1.3.3. VARIABILI DIDATTICHE[1] : perché e come modificare un problema?

Sunto

Si presenta un problema «La gara delle uova» in due versioni. Si esaminano le differenze tra i due enunciati per fare apprire le variabili del problema.

La risoluzione del problema con numeri piccoli è un semplice ***esercizio d'applicazione*** *per un allievo di quinta elementare. Già in quarta, il problema non presenta difficoltà.*

Con un cambiamento dei valori delle variabili didattiche (numeri più grande e un "vuoto" nel disegno delle uova), l'allievo sa bene che dovrà effettuare dei calcoli, ma si renderà conto che deve trovare una maniera per cui, evitando un'addizione fastidiosa, la risoluzione sia più corta e più facile. In tale modo, l'esercizio è diventato un ***problema****.*

La risoluzione dei problemi è ritornata con decisione nei programmi dopo un'eclisse di una quindicina d'anni quando si è preferito introdurre le attività strutturate, caratteristiche dell'epoca della «matematica moderna». Ma non è sufficiente evocarla perché diventi operativa, come se fosse dotata di poteri soprannaturali.

Si dà un problema con un obiettivo preciso, al fine di sviluppare delle strategie che facciano appello a certi strumenti noti e permettano di costruirne di nuovi.

Nel corso di questa fase di costruzione, ci sono forti possibilità che l'allievo abbia dei dubbi, esiti, si blocchi momentaneamente, rimetta in causa delle conoscenze anteriori o, in breve, si ritrovi in una situazione di conflitto cognitivo. Se lo supera, ne trarrà soddisfazione e profitto, da un punto di vista matematico. Se l'ostacolo è troppo alto, l'allievo avrà perso del tempo, della fiducia in se stesso e non costruirà alcuna nuova conoscenza.

Può anche succedere che l'allievo non incontri alcun ostacolo nella risoluzione del problema proposto, che ne trovi la soluzione senza ricorrere agli strumenti attesi, che non incontri i saperi dati per scontati. In questo caso, sarà soddisfatto per avere risposto correttamente, rinforzerà eventualmente certi strumenti mobilizzati per quella circostanza – com'è il caso della gran parte dei problemi detti « di applicazione » - ma non si potrà affermare che egli ha costruito nuove conoscenze.

Di conseguenza è essenziale porsi determinate questioni prima di proporre un problema: quali sono i suoi contenuti matematici, come potrà risolverlo l'allievo, quali sono i saperi che incontrerà a seconda delle strategie che sceglierà, qual è la natura degli ostacoli da superare per arrivare alla soluzione, quali sono le rappresentazioni in gioco. Tutte queste questioni costituiscono quello che la didattica della matematica designa come l'analisi a priori del problema.

Tale analisi è a carico dell'insegnante quando sceglie o inventa un problema. La sviluppa facendo riferimento alle proprie procedure di risoluzione, alla conoscenza «livello di sviluppo dei suoi allievi», ai dati raccolti durante le sue pratiche d'insegnamento o di sperimentazione, alle sue conoscenze in didattica della matematica. Tutto ciò s'iscrive in una procedura scientifica.

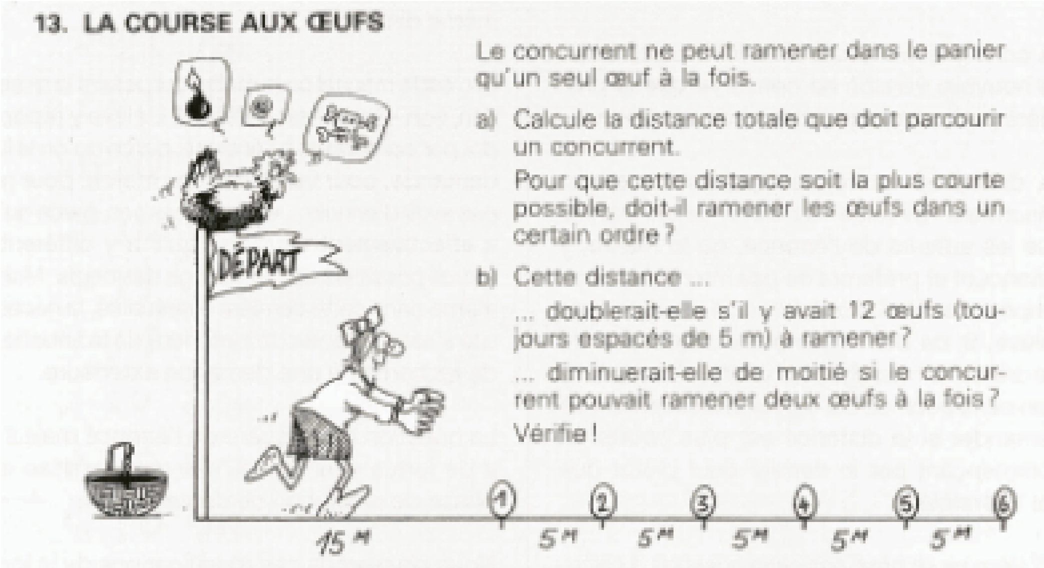
Proponiamo qui di analizzare i cambiamenti apportati all'enunciato di un problema a partire dall'esempio de *La gara delle uova* e delle modifiche del suo enunciato, da un'edizione all'altra di un manuale scolastico[2]:

La gara delle uova , versione I :

---

[1] Dall'articolo : Jaquet F. 2001. À propos de variables didactiques, in *Math-Ecole* 195

[2] Chastellain. M., Jaquet. F. *Mathématiques 5^e*. Manuel de Suisse romande, éditions 1984 et 2001. COROME Neuchâtel.



13. LA COURSE AUX ŒUFS

Le concurrent ne peut ramener dans le panier qu'un seul œuf à la fois.

a) Calcule la distance totale que doit parcourir un concurrent.
Pour que cette distance soit la plus courte possible, doit-il ramener les œufs dans un certain ordre ?

b) Cette distance ...
... doublerait-elle s'il y avait 12 œufs (toujours espacés de 5 m) à ramener?
... diminuerait-elle de moitié si le concurrent pouvait ramener deux œufs à la fois ?
Vérifie !

figura 1

Il testo del problema in italiano :

Il concorrente può mettere nel testo un uovo alla volta.

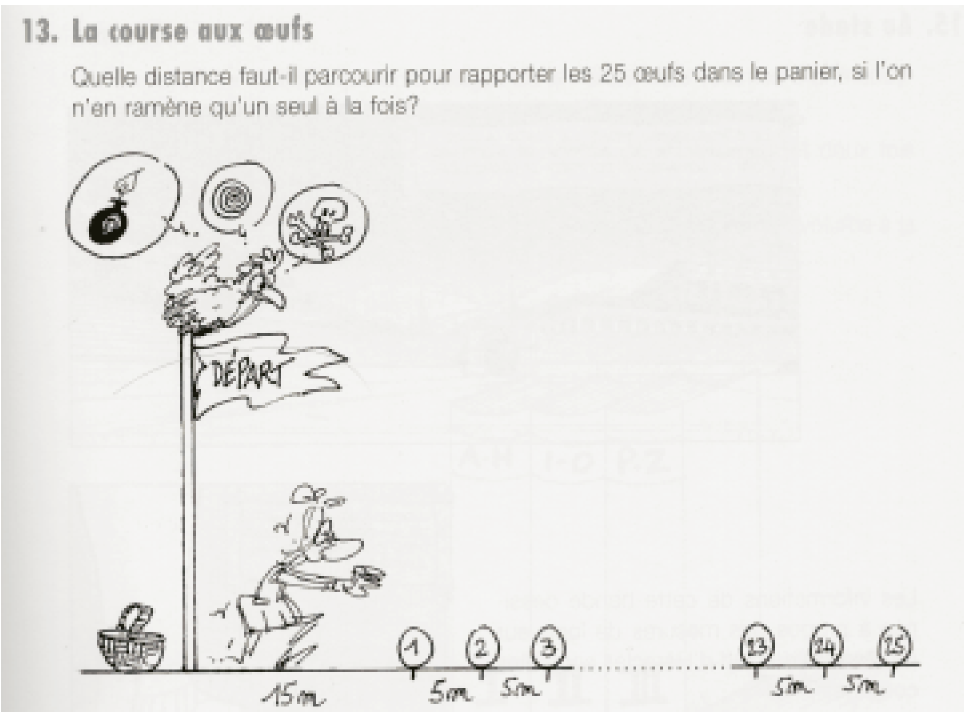
a) Calcola la distanza totale che deve percorrere un concorrente Perché questa distanza sia la più corta possibile, deve riportare le uova in un certo ordine ?

b) Questa distanza...raddoppierebbe se ci fossero 12 uova (sempre a distanza di 5 m) da riportare ?

...diminuirebbe della metà se il concorrente potesse riportare due uova alla volta ?

Verifica !

La gara delle uova, versione II :



13. La course aux œufs

Quelle distance faut-il parcourir pour rapporter les 25 œufs dans le panier, si l'on n'en ramène qu'un seul à la fois?

figura 2

Il testo del problema in italiano:

Quale distanza bisogna percorrere per riportare le 25 uova nel cesto, se se ne riporta uno solo alla volta?

Le variabili del problema

Ad una prima analisi è il testo del problema ad attirare l'attenzione.

La consegna è stata sensibilmente abbreviata. La nuova versione conserva solo la prima parte della questione a) della vecchia versione.

La seconda parte della questione a) è ora «devoluta all'allievo», cosa che significa che gli autori dell'enunciato, o l'insegnante, vi rinunciano e preferiscono non interferire, a questo proposito, nelle procedure di risoluzione : Se l'allievo si pone la questione dell'ordine di raccolta delle uova da riportare, questo significa che per lui tale questione ha un senso, poiché può effettivamente domandarsi se la distanza è più corta cominciando dall'ultimo uovo piuttosto che dal primo.

Se l'allievo non si pone la domanda, calcolerà la distanza secondo l'ordine che ha scelto. È al momento della messa in comune (validazione e confronto dei risultati) che constaterà forse che altri allievi hanno scelto un ordine diverso e che ottengono la medesima distanza.

Se è il libro di testo o è l'insegnante che pongono la domanda, il suo «significato» è diverso. L'allievo risponderà per conformità all'enunciato, perché glielo si chiede, per fare piacere all'insegnante, per non avere fastidi... e, perché no, perché ha effettivamente pensato che ci possano essere ordini diversi per riportare le uova. Ma, anche in quest'ultimo caso, la necessità si è spostata dall'interno della situazione di ricerca ad una richiesta esterna.

La questione b) è sparita dall'enunciato, ma ci sono delle forti probabilità che riappaia in fase di risoluzione o di validazione

Classifichiamo queste modifiche di lunghezza dell'enunciato e delle domande intermedie nelle «variabili del problema» o «variabili pedagogiche».

Le variabili didattiche

"Una variabile didattica è una grandezza, in un problema, le cui modificazioni possono indurre un cambiamento nelle procedure di risoluzione."

Questa definizione è molto sintetica. La esemplifichiamo tramite l'analisi della seconda versione dell'enunciato:

Una prima variabile didattica è "il numero delle uova", che passano da 6 a 25.

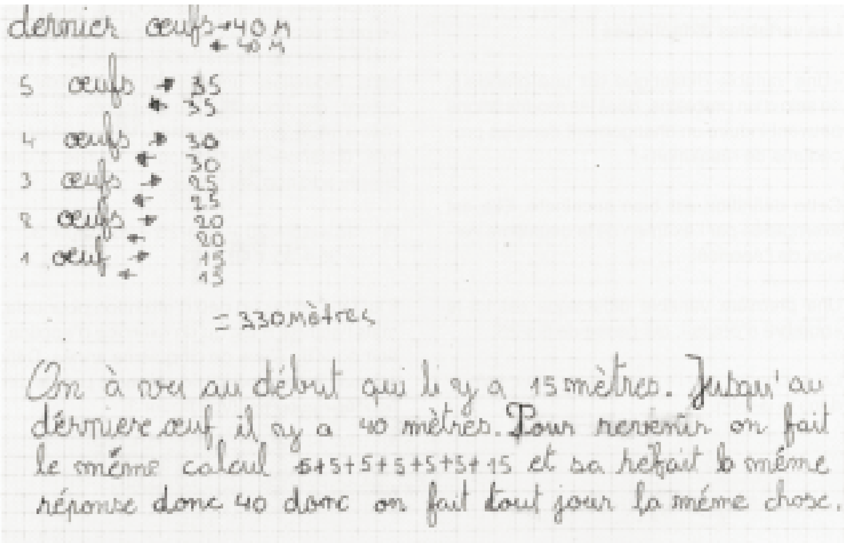
La seconda è legata al disegno: la seconda versione ha introdotto un «vuoto».

Perché sono stati modificati questi elementi?

Si è constatato, per questo problema e in numerose situazioni analoghe, che l'allievo può risolvere la prima parte senza "fare matematica ", cioè senza modellizzare una situazione nuova creando dei nuovi strumenti. Può risolvere il problema con un'enumerazione delle distanze da addizionare, seguita da un'addizione, del genere:

(I) $15 + 15 + 20 + 20 + 25 + 25 + 30 + 30 + 35 + 35 + 40 + 40$

Deve ovviamente fare un po' d'attenzione, ma l'attività è solo un ***esercizio d'applicazione*** per un allievo di quinta elementare. Già in quarta, il problema non presenta difficoltà. (Si veda la figura 3 che è una produzione di allievi di quarta, secondo la versione 1 del problema).



(Abbiamo visto all'inizio che ci sono 15 metri. Fino all'ultimo uovo ci sono 40 metri. Per ritornare si fa lo stesso calcolo 5+5+5+5+5+5+15 e questo fa la stessa risposta dunque 40 si fa sempre la stessa cosa).

figure 3).

Un'altra produzione, molto frequente, consiste nell'addizionare, in colonna, 15 + 15 + 20 + 20 +..... + 40 + 40 per arrivare a pour aboutir à Risposta, ha fatto 330 metri.

Questo esercizio è messo, nel libro, nel capitolo delle Misure di lunghezza poiché fa appello all'addizione di lunghezze. Questo concetto è mobilizzato qui e può eventualmente rinforzarsi. Ma questo non è l'obiettivo principale dell'attività. Anche in caso di confronto delle distanze secondo l'ordine di raccolta, ci si rende conto che non è l'addizione di lunghezze ad essere al centro del problema, bensì un'operazione essenziale che l'allievo effettua sui numeri (le misure di tali lunghezze): la trasformazione di una somma di termini in un prodotto, o il passaggio dall'addizione alla moltiplicazione

Perché l'esercizio diventi un **problema**, bisogna dargli della "consistenza". Il passaggio da 6 uova a 25, rende più delicato il metodo precedente. La traccia scritta (I) sarà molto più lunga. Condurla fino alla fine prenderà del posto e del tempo, i rischi d'errore saranno grandi. E il problema di sapere dove fermarsi resta aperto, a causa del "vuoto". Questa consistenza del compito da svolgere deve anche dare un maggior senso al problema. L'allievo sa bene che dovrà effettuare dei calcoli per calcolare la distanza da percorrere, ma si renderà conto che deve trovare una maniera che non sia un'addizione fastidiosa, dovrà trovare un modo più corto e più facile.

L'entrata nel problema è la stessa della versione precedente e può dar luogo ad un iniziodi addizione come:

II) 15 + 15 + 20 + 20 + 25 + 25 + 30 + ...

che potrà essere semplificata in:

III) 30 + 40 + 50 + 60 + ...

Il "vuoto" impedisce però di proseguire con tale procedura maccanica poiché bisogna sapere dove fermarsi. Bisogna dunque determinare l'ultimo elemento della successione, 135 nel caso (II) o 270 nel caso (III).

Non è evidente. C'è qui un primo problema!

Una soluzione è quella di scrivere tutte le distanze e di contarne 25.

Una tentazione è di dirsi, scrivo le prime 5: 15, 20, 25, 30, 35 ; la 5a è 35, la 10a sarà70, la 20a sarà 140 e la 25esima 140 + 35 = 175.

Questo ragionamento giustifica allora pienamente la sparizione della questione dell'esercizio.

Un'altra tentazione è di dirsi: il 25esimo uovo sarà alla distanza 15 + (25 x 5) = 140.

Una soluzione, molto vicina, sarà di determinare tale distanza tramite 15 + (24 x 5) = 135

La fase di validazione (in seno al gruppo, tra gruppi, nell'intera classe) si preoccuperà di determinare, tra queste soluzioni, quali possono essere conservate, quali sono falsi, e perché. Quali sono le più efficaci.

Si conosce ora l'ultimo termine, cosa che può condurre ad una scittura del tipo

IV) 15 + 15 + 20 + 20 + 25 + ... + 125 + 125 + 130 + 130 + 135 + 135

o

V) 30 + 40 + 50 + 60 + ... + 250 + 260 + 270

Sorge allora un secondo problema: come calcolare questa lunga addizione senza scriverne tutti i termini, o registrarli tutte sulla calcolatrice?

L'idea di raggruppare il primo e l'ultimo termine (commutatività e associatività) verrà a qualcuno in qualche gruppo? Dovrà essere suggerita dall'insegnante in fase di dibattito?

Ci si ritrova qui in uno schema più classico della lezione collettiva con discussione generale dove l'insegnante ha un ruolo essenziale da giocare, non dicendo troppo, né troppo presto, equilibrando la sua parte di responsabilità e quella degli allievi.

Passo dopo passo si è passati dall'ambito geometrico della situazione iniziale all'ambito puramente numerico. Si ritrovano conoscenze già approcciate, la cui costruzione continua qui: si tratta delle proprietà delle operazioni sui numeri naturali, in particolare l'associatività e la commutatività dell'addizione, poi l'espressione di un'addizione di termini uguali per una moltiplicazione.

Ci sono degli schemi geometrici per illustrare i raggruppamenti in questa lunga addizione, che condurranno tutti, in un modo o nell'altro, a delle scritture da "istituzionalizzare" secondo il livello degli allievi e la progressione nel programma- del genere:

(VI) (30 + 270) +....+ (140 + 160) + 150 = 300 +... + 300 + 150 = (12 x 300) + 150 = 3750

Se gli allievi persistono nel calcolare ciascuno dei termini, cosa che è abbastanza probabile ancora in quinta elementare, è possibile cambiare nuovamente la variabile didattica "numero di uova", proponendo un enunciato con 100 uova.

In una sperimentazione in una classe quarta, gli allievi non hanno rinunciato ad una tale enumerazione, riempiendo talvolta intere pagine di calcoli e di disegni, con tutte le distanze annotate.

Al contrario, se si diminuisce il valore della variabile "numero di uova" si sopprimono le due condizioni di necessità che fanno dell'attività un "problema": il superamento del "vuoto" con operazioni mentali e il calcolo della lunga addizione ricorrendo alle proprietà dell'addizione e della moltiplicazione. In caso contrario si ricade nell' "esercizio" di conteggio della vecchia versione.

Il «problema» è più ambizioso dell'«esercizio », è evidente. Esso richiede più tempo., è di un livello più alto di difficoltà, esige una gestione della classe più complessa da parte dell'insegnate. Ma la sua risoluzione è favorita dal dispositivo "situazione problema" (fase di appropriazione individuale, ricerca di gruppo, validazione, dibattito, istituzionalizzazione).

È qui che intervengono le scelte dell'insegnante, delicate ma fondamentali alla luce dell'analisi precedente:

Si adotterà la versione II, che è un «problema» per allievi da 10 a 12 anni, oppure si resta sulla versione I, che possiamo considerare come un «esercizio» per la maggior parte degli allievi di quest'età?

Si opterà per un compromesso del genere: l'esercizio per tutti, poi il problema in caso di riuscita, o ancora: il problema per tutti, ma con un rilancio "esercizio" pper gli allievi detti "in difficoltà"?

Dietro queste scelte ci sono gli interrogativi essenziali riguardanti i saperi matematici in gioco:

In quali dei due casi l'allievo costruisce delle nuove conoscenze?

In quale caso c'è un'attività riflessiva di calcolo, di allenamento, di concettualizzazione?

Nella variante «esercizio», gli allievi avranno almeno la soddisfazione di aver trovato una risposta facilmente. Ma questo è sufficiente? E cosa ne è dell'obiettivo riguardante l'associazione opportuna dei termini di una lunga addizione?

Nella variante «problema», certi allievi avranno bisogne dell'apporto del gruppo per superare gli ostacoli della situazione, ma potranno trarne profitto per il loro sviluppo individuale?

Dietro le varianti miste si profila tutta la problematica della differenziazione, che può essere positiva se viene dalla situazione matematica, ma negativa se viene imposta arbitrariamente.

La versione "problema" della versione II si fonda su una concezione socio-costruttivista dell'apprendimento. Ma ricordiamolo, l'analisi a priori non è devoluta solo all'autore del problema, ma anche ad ogni insegnante che pensa di proporre un'attività. E questa analisi a priori dipende da fattori legati alla classe, agli allievi, alla progressione in seno al programma... .

Sperimentazioni

Numerosi insegnanti hanno già lavorato su questa attività nelle due versioni (in Svizzera romanda, dal momento che essa figura nei libri di testo ufficiali). Ma, sfortunatamente, i risultati ottenuti non sono noti in quanto appartengono alla «esperienza personale» di ciascun insegnante che ha proposto questo problema ai propri allievi. Nel migliore dei casi, ci sono stati degli scambi d'idee tra alcuni insegnanti e certe tracce di risoluzione sono state conservate da qualche parte (per esempio nei quaderni degli allievi). I dati repertoriati di quest'attività si limitano dunque a qualche esempio citato precedentemente.

Questo sito si propone di costituire una raccolta di dati, forniti dai visitatori del sito stesso che vorranno sperimentare il problema nelle proprie classi e comunicare i risultati..

La procedura da seguire per questa sperimentazione è la seguente:

1. Fare un'**analisi a priori** di questo problema in funzione degli allievi ai quali verrà proposto:

- domandarsi se il sapere matematico che interviene nel problema è interessante nei riguardi del percorso didattico della classe;

  ricordiamo qui che si tratta della trasformazione di un'addizione di numeri naturali in moltiplicazione e che questa trasformazione richiede la communtatività e dell'associatività dell'addizione, prima di passare all'equivalenza fondamentale tra l'addizione di *k* termini uguali(a) e la moltiplicazione: a + a + a + ...+ a = *k* a (caso particolare della distributività della moltiplicazione rispetto all'addizione)
- domandarsi quello che gli allievi, al loro livello, possono costruire come conoscenze;
- prevedere delle fasi di utilizzazione della situazione: sviluppi, strutturazione, rinforzo, istituzionalizzazione;
- prevedere i modelli di differenziazione, con "gioco" sulle variabili didattiche (caso più "semplce" e caso più "difficile")

- determinare precisamente le modalità di gestione dell'attività: di tipo «situazione-problema» per lavoro di gruppo, di tipo lavoro individuale con redazione di un testo esplicativo e di giustificazione..., durata dell'attività, contratto stabilito con gli allievi ...
- prevedere la modalità di valutazione del lavoro degli allievi

2. Realizzare la sperimentazione, raccogliere e analizzare i risultati:

- copie dei lavori di gruppo o dei lavori individuali degli allievi,
- rendiconto o sintesi, con identificazione di procedure di risoluzione, esplicatazione delle difficoltà e degli ostacoli... ;
- elementi di analisi statistiche.

3. Trasmissione dei risultati (sul sito, per mail o per posta ordinaria)

- descrivere in poche parole le scelte didattiche fatte nel preparare l'analisi a priori (perché?),
- descrivere precisamente la sperimentazione (come?): numero di allievi, livello scolare, durata effettiva (delle diverse fasi di ricerca, di discussione, di redazione...), modalità di lavoro...,
- invio dei risultati: lavori degli allievi, eventuali sintesi o statistiche, altre osservazioni e suggestioni.