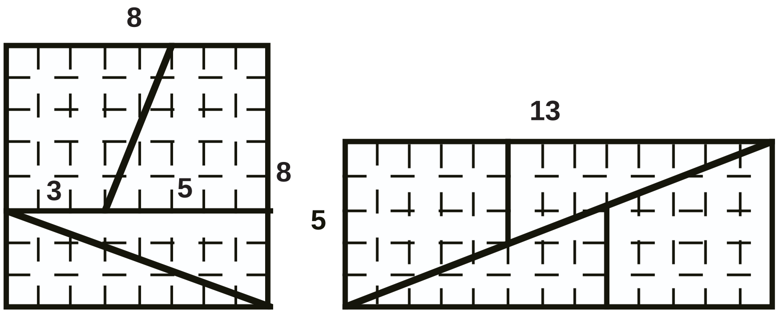
Il nuovo contratto è chiaro: viene data direttamente la rappresentazione adeguata all'allievo per permettergli di riuscire, ma la sua attività è interamente modificata. Non deve più appropriarsi del problema, né immaginare i quadrati che gli si domanda di enumerare, in particolare quelli i cui lati non sono paralleli i bordi del foglio. E' l'enunciato che lo fa al suo posto. Gli resta la ricerca dei quattro quadrati in posizione non convenzionale e il conteggio.

4. La messa in dubbio di affermazioni dell'enunciato

Sparizione e apparizione

C'è un trucco o un pò di magia?

Puzze "economico" di quattro pezzi che permette di trasformare un quadrato 8x8 in un rettangolo 5x13 !!!



In questo esempio classico, è l'illusione data dal disegno del rettangolo che è all'origine della grande difficoltà del problema.

La forza di persuasione della falsa figura è tale da impedire in generale una critica dell'enunciato da parte di colui che risolve, sia esso bambino, adolescente o adulto.

I suggerimenti proposti: "*sparizione*", "*apparizione*", "*c'è un trucco o un pò di magia?*" e "*puzzle economico*" sono tuttavia là per suggerire al lettore che c'è da qualche parte un inganno. Ma non c'è niente che serva!

Cosa deve fare colui che cerca di risolvere il problema?

Per prima cosa deve convincersi che l'area aumenta da una figura all'altra (da 64 a 65). Questo aumento non è visibile ad occhio. E' necessario un calcolo e la certezza che le moltiplicazioni 8x8 e 5x13 sono proprio le operazioni adeguate. In numerosi casi, si calcola l'area di ogni pezzo per verificare quella del quadrato.

Bisogna anche essere sicuri della "conservazione dell'area" dei pezzi nel loro spostamento. Capita spesso che gli allievi dai 12 ai 14 anni mettano in dubbio questa conservazione e evochino il "capovolgimento" dei trapezi e dei triangoli per giustificare un aumento di area.

Queste prime tappe sono necessarie per appropriarsi del problema, cioè per essere capaci di riformularlo con parole proprie. A questo stadio, si è veramente convinti che c'è qualcosa di strano e che bisogna spiegare questa stranezza. Tale convinzione riposa su una procedura personale nel corso della quale è stata fatta propria la falsa congettura introdotta mediante il disegno del rettangolo. Questa congettura appartiene ora al soggetto che sta risolvendo il problema, in quanto è servita da supporto ad un lavoro di verifica al momento dell'appropriazione.

E' radicata e, nella gran parte dei casi, ci vorrà un intervento esterno per rimetterla in questione.

Per capire la pregnanza di questa falsa congettura nel caso precedente, possiamo confrontarla con una situazione in cui l'enunciato non costringe il soggetto ad utilizzare il dato abusivo all'atto dell'appropriazione del problema:

Monete

Una moneta da 2 FS pesa 8,8 g. Quanto pesa pesa una moneta da 5 FS, da 1 FS, da 0,50 FS et da 0,20 FS ?

In questo caso, la falsa congettura indotta dall'enunciato è la proporzionalità tra il valore delle monete e la loro massa. Quest'ultima non figura esplicitamente, ma una regola del contratto didattico, stabilita implicitamente dall'allievo, gli dice che ogni problema ha una soluzione e che i dati dell'enunciato sono sufficienti per trovarla. Un'altra regola vuole che, senza altra indicazione, le grandezze in gioco nel problema siano proporzionali.

A differenza del problema precedente, quest'ultima regola è meno forte non essendo confermata da un disegno e, soprattutto, perché non è messa in opera al momento della fase di appropriazione. Dagli 11 ai 12 anni, gli allievi affermano spontaneamente che mancano delle informazioni per poter trovare la soluzione.

5. Il frazionamento del problema tramite l'enunciato

Quando un problema sembra difficile, il metodo più corrente consiste nel prendere l'allievo per mano per condurlo progressivamente alla soluzione, secondo il modello pedagogico dei "piccoli passi". Sta allora all'enunciato proporre una progressione mediante delle questioni preparatorie il cui scopo è quello di rammentare i problemi di riferimento e gli schemi generali di procedura.

Esempio

L'entrata alla piscina

L'entrata alla piscina costa 4 FS.

Presentando la tessera di membro del club di nuoto, il biglietto d'entrata in piscina costa solo 2,50 FS.

Si ottiene la tessera di membro pagando 50 FS.

A partire da quante entrate è più vantaggioso essere membro del club di nuoto?

a) Costruisci delle tabelle.

b) Rappresenta graficamente la situazione.

In questo problema, preso da un testo (Chastellain et all., 1985) de 5^{a} (10 -11 ans), gli autori hanno voluto mettere l'allievo sulla buona strada proponendogli di costruire la tabella dei valori e la rappresentazione grafica della funzione.

Nella stessa collezione, il libro di testo dell'anno successivo propone un problema del tutto analogo, senza i suggerimenti a) e b). Ma il problema è inserito in un capitolo nel quale tutti i problemi trattano della linearità e dove appaiono tabelle e rappresentazioni grafiche.

Un altro enunciato dello stesso problema mostra in maniera ancora più evidente la preoccupazione di liberare l'allievo dalla costruzione di una rappresentazione. L'argomento del problema è simile, i destinatari sono gli allievi di una sezione "pratica"[3] de 7° anno (12-13 ans).

Lo skilift della "Pendenza Dolce"

	"Salite"	"individuali"	"gruppi"
	1	2,50	1,60
	2	…	…
	3	…	…
	…		
	7	…	…
	8	…	…
	9	…	…
carta per 10 salite.		20.-	12.-
abbonamento mezza giornata		22.-	18.-
abbonamento 1 giornata		42.-	30.-

a) Completa la tabella.

b) A partire da quante salite è conveniente prendere un abbonamento da mezza giornata:
 - quando si è soli? ....
 - quando si è in gruppo? ....

c) Quante salite, al minimo, ci vogliono perché valga la pena di prendere un giornaliero?

d) Un padre e i suoi tre figli arrivano all'inizio del pomeriggio. Prevedono di poter fare ciascuno una dozzina di discese.
 - Quale tipo di abbonamento sceglieranno?.......
 - Quanto dovrà pagare il padre per tutta la famiglia? ....

3 In Svizzera, gli allievi vengono distribuiti in sezioni o livelli differenti, a seconda dei cantoni, dal grado sesto al nono di scolarità (11-14 anni). Le sezioni "pratiche" non consentiranno agli allievi che le frequentano di accedere all'Università.

La richiesta di completare la tabella modifica totalmente il problema e evita al bambino d'immaginare una rappresentazione. Le grandezze corrispondenti, il numero delle salite e il prezzo, sono dati; la proporzionalità è imposta; l'apparizione dell'uguaglianza tra il prezzo delle salite e il prezzo degli abbonamenti (domanda b)) appaiono già nella parte della tabella pronta. Non resta più all'allievo che un compito semplice: riempire gli spazi e pensare a estendere la tabella per poter rispondere alla domanda c).

6. Per concludere

C'è ancora un gran numero di effetti delle variabili di enunciati a evidenziare: la posizione dei dati, l'utilizzazione del passato o del presente, "la presentazione", il tono usato nel rivolgersi all'allievo, le sfide che gli vengono proposte, etc.

Alcuni studi molto dettagliati sui problemi del campo concettuale dell'addizione, di Vergnaud (1981) e Fayol (1990) in particolare, mostrano l'importanza di un' analisi degli enunciati di problemi per capire i tipi di rappresentazioni e strategie che l'allievo metterà in gioco nella sua risoluzione. Anche in D'Amore (1993) sono esaminati in dettaglio effetti di variabili didattiche legate alla risoluzione di problemi.

Bisogna anche notare che un esame non costituisce un giudizio, ma uno strimento per l'analisi a priori delle attività che si sceglie di proporre all'allievo. Infatti sta all'insegnante prendere le decisioni relative alla gestione della sua classe, in finzione delle sue concezioni pedagogiche e didattiche.

7. Bibliografia

Boggini, C., (1992). Analyse de résultats des quarts de finale du 6e championnat de la FFJM. Neuchâtel : IRDP. (non publié).

C**hastellain, M., Jaquet, F., Michlig, Y.** (1985). Mathématique 5e. Office romand des éditions scolaires.

D'Amore, B., (1993). Problemi. Milano : Franco Angeli.

Fayol, M., (1990). L'Enfant et le nombre. Neuchâtel, Paris : Delachaux et Niestlé.

Jaquet, F., (1994). Le deuxième rallye mathématique romand. Neuchâtel : IRDP. (Pratiques. 94.202).

Mante, M., (1993). L'élève face à un problème concret . Math-Ecole , 158, 21-29.

Van Grunderbeeck, N. et all. (1986). Evaluation des stratégies d'identification de mots du lecteur débutant en difficulté. Revue française de pédagogie , 74, 23-28.

Vergnaud, G., (1981). L'enfant, la mathématique et la réalité". Berne : P. Lang.