Caratteristica di Eulero-Poincaré, curvatura di Gauss e tassellazione di superfici architettoniche.

Alberto Saracco[#]

Molto spesso, nella progettazione di edifici, si decide di tassellare una superficie con un piccolo numero di tasselli (mattonelle, lastre di vetro, o altro) di forma e dimensione fissate. A volte questi elementi sono poligoni piani, altre volte no, ma comunque nella stragrande maggioranza dei casi sono topologicamente equivalenti ad un poligono.

Cosa intendiamo per *topologicamente equivalenti*? La topologia è quella branca della geometria, nata nella seconda metà dell'Ottocento, che si occupa degli insiemi a meno di trasformazioni bicontinue, ovvero considera *topologicamente equivalenti* due insiemi che si possono deformare l'une nell'altro come se fossero fatti di gomma, allungando o accorciando le distanze, ma comunque senza mai effettuare strappi o incollamenti[1].

Dovrebbe pertanto essere evidente che l'architetto o l'ingegnere interessato a progettare un edificio che prevede una tassellazione di una o più superfici dovrebbe maneggiare almeno in parte gli strumenti topologici che gli permettono di sapere se una data tassellazione è possibile o no.

La caratteristica di Eulero-Poincaré. Un tale strumento è la caratteristica di Eulero-Poincaré (in breve EP), χ. Introdotta da Eulero nel Cinquecento per le superfici, è stata poi generalizzata a varietà di dimensione arbitraria da Poincaré nell'Ottocento agli albori della topologia come branca rigorosamente assiomatizzata. Qui siamo interessati al caso delle superfici. Eulero ha dimostrato che per ogni superficie S esiste un numero naturale $\chi(S)$, che dipende solo dalla classe di equivalenza topologica di S, tale che data una qualsiasi tassellazione finita di S con tasselli topologicamente equivalenti a un quadrato, si ha

$$\chi(S) = F - L + V,$$

dove F è il numero di facce (cioè di tasselli), L il numero di lati e V il numero di vertici della tassellazione.

Questa semplice equazione è in realtà un vincolo molto forte. Grazie ad essa si dimostra, tra le altre cose, che i poliedri regolari sono solo cinque (tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro e icosaedro).

Non è obbiettivo di questo articolo dimostrare nella sua generalità l'invarianza topologica della caratteristica di EP. Ci limitiamo a fare alcune osservazioni che ci permettono di calcolare la caratteristica di EP per la sfera, per il piano e per qualche altra notevole superficie topologica.

Calcolo della caratteristica di EP per la sfera, il piano e il cilindro. Consideriamo una tassellazione qualsiasi della sfera S^2 con tasselli topologicamente equivalenti a un quadrato. Vogliamo calcolare $\chi(S^2)$.

Togliendo una faccia della tassellazione possiamo appiattire la tassellazione rimanente sul piano R^2 (ovviamente la trasformazione che compiamo sarà una trasformazione topologica, e non necessariamente rigida[2]). La nuova tassellazione (del piano) avrà lo stesso numero di lati e vertici della tassellazione della sfera, ma un faccia in meno. Ovvero la caratteristica della nuova tassellazione è *1* in meno della vecchia:

$$\chi(R^2) = \chi(S^2) - 1.$$

Ora sostituiamo la nostra tassellazione del piano con una composta da soli triangoli (ovvero da

Dipartimento di Matematica e Facoltà di Architettura, Università di Parma.
e-mail: `alberto.saracco@unipr.it`

1 Ovviamente ci limitiamo a dare un'idea piuttosto vaga (e purtroppo imprecisa) di cosa intendiamo per topologia. Per il fine di questo articolo basterà questa idea vaga.

2 Ovvero pensiamo di deformare sul piano una sfera di gomma a cui abbiamo tagliato un dischetto, e non di schiacciare sul piano la buccia di un'arancia meno un pezzo. Questa seconda operazione, un tentativo di isometria tra un pezzo della sfera e un pezzo del piano, non è possibile: quando proviamo a farla, la buccia dell'arancia si rompe.

tasselli con *3* lati e *3* vertici). Per fare ciò basta aggiungere via via diagonali ai tasselli che già non siano triangoli (vedi l'illustrazione 1). Aggiungendo una diagonale alla tassellazione si aumenta di *1* sia il numero delle facce sia il numero dei lati, mentre il numero dei vertici rimane invariato, e pertanto la somma $F - L + V$ rimane invariata.

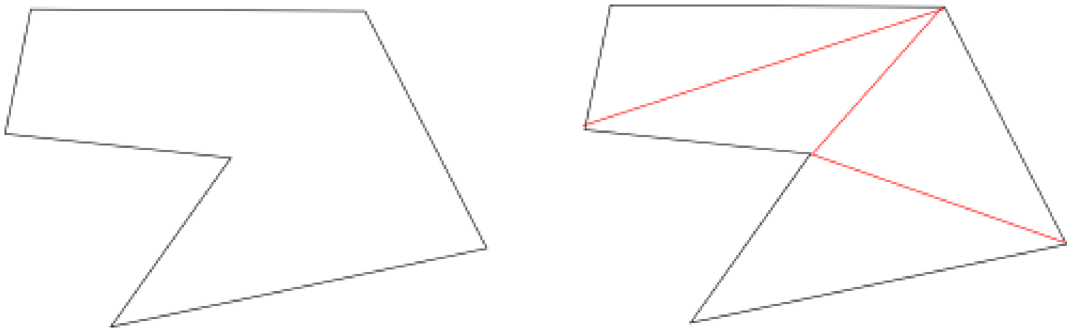

Illustrazione 1: Triangolazione di un poligono mediante l'aggiunta dei lati in rosso.

A questo punto la tassellazione del piano è formata da un numero finito n di triangoli (diremo di aver triangolato la tassellazione data). Considerando un triangolo al bordo della tassellazione, si possono avere i seguenti casi:

1) il triangolo ha nel bordo della tassellazione un solo lato (vedi illustrazione 2a). Togliendo quel lato, eliminiamo il triangolo e diminuiamo di *1* sia F sia L: la quantità $F - L + V$ rimane invariata;
2) il triangolo ha nel bordo della tassellazione due lati (vedi illustrazione 2b). Togliendo quei lati, eliminiamo il triangolo e diminuiamo di 1 sia F sia V, e di *2 L*: la quantità F – L + V rimane invariata;
3) il triangolo ha nel bordo della tassellazione tutti e tre i lati (vedi illustrazione 2c). Togliendo quei lati, eliminiamo il triangolo e diminuiamo di *1 F*, di *3* L e di *2 V*: la quantità $F - L + V$ rimane invariata.

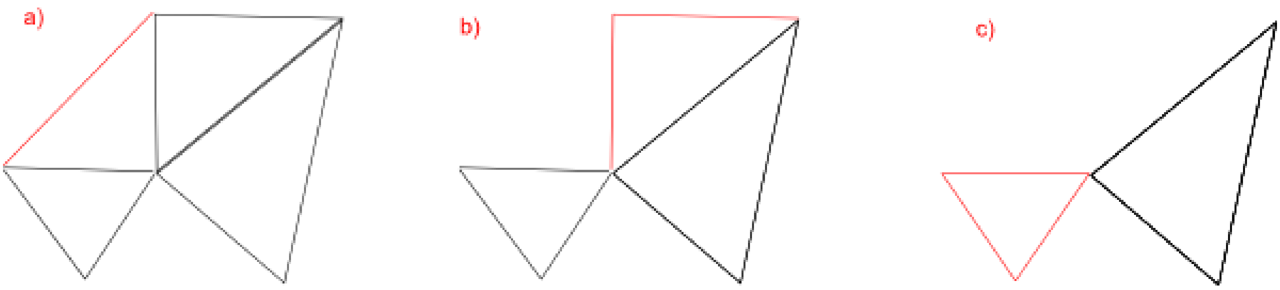

Illustrazione 2: man mano togliamo un triangolo dalla triangolazione (in rosso i lati cancellati), fino a rimanere con un solo triangolo.

In ogni caso abbiamo compiuto un'operazione che mantiene invariato il numero a cui siamo interessati[3], facendo diminuire di *1* il numero di triangoli nella tassellazione. Dopo aver ripetuto questo passo n-1 volte, restiamo con una tassellazione di un singolo triangolo. Siccome $F=1, L=3, V=3$, abbiamo dimostrato che

$$\chi(R^2) = 1,$$
$$\chi(S^2) = 2.$$

Osserviamo che togliendo un tassello limitato di una tassellazione del piano la superficie che si viene a creare è topologicamente equivalente ad un cilindro C (equivalentemente, tappando una estremità del cilindro con un tassello, si ottiene un piano). Pertanto la caratteristica di EP del cilindro è

$$\chi(C) = \chi(R^2) - 1 = 0.$$

3 I due procedimenti descritti, la triangolazione di una tassellazione e la riduzione del numero di tasselli triangolari, sono gli utili metodi alla base del calcolo delle caratteristiche di EP. Inoltre, analizzando bene il metodo descritto, si riesce a trovare una dimostrazione dell'invarianza della caratteristica di EP per deformazioni topologiche.

Somma connessa di superfici topologiche e la caratteristica di EP del *g*-toro. Grazie alle osservazioni precedenti, data una qualsiasi superficie topologica e una sua tassellazione, possiamo sempre triangolare la tassellazione.

Date due superfici S_1 e S_2 si chiama somma connessa delle due superfici la superficie $S_1\#S_2$ ottenuta rimuovendo un triangolo da S_1 e un triangolo da S_2 e incollando tra loro i bordi dei due triangoli rimossi.

Per costruzione una tassellazione su S_1 e una su S_2 ne inducono una sulla somma connessa $S_1\#S_2$. Siccome dalla tassellazione sulla somma connessa sono sparite *2* facce, *3* lati e *3* vertici, si ha

$$\chi(S_1\#S_2) \;=\; \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Il *g*-toro è la superficie che si ottiene facendo la somma connessa di *g* tori. Per costruzione, se $\chi(T)$ è la caratteristica di EP del toro, la caratteristica di EP del *g*-toro T_g è

$$\chi(T_g) \;=\; g\chi(T) - 2(g-1) \;=\; 2 - 2g + g\chi(T).$$

Osserviamo che un toro si può ottenere incollando con sé stessa una sfera a cui siano stati rimossi *2* triangoli. Quindi, ragionando in maniera simile a prima

$$\chi(T) \;= \chi(S^2) - 2 \;=\; 0.$$

Pertanto la caratteristica di EP del *g*-toro è

$$\chi(T_g) \;=\; 2 - 2g.$$

Riassumiamo, nella seguente tabella, le caratteristiche che abbiamo calcolato insieme ad altre caratteristiche significative.

Superficie S	Caratteristica di EP $\chi(S)$
piano	*1*
sfera	*2*
cilindro	*0*
Nastro di Moebius	*0*
Bottiglia di Klein	*0*
Piano proiettivo	*1*
toro	*0*
bitoro	*-2*
g-toro	*2-2g*

Doppio di una superficie con bordo. Sia *S* una superficie topologica compatta con bordo *bS* non vuoto. Definiamo il suo doppio *DS* come la superficie topologica data da due copie della superficie *S* incollate lungo il bordo.

Una tassellazione di *S*, tale che il bordo *bS* sia costituito da vertici e lati della tassellazione, induce una tassellazione sul suo doppio topologico con il doppio delle facce e il doppio dei lati e dei vertici (meno i lati e i vertici contenuti nel bordo, che sono in egual numero). Pertanto

$$\chi(DS) \;=\; 2\chi(S).$$

Da questa osservazione discende un altro modo di calcolare la caratteristica di EP del toro, osservando che il toro è il doppio topologico del cilindro (con bordo).

Caratteristica di EP e poliedri regolari. Ricordiamo che un poliedro si dice regolare se

1) tutte le sue facce sono poligoni regolari congruenti tra loro;
2) in tutti i vertici concorrono uno stesso numero di facce;
3) tutti gli angoli diedri sono uguali tra loro.

Una semplice applicazione della caratteristica di EP della sfera ci permette di ricavare quali sono gli unici poliedri regolari. Infatti un poliedro regolare è topologicamente equivalente alla sfera (il fatto che tutti gli angoli diedri siano uguali implica che il poliedro solido deve essere un solido convesso, quindi topologicamente equivalente a una palla).

Ovviamente un poliedro fornisce una tassellazione di sé stesso. Consideriamo un poliedro regolare $P(n,m,k)$ con k facce che sono tutte n-agoni regolari ($n>2$), nei cui vertici concorrono m facce ($m>2$). Allora per $P(n,m,k)$ abbiamo che ci sono k facce nella tassellazione, ci sono un totale di kn lati (ma per ottenere un lato della tassellazione dobbiamo incollare tra loro due lati) e un totale di kn vertici (ma per ottenere un vertice della tassellazione dobbiamo incollarne tra loro m). Quindi:

$$F = k,$$
$$L = kn/2,$$
$$V = kn/m.$$

Quindi sappiamo che

$$\chi(S^2) = \chi(P(n,m,k)) = F - L + V = 2\ ,$$

da cui

$$2m\text{-}mn+2n = 4m/k$$

Osserviamo che il numero a sinistra dell'uguale è un numero intero, mentre quello a destra è un numero positivo. Pertanto entrambi i numeri sono naturali non nulli. In particolare

$$m(2\text{-}n)+2n > 0.$$

Ora procediamo per casi. Sappiamo che $n>2$, e $m>2$. L'equazione precedente ci dice che, se $n =3$

$$n =3,\ 3 \leq m < 6.$$

Se $n=4$

$$n = 4,\ 3 \leq m < 4 \ \ (m=3).$$

Se $n=5$

$$n = 5,\ 3 \leq m < 10/3 \ \ (m=3).$$

Se $n>5$, ovvero $n=6+l$, con l numero naturale si ha

$$n = 6 + l,\ 3 \leq m < 2(6+l)/(4+l) \leq 3 \text{ (impossibile).}$$

Abbiamo quindi trovato tutti i casi possibili di coppie (n,m) ammissibili. Grazie all'uguaglianza

$$k = 4m / (2m\text{-}mn+2n)$$

troviamo i corrispondenti valori di k. Pertanto gli unici poliedri regolari sono i seguenti cinque

n	m	k	Poliedro
3	3	4	tetraedro
3	4	8	ottaedro
3	5	20	icosaedro
4	3	6	cubo
5	3	12	dodecaedro

Osserviamo infine che ragionamenti del tutto analoghi portano a dimostrare che non si può tassellare una sfera utilizzando solo esagoni (regolari o meno che siano). Si è soliti dire che gli esagoni non portano curvatura.

La curvatura di Gauss e legame con la caratteristica di EP. Introduciamo ora una nozione valida per le superfici dello spazio differenziabili almeno due volte con continuità (o di classe C^2, per brevità): la curvatura di Gauss. Supponendo che i lettori di questa rivista la conoscano bene, ci limitiamo a dare qualche breve cenno sulla sua definizione.

Data una curva C nello spazio, e due suoi punti P e Q, si definisce curvatura media di C tra P e Q il rapporto tra l'angolo formato tra i due vettori tangenti alla curva in P e in Q e la lunghezza dell'arco di curva PQ. La curvatura nel punto P della curva C, $k_C(P)$, è il limite al tendere di Q a P della curvatura media tra P e Q.

Data una superficie S, una sua curva C e un suo punto P, si definisce curvatura normale della superficie S nel punto P lungo la curva C, $k_n(P)$, il prodotto di $k_C(P)$ per il prodotto scalare tra i versori normali alla curva e alla superficie nel punto P. Tale curvatura normale non dipende in realtà dalla curva C, ma solo dalla sua retta tangente in P. Al variare della retta tangente, la curvatura normale varia con continuità tra due valori di massimo e di minimo. Tali valori sono detti curvature principali. La curvatura di Gauss, $K_S(P)$, della superficie S nel punto P è il prodotto delle curvature principali.

I punti della superficie in cui $K_S(P)>0$ sono ellittici, i punti in cui $K_S(P)<0$ sono iperbolici e i punti in cui $K_S(P)=0$ sono planari o parabolici.

Consideriamo ora superfici di classe C^2 orientabili e chiuse, ovvero limitate e senza bordo. L'integrale della curvatura di Gauss sulla superficie S è un invariante topologico, ovvero è lo stesso per tutte le superfici topologicamente equivalenti a S. Vi è inoltre un legame tra tale integrale e la caratteristica di EP della superficie (teorema di Gauss-Bonnet):

$$\iint_S K_S(P(u,v))\, du\, dv = 2\pi\,\chi(S).$$

Questa equazione permette sia di dimostrare alcuni importanti fatti sulla curvatura di superfici chiuse (ad esempio "ogni superficie orientabile chiusa non topologicamente equivalente alla sfera di classe almeno C^2 ha punti ellittici, punti iperbolici e punti a curvatura di Gauss nulla"), sia di introdurre la nozione di curvatura concentrata per superfici non di classe C^2, ad esempio per le superfici lineari a pezzi, come i poliedri.

Definiamo infatti, data una superficie lineare a pezzi, la curvatura concentrata attorno al vertice V della superficie come

$$K(V) = 2\pi - \Sigma_i\, \alpha_i,$$

dove gli α_i sono (le misure de)gli angoli concorrenti nel vertice V. Con questa definizione si ottiene che

$$\Sigma_V\, K(V) = 2\pi\,\chi(S),$$

e pertanto possiamo intendere le $K(V)$ effettivamente come curvature concentrate. In questo modo il concetto di curvatura di Gauss (diffusa o concentrata) ha senso per tutte le superfici, e il suo integrale su una superficie chiusa è un invariante topologico.

Osservando che attorno ad un vertice di una tassellazione si devono incontrare almeno 3 facce della tassellazione e che gli angoli di un esagono sono in media di $2\pi/3$, segue che le curvature concentrate medie di una tassellazione con esagoni sono non positive. Pertanto è impossibile tassellare una sfera con soli esagoni.

Conclusioni. Ovviamente i problemi reali in architettura sono molto complessi e difficilmente possono essere risolti dalla matematica. Ma la matematica è comunque un potente strumento per discernere a priori quello che è possibile da quello che non è possibile. E, per dirla con Sherlock Holmes, *eliminato l'impossibile, ciò che resta, per improbabile che sia, deve essere la verità.*