

## 2.1.2. REGOLARITA' NELLA SUCCESSIONE DEI NUMERI NATURALI: non così evidente per i giovani allievi!<sup>1</sup>

### **Sunto**

*Studio di un problema sul sistema posizionale di numerazione, «Caccia al tre» proposto agli alunni dalla terza alla quinta elementare nell'ambito del Rally Matematico Transalpino (RTM):*

- *storia del problema, del suo enunciato,*
- *sua analisi a priori,*
- *analisi dei risultati di 139 classi con le diverse risposte proposte e le corrispondenti procedure di risoluzione.*

*Un'analisi dei risultati come questa costituisce una base di dati che può essere utilizzata nell'ambito della valutazione delle conoscenze e competenze degli allievi sul sistema di numerazione.. I tre grandi tipi di risposte (la risposta giusta, e i due errori caratteristici) e i loro sottoinsiemi, più orientati sul genere di procedura utilizzato, permettono, per ciascun tipo, di fare delle ipotesi a proposito dei saperi matematici soggiacenti e del loro grado di concettualizzazione*

### **1. INTRODUZIONE**

Il Rally matematico transalpino (RMT) è un confronto internazionale sulla risoluzione di problemi, si veda la Parte 4.

### **2. LA STORIA DI UN PROBLEMA E IL SUO ENUNCIATO**

L'enunciato e l'analisi a priori del problema «Caccia al tre» sono stati proposti nella forma seguente, nell'ottobre 2001, per i lavori del quinto incontro internazionale del RMT (Parma) dedicato alla preparazione delle prove del decimo RMT:

Isidoro scrive la successione dei numeri a partire da 1.

1, 2, 3, 4, 5...

Ha appena scritto la cifra 3 per la 25esima volta.

Quale numero ha appena scritto?

#### **Ambito concettuale**

numerazione

#### **Analisi del compito**

comprendere la questione;

organizzare la ricerca: scrivere la successione dei numeri o procedere analizzando successivamente le diverse decine.

#### **Attribuzione dei punteggi**

4 risposta corretta (131) con giustificazione chiara

---

<sup>1</sup> Questo articolo riporta il testo del seminario che l'autore ha tenuto in due parti a Cagliari nell'autunno del 2002, nell'ambito di un ciclo di seminari organizzati dal CRSEM. L'articolo viene pubblicato in italiano e nella sua versione originale in francese (in quest'ultima versione per tabelle e liste di risposte degli allievi si rimanda alla versione in italiano. L'autore, François Jaquet, est

- 3 procedura corretta, ma errore nella risposta o risposta corretta con giustificazione scritta incompleta
- 1 inizio della successione dei numeri con conteggio delle cifre 3, ma non portata a termine
- 0 incomprensione del problema

**Livello** : 3

**Origine** : Bourg-en-Bresse

Il gruppo che ha analizzato questo problema lo ha accettato senza grandi discussioni e si è accontentato di fare le proposizioni seguenti :

- aggiungere un titolo: “Caccia al tre”;
- proporre il problema anche a classi della categoria 4;
- sostituire 2 a 1 nell’attribuzione dei punteggi e dare 1 punto ad una « ricerca non organizzata ed incompleta».

Il gruppo ha anche osservato che si tratta di «un problema simile ad altri già proposti, ma sempre valido». Sono state apportate altre proposte di modifica all’atto della rilettura del progetto della prima prova da parte delle diverse sezioni, della successiva elaborazione della versione definitiva e della traduzione da parte dei coordinatori internazionali:

- aggiungere alla domanda del problema « Mostrate come lo avete trovato. », comune a tutti i problemi del RMT;
- qualche modifica nell’enunciato per precisare l’ordine temporale delle azioni di Isidoro: «sta scrivendo...», «ad un certo punto...» con la loro ripetizione nella domanda;
- un prolungamento fino a 12 dell’inizio della successione dei numeri naturali, per mostrare che la stessa cifra può apparire diverse volte.

Le due ultime modifiche sono tipiche delle preoccupazioni di coloro che elaborano o rileggono gli enunciati dei problemi del rally: si tratta di facilitarne il più possibile la lettura da parte degli allievi in quanto non ci sarà rilancio o aiuto possibile nel corso della prova, essendo assente l’insegnante – senza tuttavia dire troppo e impoverire così il lavoro di appropriazione e di ricerca devoluto al gruppo.

Ecco la versione definitiva dell’enunciato:

### **CACCIA AL TRE**

Isidoro sta scrivendo la successione dei numeri a partire da 1:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...

Ad un certo punto Isidoro scrive la cifra 3 per la venticinquesima volta.

**Quale numero sta scrivendo Isidoro a quel punto?**

**Mostrate come lo avete trovato.**

### **3. L’ANALISI A PRIORI**

Oltre alla discussione del testo che conduce all’enunciato definitivo, ogni problema del rally è accompagnato da svariate rubriche della sua «analisi a priori» descritta nell’introduzione. Queste rubriche si sviluppano e si affinano durante le riletture di ogni problema che viene analizzato da

numerosi gruppi nel seno delle sezioni che completano successivamente le descrizioni precedenti con le proprie procedure risolutive.

Ma, come vedremo in seguito, questo inventario a priori è raramente esaustivo ed errori o strategie degli allievi non previsti appaiono regolarmente. Ecco il testo definitivo dell'analisi a priori, sensibilmente più ricco rispetto alla versione precedente.:

**Ambito concettuale**

-Numerazione: distinzione fra cifra e numero

**Analisi del compito**

- Capire che si deve contare quante volte compare la cifra 3 nella successione dei numeri.
- Organizzare la ricerca: scrivere la successione dei numeri oppure scrivere solo i numeri contenenti la cifra 3 oppure procedere esaminando successivamente le diverse decine.
- Fermarsi al numero che contiene la venticinquesima cifra 3.

**Attribuzione dei punteggi**

- 4 Risposta corretta (131) con la presentazione chiara della ricerca effettuata
- 3 Risposta corretta con presentazione poco chiara della ricerca
- 2 Risposta 131 senza alcun'altra indicazione oppure risposta con un errore nel conteggio (130, 132) con presentazione della ricerca oppure inizio organizzato della ricerca con almeno 20 volte la cifra 3, ma la successione non è completa
- 1 Ricerca incompleta e non organizzata oppure risposta 130 o 132 senza alcun'altra indicazione
- 0 incomprensione del problema

**Livello** : 3 - 4 - 5

**Origine** : Bourg-en-Bresse e incontro di Parma

**4. ANALISI DEI RISULTATI**

Raggruppiamo qui le risposte delle classi della sezione della Svizzera romanda e della sezione di Cagliari secondo tre tipi di risposte A, B e C, esse stesse suddivise in diverse sottocategorie. Sono stati esaminati 139 elaborati e i risultati sono raggruppati nella tabella 1.

	Cat 3		Cat 4		Cat 5		N regioni/régions		N
	SR	CA	SR	CA	SR	CA	SR	CA	
A1	6	0	12	1	22	0	40	1	<b>41</b> (30%)
A2	0	0	1	0	3	0	4	0	<b>4</b> (3%)
A3	0	3	1	2	2	1	3	6	<b>9</b> (6%)
<b>A tot</b>	<b>6</b> (24%)	<b>3</b> (38%)	<b>14</b> (40%)	<b>3</b> (38%)	<b>27</b> (52%)	<b>1</b> (8%)	<b>47</b> (42%)	<b>7</b> (25%)	<b>54</b> (39%)
B1	2	0	2	0	0	0	4	0	<b>4</b> (3%)
B2	1	2	5	3	6	3	11	8	<b>19</b> (14%)
B3	6	1	12	1	13	4	31	6	<b>37</b> (27%)
<b>B tot</b>	<b>9</b> (36%)	<b>3</b> (38%)	<b>19</b> (54%)	<b>4</b> (50%)	<b>19</b> (37%)	<b>7</b> (58%)	<b>46</b> (41%)	<b>14</b> (50%)	<b>60</b> (43%)
C1	5	2	2	1	4	2	11	5	<b>16</b> (12%)
C2	5	0	0	0	2	2	7	2	<b>9</b> (6%)
<b>C tot</b>	<b>10</b> (40%)	<b>2</b> (25%)	<b>2</b> (6%)	<b>1</b> (13%)	<b>6</b> (12%)	<b>4</b> (33%)	<b>18</b> (16%)	<b>7</b> (25%)	<b>25</b> (18%)
Totale	25	8	35	8	52	12	111	28	139

**Tabella 1 dei risultati** per categoria (Cat 3, 4, 5) per la Svizzera romanda (SR) e Cagliari (CA) e secondo i diversi tipi di risposta A, B, C e sottocategorie. I totali sono dati per sezione (N sezioni) per ciascuna categoria e per l'insieme degli elaborati esaminati (N). I tassi di ripartizione sono indicati in caratteri più piccoli, per la colonna N e per le righe dei totali di ogni tipo A, B, C.

## A. Risposta 131

Per arrivare a questa risposta, giusta, i gruppi hanno utilizzato le procedure previste nell'analisi a priori. Alcune sono più sintetiche di altre, ma tutte riposano su una scrittura rigorosa della successione dei numeri naturali e sulla constatazione che la cifra 3 è presente due volte nel numero 33.

### A1. Scrittura dei numeri contenenti la cifra 3 fino a 131.

I gruppi di questa prima categoria hanno scritto tutti i numeri contenenti dei «3», fino a 131: 3, 13, 23, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 43, ..., 93, 103, 113, 123, 130, 131.

In alcuni casi essi hanno contato le cifre «3» man mano che le scrivevano e si sono fermati al numero 131. In altri casi, sono andati oltre 131 nella scrittura, hanno contato i «3» in un secondo tempo ed hanno cancellato i numeri inutili o hanno ricopiato solo i numeri necessari. In altri casi ancora, non è dato sapere se la lista presentata è quella originale o se si tratta di una sintesi ricopiata da una brutta copia.<sup>2</sup>

### Lista di risposte di tipo A1

- *On a écrit tous les chiffres jusqu'à 131 et on a compté les 3.* (3<sup>e</sup>) [Abbiamo scritto tutte le cifre fino a 131 e abbiamo contato i 3].
- *Ça va jusqu'à 131.* (4<sup>e</sup>) [Va fino a 131].
- *Isidore a écrit le nombre 131. On a écrit tous les nombres qui ont des 3 dedans.* (3<sup>e</sup>) [Isidoro ha scritto il numero 131. Abbiamo scritto tutti i numeri che contengono 3].

<sup>2</sup> I testi in corsivo trascritti nel seguito sono quelli che gli allievi hanno scritto sui fogli-risposta. La punteggiatura e l'ortografia sono state corrette, i calcoli, quando compaiono nell'originale, in generale non sono stati riportati. La scrittura in parentesi quadre è la traduzione degli originali.

- *Nous avons utilisé tous les nombres de 1 à 131 avec 3. (4°)* [Abbiamo utilizzato tutti i numeri da 1 a 131 con 3.].
- *On a mis tous les chiffres avec 3 jusqu'à ce qu'il y ait 25 3. (4°)* [Abbiamo messo tutte le cifre con 3 fino ad avere 25 3.].
- *Nous avons écrit 25 fois le nombre 3. (3°)* [Abbiamo scritto 25 volte il numero 3.].
- *On a écrit tous les trois qu'on a trouvés jusqu'à 200 on les a comptés dès qu'il y avait 25 3 on s'est arrêté sur le nombre. (5°)* [Abbiamo scritto tutti i tre che abbiamo trovato fino a 200, li abbiamo contati, quando ce n'erano 25 3 ci siamo fermati sul numero. (Sono scritti solo i numeri contenenti dei «3» fino a 131 che è cerchiato)].
- *Je me suis arrêté chaque fois qu'il y a un trois. (5°)* [Mi sono fermato ogni volta che c'è un tre.].
- *On a écrit 25 nombres qui contiennent un 3 jusqu'au 131 qui est le 25<sup>e</sup> nombre. (4°)* [Abbiamo scritto 25 numeri che contengono un 3 fino a 131 che è il 25esimo numero]

1 2 3 4 5 6 7/8 9 ... 22 23 24 25  
 3 13 23 30 31 32 33 34 ... 113 123 130 131

[La successione dei numeri da 1 a 25 viene annotata in corrispondenza ai 3 e, in realtà, questi allievi hanno scritto 24 numeri o 25 volte la cifra 3].

- *Il est en train d'écrire 131 car, en comptant tous les nombres qui ont un 3 jusqu'à 25 fois qu'on le voit, il y en a 131. (5°)* [Sta scrivendo 131 perché, contando tutti i numeri che hanno un 3 fino a 25 volte che lo si vede, ce ne sono fino a 131.].
- *Il est en train d'écrire le nombre 132. On a compté combien de 3 il y avait jusqu'à 130, on avait 24 trois. E alors on en a rajouté 1. (4°)* [Sta scrivendo il numero 132. Abbiamo contato quanti 3 c'erano fino a 130, avevamo 24 tre. E allora abbiamo aggiunto 1. ( I numeri sono scritti tutti, fino a 131, 132 è cancellato. C'è una certa confusione fra “sta scrivendo” e “scriverà”; confusione che si ritrova in due classi di questa categoria, ma che non ha effetto sul conteggio)].
- *Per trovare la soluzione abbiamo scritto i numeri da 1 sino ad arrivare a 131 così ripetendo il numero 3 25 volte. E così siamo arrivati alla soluzione. (4°)*
- *On a écrit tous les nombres avec 3 en rajoutant + 10. A partir de 3 jusqu'à 30 et on a compté tous les nombres de 30 à 39 et on est reparti de 43 en refaisant + 10 jusqu'à ce qu'on ait 25 nombres contenant le chiffre 3 et on est arrivé à 131. (5°)*

[Abbiamo scritto tutti i numeri con 3 aggiungendo + 10. A partire da 3 e fino a 30 e abbiamo contato tutti i numeri da 30 a 39 e siamo ripartiti da 43 rifacendo + 10 fino ad avere 25 numeri contenenti la cifra 3 e siamo arrivati a 131. (Senza menzionare l'arresto della progressione per decine da 130 a 131.)].

- *On a écrit tous les nombres qui contiennent le chiffre trois, parce que dans chaque dizaine ex 10, 20, 30, etc il y a un trois excepté le nombre 30 qui a 10 fois le chiffre 3 : 30, 31, 32, etc. (suit la liste de 3 à 131)* [Abbiamo scritto tutti i numeri che contengono la cifra 3 in quanto in ciascuna decina ex 10, 20, 30, ecc c'è un tre eccetto il numero 30 che ha 10 volte il numero 3: 30, 31, 31, ecc (segue la lista da 3 a 131).

*On a continué ainsi jusqu'à 333, ensuite on a compté tous les 3 qu'il y avait dans la liste jusqu'à 25 fois le chiffre 3. Puis on a effacé ceux qui étaient en trop. (5°)* [Abbiamo continuato fino a 333, poi abbiamo contato tutti i 3 che c'erano nella lista fino a 25 volte la cifra 3. Poi abbiamo cancellato quelli in più.].

- *Isidore écrit le nombre 131 à ce moment. On va de 10 en dix jusqu'à 30 (23) et on recommence de 10 en 10 jusqu'à 131 depuis 43 parce que depuis 30 jusqu'à 40 il y a des ou un 3 par nombre et depuis 43 de 10 en 10 nous allons à 131 parce que c'est la 25 fois qu'il y a un trois.*



- *On a pris un tableau avec les nombres jusqu'à 599 et on a cherché 25 numéros 3 et on est arrivé à 131 numéros 3. (4<sup>e</sup>)* [Abbiamo preso una tabella con i numeri fino a 599 e abbiamo cercato 25 numeri 3 e siamo arrivati a 131 numeri 3.]<sup>3</sup>.

## **B. Liste incomplete**

Gli elaborati esaminati mettono in evidenza una grande varietà di errori.

### **B1 Dimenticanza o riporto impreciso**

Certi errori possono essere considerati come disattenzioni o semplici imprecisioni nel conteggio del numero delle cifre 3 e corrispondono a risposte 130 e 132, previste dall'analisi a priori. Nei casi in cui gli elaborati consentono di determinarli, i numeri dimenticati sono 53 (una volta) e 113 (due volte). Un esame delle risposte diverse da 131 mostra che corrispondono a delle lacune ben specifiche nell'ambito della numerazione.

### **B2. Non distinzione delle due cifre "3" del numero "33", risposta 132**

Nel caso in cui gli allievi contano 25 numeri nei quali figura la cifra 3, essi non analizzano in dettaglio il numero 33 e non tengono pertanto conto della presenza delle due cifre 3. Di conseguenza arrivano alla risposta 132.

### **lista di risposte del tipo B2**

Nella maggior parte di tali casi, i 25 numeri vengono scritti,

- *Il est en train d'écrire le nombre 132. Nous avons marqué un trait chaque fois qu'il y avait un trois dans un nombre. (3<sup>e</sup>)* [Sta scrivendo il numero 132. Abbiamo messo un trattino ogni volta che ha scritto un tre nel numero. (Ci sono 25 trattini, la lista deve essere stata stilata oralmente)].
- *On a écrit 25 fois les nombres où il y a un trois. (4<sup>e</sup>)* [Abbiamo scritto 25 volte i numeri dove c'è un tre.].
- *Isidore est en train d'écrire le nombre 133. (5<sup>e</sup>)* [Isidoro sta scrivendo il numero 133. (I 25 numeri sono scritti, da 3 a 132, ma gli allievi di questa classe, come quelli di altre due, hanno manifestamente confuso il numero che Isidoro aveva appena scritto o stava scrivendo, con quello che avrebbe scritto)].
- *On a fait tous les nombres qui contiennent 3 jusqu'à ce qu'on en a 25 avec le chiffre 3 et on arrive à 132. Le dernier chiffre sera le 132. (5<sup>e</sup>)* [Abbiamo fatto tutti i numeri che contengono 3 fino ad averne 25 con la cifra 3 e si arriva a 132. L'ultima cifra sarà il 132.].
- *Abbiamo risolto il problema facendo, come Isidoro, la sequenza dei numeri senza scrivere i numeri senza la cifra tre e poi li abbiamo contati e l'ultimo con la cifra tre, il 25<sup>e</sup>, è 132. (5<sup>e</sup>)*

### **B3 Lacune nella numerazione**

Se abbiamo potuto parlare di dimenticanze o di confusione cifra-numero nelle prime categorie di errori, la distanza dalla risposta «131» evidenzia una costruzione errata della successione di numeri e concezioni lacunarie del nostro sistema di numerazione.

---

<sup>3</sup> Questo protocollo è classificato come A3 in quanto la procedura corrisponde in effetti alla scrittura di tutti i numeri e alla sottolineatura delle cifre "3". La parte finale della risposta scritta rivela peraltro una confusione totale tra le parole – che in francese vengono usate in contesti diversi – "nombre" (numero) e "numéro" (esempio, numero di telefono); in virtù dei criteri stabili per l'attribuzione dei punteggi, non si può quindi attribuire "4". [Ce protocole est classé dans le type A3, parce que la procédure correspond en effet à l'écriture de tous les nombres et au marquage des chiffres "3". La fin de la réponse écrite fait en revanche une confusion totale entre les mots "nombre" et "numéro", on ne peut donc lui donner "4" selon les critères déterminés par l'attribution des points.]

Il ventaglio di risposte è piuttosto ampio, ma presenta comunque diversità significative che permettono di definire il tipo di lacune. Ecco tali risposte, il loro numero e la loro descrizione:

risposta	N (41)	numeri non riconosciuti	numeri nella lista	numero di cifre 3
133	2	130, 131, 132	23	25
143	1	130 - 132, 134 - 139	24	26 (1 dimenticanza)
153	1	83, 130, 131, 134 - 139	24	26 (1 dimenticanza)
203	5	31, 32, 34 - 39, 131, 132, 134 - 139	23	25
213	1	31, 32, 34 - 39, 130 - 132, 134 - 139	23	25
223 a	2	30 - 32, 34 - 39, 130 - 132, 134 - 139, 193	22 (1 dimenticanza)	24
223 b	9	30 - 32, 34 - 39, 130 - 132, 134 - 139 solamente la cifra 3 delle unità	23	25
223 c	2	31, 32, 34 - 39, 131, 132, 134 - 139	25	27 confusione numero-cifra
243	13	30 - 32, 34 - 39, 130 - 132, 135 - 139 solamente la cifra 3 delle unità	25	27 confusione numero-cifra
250	1	<i>tous les dix il y a 3 dans le nombre donc</i> $25 \times 10 = 250$ [per ogni decina c'è il 3 nel numero, dunque, $25 \times 10 = 250$ ]		
253	4	30 - 32, 34 - 39, 130 - 132, 135 - 139 solamente le cifre 3 delle unità	26	28 confusione numero-cifra + (1 dimenticanza)

**Tabella 2. Inventario di risposte lacunose delle sotto categorie B1 e B3.** Risposta, numero di tale risposta (N), lista dei numeri mancanti nelle liste, numeri nella lista e numero di cifre 3 scritte.

Tra le risposte «243», segnaliamo quella, molto sintetica, che può essere assimilata a quelle che menzionano solo i numeri che terminano con 3:

-  $24 \times 10 + 3 = 243$  voilà.

L'inventario precedente mostra che, salvo due eccezioni (83 e 193) nelle 41 risposte, tutti i numeri non riconosciuti hanno una cifra 3 nelle decine:

- 131 e 132, in tutti i casi;
- da 134 a 139, in 38 dei 41 casi;
- 31, 32, da 34 a 39, in 36 dei 41 casi, (essi figurano nelle risposte 133, 143 e 153);
- 130, in 33 dei 41 casi (figura nelle risposte 203 e 223 c) ;
- 30, in 29 dei 41 casi (figura nelle risposte 133, 143, 153, 203, 213 e 223 c)

Contrariamente alla cifra 3 nelle decine, quella delle unità è sempre presa in considerazione, salvo in due casi.

Indipendentemente dai numeri ignorati, il conteggio delle cifre 3 è preciso in 18 dei 41 casi (23 numeri della lista e 25 cifre «3» per le risposte 133, 203, 213 e 223 b). La confusione tra «numero» e «cifra» si ritrova, senza dimenticanze, in 15 dei 41 casi (25 numeri nella lista, per le risposte 223 c e 243).

### C. Altri errori

Come sempre, le interpretazioni dell'enunciato e le invenzioni fantasiose degli allievi sono più ricche di quelle dell'analisi a priori. Se la prima categoria di questi errori si spiega facilmente come



conseguenza di una lettura «alla lettera » in assenza di senso, gli altri sono più difficili da interpretare.

## C1. Risposta 75

Numerosi gruppi, di tutti i livelli e delle due regioni, si sono accontentati di moltiplicare 3 per 25, verosimilmente influenzati dall'espressione «venticinque volte» (venticinesima volta) dell'enunciato. Le spiegazioni degli allievi sono rivelatrici dell'influenza del testo su tali procedure e dell'assenza totale del controllo del senso:

### Lista di risposte di tipo C1

- *Il est en train d'écrire 75 parce que  $3 \times 25 = 75$ . On a pris la calculette et on a calculé  $25 + 3 = 28$ ,  $25 \times 3 = 75$ . (3<sup>e</sup>)* [Egli sta scrivendo 75 perché  $3 \times 25 = 75$ . Abbiamo preso la calcolatrice e abbiamo calcolato  $25 + 3 = 28$ ,  $25 \times 3 = 75$ .].
- *$3 \times 20 = 60$   $60 + 5 + 5 + 5 = 75$  vrai. (3<sup>e</sup>)* [ $3 \times 20 = 60$   $60 + 5 + 5 + 5 = 75$  vero. (Queste operazioni sono cerchiare e collegate all'espressione «venticinque volte» dell'enunciato.)].
- *On a écrit le calcul  $25 \times 3 = \dots$ . Nous avons trouvé le calcul grâce à l'information qui dit qu'il a écrit 25 fois le chiffre 3. (4<sup>e</sup>)* [Abbiamo scritto il calcolo  $25 \times 3 = \dots$  (in colonna sul foglio). Abbiamo trovato il calcolo grazie all'informazione che dice che ha scritto 25 volte la cifra 3.].
- *Isidore écrit le chiffre 75. On a fait  $25 \times 3 = 75$ . (5<sup>e</sup>)* [Isidoro scrive la cifra 75. Abbiamo fatto  $25 \times 3 = 75$ .].
- *On a fait  $25 \times 3 = 75$  parce que Isidore écrit 3 pour la 25<sup>ième</sup> fois. (5<sup>e</sup>)* [Abbiamo fatto  $25 \times 3 = 75$  perché Isidoro scrive 3 per la 25esima volta.].
- *Il est en train d'écrire en ce moment le nombre 75. Car on a trouvé le nombre 75 en faisant 25 multiplié par trois = 75.* [Sta scrivendo in questo momento il numero 75. Perché abbiamo trovato il numero 75 facendo 25 moltiplicato per tre = 75 (6<sup>o</sup>, problema dato per errore ad una classe di categoria 6)].
- *Abbiamo fatto l'operazione  $3 \times 25$  perchè Isidoro ripeteva per 25 volte il numero 3. (5<sup>e</sup>)*
- - 3, 3, 3, ..... 3, 3 (25 fois)  
*Ragionamento. 75 l'abbiamo trovato moltiplicando il 3 per 25 volte.*  
*Risposta. Il risultato è 75. (3<sup>e</sup>)*
- *Noi provando abbiamo scoperto che Isidoro ha ripetuto venticinque volte il tre perciò abbiamo fatto  $3 \times 25$  e ci ha dato 75. Così abbiamo seguito il testo. (3<sup>e</sup>)*

## C2. Risposte diverse

In questa categoria di risposte si trovano talvolta dei begli esempi del modo in cui gli allievi interpretano un testo, con una certa logica alcune volte:

### Lista C2 di risposte

- *Giustificazione: Isidoro sta scrivendo il numero 3. Abbiamo letto bene, il testo dice che Isidoro scrive 3, 25 volte. Quindi Isidoro sta scrivendo 3. (5<sup>e</sup>)*
- *On a dit dans la consigne 3. C'est le 3. (3<sup>e</sup>)* [Nella consegna si è detto 3. E' il 3.].
- *$3 \times 25 + 12 = 87$ . Il est en train d'écrire 87. Comme il a écrit 25 fois  $3 + 12 = 87$ . (3<sup>e</sup>)* [ $3 \times 25 + 12 = 87$ . Sta scrivendo 87. In quanto ha scritto 25 volte  $3 + 12 = 87$ . (Gli allievi hanno verosimilmente preso in considerazione i 12 numeri dati nell'esempio)].

Due risposte «23» di classi di terza mostrano che gli allievi si sono fermati alla terza apparizione della cifra 3. In entrambi i casi i numeri da 1 a 23 sono scritti, i «3», «13» e «23» sono cerchiati con le indicazioni corrispondenti «1<sup>a</sup> volta, 2<sup>a</sup> volta e 3<sup>a</sup> volta».

Due classi di quinta hanno fatto riferimento alla somma dei numeri da 1 a 12 che hanno moltiplicato per 25:

- *Réponse 1251. On a additionné les nombres 1, 2, 3, ... = 78 x 25 = 1250.* [Risposta 1251. Abbiamo addizionato i numeri 1, 2, 3, ... = 78 x 25 = 1250.]

Sui 142 elaborati esaminati solo uno è stato consegnato in bianco.

## 5. VALUTAZIONE

Un'analisi dei risultati come la precedente costituisce una base di dati che, secondo noi, può essere utilizzata nell'ambito della valutazione delle conoscenze e competenze degli allievi. Riprendendo i tre grandi tipi di risposte e i loro sotto insiemi, più orientati sul genere di procedura utilizzato, ci si può porre, per ciascuna di esse, numerose domande o fare delle ipotesi a proposito dei saperi matematici soggiacenti e del loro grado di concettualizzazione

### A. La risposta 131

C'è una differenza sensibile tra la procedura consistente nello scrivere "tutti" i numeri naturali (A3) e quella nella quale vengono scritti solo i numeri contenenti la cifra 3 (A1). Il passaggio dall'una all'altra è esplicito nelle procedure miste (A2) nelle quali gli allievi si rendono conto, dopo aver scritto tutti i numeri fino a 13, 23 o 43, che certi sono «inutili». La scoperta del fatto che non è più necessario scriverli porta ad una prima convinzione: quella secondo cui «3» appare solo una volta su dieci nelle unità. Questa convinzione è un «sapere» sulla numerazione a base dieci, identificata tramite l'assenza dei numeri inutili nella lista.

Non possiamo peraltro dire che tale sapere non esista laddove gli allievi scrivono tutti i numeri, ma, in costoro, non è stato così forte da farli rinunciare ad una scrittura fastidiosa e inutile.

Non possiamo neanche dire che tale sapere possa essere esteso a tutte le situazioni relative alla numerazione. Certi gruppi che hanno rinunciato a scrivere i numeri «inutili» con una cifra delle unità diversa da 3, non hanno riportato il sapere precedente sulle cifre delle decine (B3). Nel caso di questi allievi, la prima convinzione sulla presenza della cifra 3 una volta su dieci è stata forse (o verosimilmente) generalizzata abusivamente all'insieme dei numeri naturali. Il primo «sapere» è diventato allora un ostacolo per gli stadi successivi della sua concettualizzazione: il secondo sapere e i saperi ulteriori sarebbero allora ricostruiti «contro» quello che li precede – secondo il modello del costruttivismo piagetiano.

La valutazione del didattico o dell'insegnante a proposito di considerazioni di questo genere è prossima a quella di tipo «analitico». Per avvicinarsi alla valutazione detta «formativa» bisognerebbe che l'analisi precedente portasse a prendere delle decisioni relative al percorso didattico della classe:

- ai gruppi o alle classi in oggetto, si potrebbe ad esempio proporre lo stesso genere di problema agendo sulla variabile didattica «numero delle cifre 3 scritte da Isidoro» (sostituire 25 con 100 o con un numero ancora più grande), oppure sulla variabile «cifra» (sostituendo 0 a 3, o considerare diverse cifre) oppure sulla variabile «domanda» (chiedendo il numero di cifre 3 utilizzate per scrivere i numeri da 1 a N), oppure sulle variabili d'enunciato, ...
- si potrebbe anche decidere di organizzare delle ricerche nell'ambito della scrittura dei numeri, studiare altri sistemi di numerazione, proporre esercizi sistematici,
- ...

Sta all'insegnante e non al didattico giudicare questo tipo di decisioni per l'insegnamento.

Alla lettura delle spiegazioni – in particolare negli elaborati della Svizzera romanda – che accompagnano la risposta 131, si osserva un uso improprio dei termini «numero» (in francese “nombre”), «cifra», «numéro» (usato in francese ad esempio per dire “numero di telefono” nel senso di *numero di*). I correttori della prova non ne hanno tenuto conto per l’attribuzione dei punteggi. Avrebbero potuto farlo e sanzionare queste risposte. Hanno senza dubbio considerato che la risposta giusta e la procedura corretta avessero la priorità sul rigore dei termini utilizzati. Hanno anche fatto una scelta in rapporto alla valutazione di tipo sommativo.

Anche in questo caso è all’insegnante che tocca la responsabilità di cercare di migliorare la terminologia utilizzata dagli allievi o di tollerare gli usi impropri del linguaggio corrente.

## **B. Liste incomplete**

Un altro tipo di valutazione appare alla lettura delle liste incomplete (B1 e B3) o delle confusioni numero-cifra (B2). Riguarda il funzionamento interno dei gruppi di lavoro e, più precisamente, il controllo della procedura collettiva.

Tutti gli osservatori sono colpiti dall’intensità degli scambi nel seno dei gruppi durante le prove del rally, in fase di appropriazione e in fase di ricerca. Sono comunque sorpresi di constatare che, allorché il gruppo si accorda sulla via da seguire e la soluzione si intravede, l’interesse si affievolisce. Succede di frequente che un solo allievo sia designato per redigere il protocollo di risoluzione – con l’aiuto di un altro membro del gruppo nel migliore dei casi – e che, nel momento in cui finisce, gli altri non leggano neppure o si accontentano di gettare un o sguardo. E’ così che dimenticanze o errori dell’uno sfuggono al controllo degli altri.

Mantenere l’impegno di tutti fino alla conclusione è una delle problematiche più delicate da rilevare nella risoluzione collettiva di problemi. Le responsabilità sono ripartite in modo disuguale quando si ammette che uno scriva, un altro detti, gli altri commentino, guardino o si disinteressino della produzione finale. Il «potere» è detenuto in generale da colui che ha la matita in mano o, se non fa che ricopiare, da colui che detta.

Un altro insegnamento che viene dalla valutazione delle risposte di tipo B è che, per molti allievi fino alla categoria 5, le regolarità nella scrittura della successione dei numeri naturali non sono evidenti. Tutti sanno scrivere i numeri, in ordine, senza dimenticanze, rispettando le posizioni delle loro cifre, ma molti non si sono mai resi conto che la cifra «3» appariva regolarmente una volta per decina in prima posizione da destra (nelle unità), dieci volte successivamente per centinaia in seconda posizione (nelle decine), ... . Nell’insegnamento della numerazione si accorda in generale molta attenzione al valore posizionale delle cifre nella scrittura del numero così come alle regole di scambio che reggono il passaggio da una posizione all’altra. Vi si consacrano numerose attività. Ma le regolarità della successione sono troppo sovente non osservate. Numerosi studi (Brun *et al.*, 1984, Valentin *et al.*, 1995, Jaquet *et al.*, 1988, Perret 1981) hanno evidenziato questo tipo di difficoltà. Questo problema della «Caccia al tre» lo conferma: varrebbe la pena soffermarsi sui ritmi e le frequenze di apparizione delle cifre nella successione dei numeri naturali; la comprensione profonda del nostro sistema decimale di numerazione di posizione avrebbe certamente da guadagnarci.

## **C. Altri errori**

Gli altri errori (18%, secondo la tabella 1 dei risultati) possono essere attribuiti ad un’incomprensione del problema o ad una mancanza di senso. Bisogna rilevare a tale proposito che la maggior parte delle risposte di questo tipo (12%) è «75».

L’enunciato, con la sua frase «la cifra 3 per la venticinquesima volta» porta certi allievi che non si sono appropriati del problema ad effettuare la moltiplicazione «25 x 3», ma si resta perplessi per l’ampiezza assunta dal fenomeno.

Non c'è stata verosimilmente molta interazione in seno ai gruppi che hanno risposto in quel modo, cosa che rinforza il sentimento già espresso secondo cui, al di là delle competenze matematiche messe in opera, esiste tutta la problematica della risoluzione di problemi per gruppi e dell'efficacia delle interazioni tra allievi.

## **6. BIBLIOGRAFIA**

Brun, J., Giossi, J.-M., Henriques. 1984 : « A propos de l'écriture décimale », *Math-Ecole*, 112.

Jaquet, F., George, E., Perret, J.-F. : 1988, *Bilan des acquisitions en fin de deuxième année*. Berne : Peter Lang

Perret J.-F. : 1981, *Numération : coder ou compter*, Neuchâtel : IRDP