Storia di π

Alberto Saracco[1]

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Parma

Parma, 3/14/15 9:26:53 ...

Outline

Proporzionalità

Alcune quantità sono proporzionali tra loro...

π

- In un cerchio, circonferenza e diametro sono in rapporto costante:

$$\frac{C}{d} = \pi$$

- Ma come trovare questo rapporto?

Pali, corde e sabbia.

- Misurare circonferenza e diametro di un cerchio.
- Senza sistemi di misurazione; senza metri flessibili; senza compasso; senza carta; senza sistema di numerazione decimale...
- Solo con l'uso di pali, corde e sabbia!

Prime approssimazioni di π

- $\pi \cong 3$
- $3,125 = 3 + \frac{1}{8} < \pi < 3 + \frac{1}{7} = 3,1428...$

Matematica babilonese.

- Su una tavoletta si trova il rapporto tra il perimetro dell'esagono inscritto e la circonferenza.
- $$\frac{57}{60} + \frac{36}{(60)^2}$$
- Essendo il lato dell'esagono inscritto uguale al raggio, la formula precedente calcola $6r/C = 3d/C = 3/\pi$.
- $$\pi = 3 + \frac{1}{8}$$

Matematica egizia

$$\pi \cong 3 + \frac{1}{7} = 3,1428...$$

$$\pi \cong 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3,16049...$$

Matematica biblica

I libro dei Re, VII, 23.

Fece un bacino di metallo fuso di dieci cubiti da un orlo all'altro, rotondo; la sua altezza era di cinque cubiti e la sua circonferenza di trenta cubiti.

Ovvero

$$\pi = \frac{30}{10} = 3$$

Matematica cinese.

Tsu Chung-Chih – Tsu Keng-Chih, 5° secolo d.C.

$$3,1415926 < \pi < 3,1415927$$

- Ben 8 cifre decimali esatte di π...
- Una tale precisione in occidente si sarebbe raggiunta circa mille anni dopo.
- Tutta questa precisione è dovuta allo zero!

La quadratura del cerchio

Quadratura del cerchio

Dato un cerchio, costruire un quadrato con la stessa area.

$$A = \frac{1}{2}(2\pi r)r = \pi r^2$$

Quindi il quadrato con la stessa area è il quadrato con lato

$$L = \sqrt{\pi}r$$

o forse il problema è più profondo?

Per giocare, servono le regole...

Quadratura del cerchio

1. Dato un cerchio,
2. trovare una costruzione esatta di un quadrato con area uguale a quella del cerchio dato
3. usando solo compasso e righello,
4. in un numero finito di passi.

I cinque postulati di Euclide.

1. Per due punti passa una e una sola retta;
2. Una retta può essere prolungata in linea retta indefinitamente (righello non graduato);
3. Dato un centro e un raggio, si può costruire un cerchio (compasso collassabile);
4. Tutti gli angoli retti sono uguali;
5. Se i due angoli formati da rette incidenti ad una terza sono minori di due rette, le rette prolungate si intersecheranno dalla parte degli angoli minori di due retti.

Quadratura della lunula.

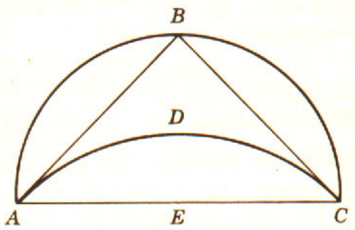

Figure: La lunula di Ippocrate di Chio (470-410 a.C.). La sua area è equivalente a quella del triangolo rettangolo.

La quadratrice di Ippia.

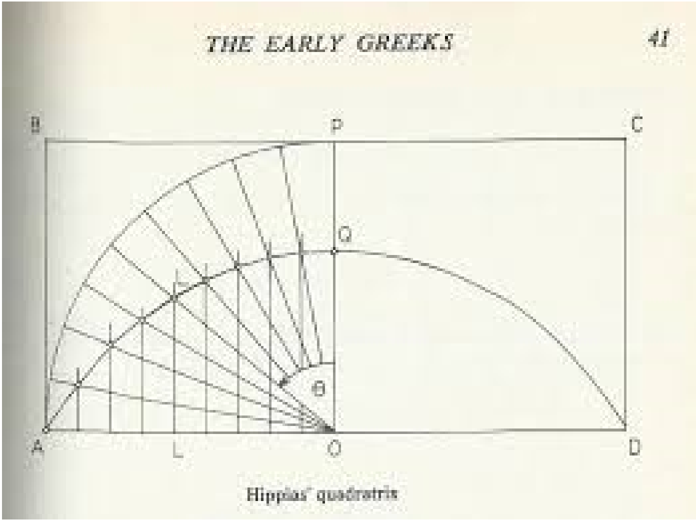

Figure: La quadratrice di Ippia di Elide (443 - 399(?) a.C.).

Archimede di Siracusa (ca. 287-212 a.C.).

Metodo di esaustione.

$$3,140845... = 3 + \frac{1}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} = 3,142857...$$

Spirale di Archimede: una nuova curva per quadrare il cerchio.

Gli anni bui

Per la scienza e la matematica la dominazione romana e il Medioevo sono stati anni molto bui.
I progressi sono stati pochi, anzi, molte delle precedenti conoscenze sono andate perse.

Fibonacci (1170-1240)

Viene importato lo zero (indiano, cinese...) dagli arabi!

Migliorano le capacità di calcolo.

Le espressioni infinite

François Viéte (1540-1603)

- Trigonometria.
- Formule di bisezione.
- $$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots}$$

Le espressioni infinite

John Wallis (1616-1703)

- $$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$$
- (in realtà senza il simbolismo dell'integrale...)
- $$\pi = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots}$$

Le espressioni infinite

James Gregory (1638-1675)

- $$\int_0^x \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$$
- da cui la serie infinita
- $$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$
- $$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

Purtroppo servono 300 termini per avere corrette le prime 2 cifre dopo la virgola.

Le espressioni infinite

Isaac Newton (1642-1727)

- Calcolo differenziale e integrale (Leibniz)
- Binomiale
- $$\arcsin x$$
- serie per calcolare π con convergenza molto più rapida...

Le espressioni infinite

Leonhard Euler (1707-1783)

- $$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
- $$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$
- $$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

La formula più bella della matematica

La formula di Eulero

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

La quadratura del cerchio

Partendo da due punti a distanza 1, usando solo righello e compasso possiamo costruire in un numero finito di passi solo numeri algebrici.

Numero algebrico

Un numero α tale che esiste un polinomio $P(x)$ a coefficienti numeri interi tale che

$$P(\alpha) = 0$$

Se si riesce a dimostrare che π non è algebrico, allora la quadratura del cerchio è impossibile.

π è irrazionale!

Lambert (1728-1777), Legendre (1752-1833)

- Se x è un numero razionale diverso da 0, $\tan x$ non è razionale.
- Quindi $\pi/4 = \arctan(1)$ è irrazionale.
- π è irrazionale!

e è trascendente!

Charles Hermite (1822-1901) - 1873

- *e* è trascendente.
- In particolare
$$a_1 e b_1 + \cdots a_n e^{b_n} \neq 0$$
per ogni $b_i \in \mathbb{N}$, e ogni $a_i \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

π è trascendente!

Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939) - 1882

- $$a_1 eb_1 + \cdots a_n e^{b_n} \neq 0$$

  per ogni scelta di b_i algebrici (anche complessi), e a_i algebrici (anche complessi) non nulli.
- In particolare, se π è algebrico, allora

  $$e^{i\pi} + 1 \neq 0$$

  assurdo!
- Quindi π è trascendente!

Fine della storia?

Quadratura del cerchio (ca. 500 a.C.-1882 d.C.)

La quadratura del cerchio è impossibile.