

## Il paradosso del gelataio e altri problemi delle elezioni



**FACCIAMO CONOSCENZA**  
L'UNIVERSITÀ PER PARMA 2020



UNIVERSITÀ  
DI PARMA

**Alberto Saracco**

**13 novembre 2019 17:30**  
**Orto Botanico**

# Il paradosso del gelataio

Immaginiamo una  
lunga spiaggia  
assolata...

Sulla spiaggia ci sono  
due gelatai. Dove è  
meglio che si  
posizionino?



# Posizione ottimale dei gelatai

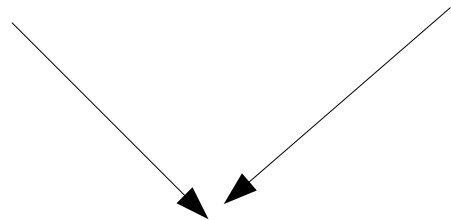
“Vicino a me”

—

Bagnante accaldato

IO

Gelataio

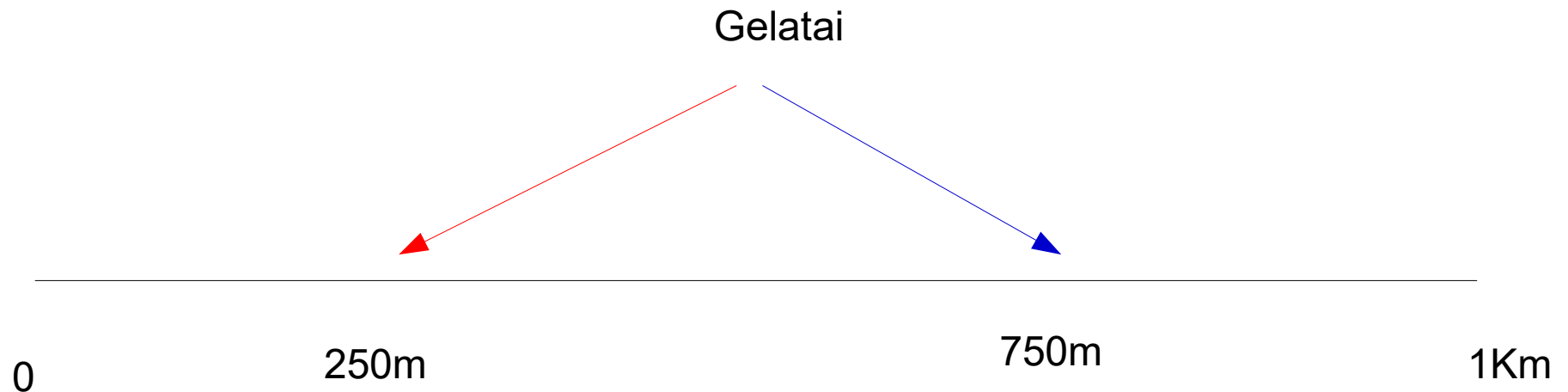


# Posizione ottimale dei gelatai

“In modo da minimizzare lo spostamento complessivo dei bagnanti”

—

Riunione dei bagnanti

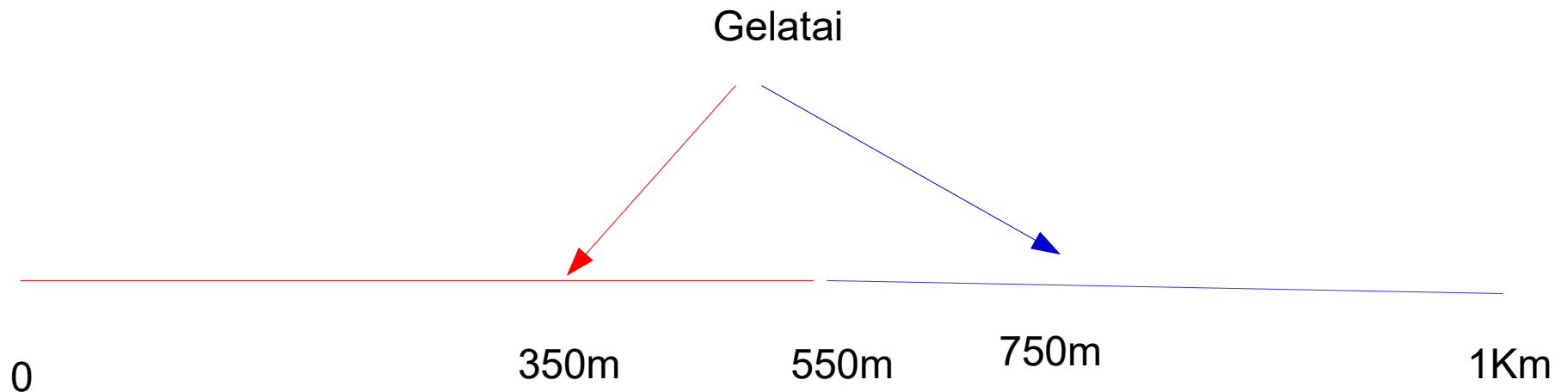


# Posizione ottimale dei gelatai

“Uhhh... e se cerco di rubare un po' di clienti al gelataio blu?”

—

Gelataio rosso

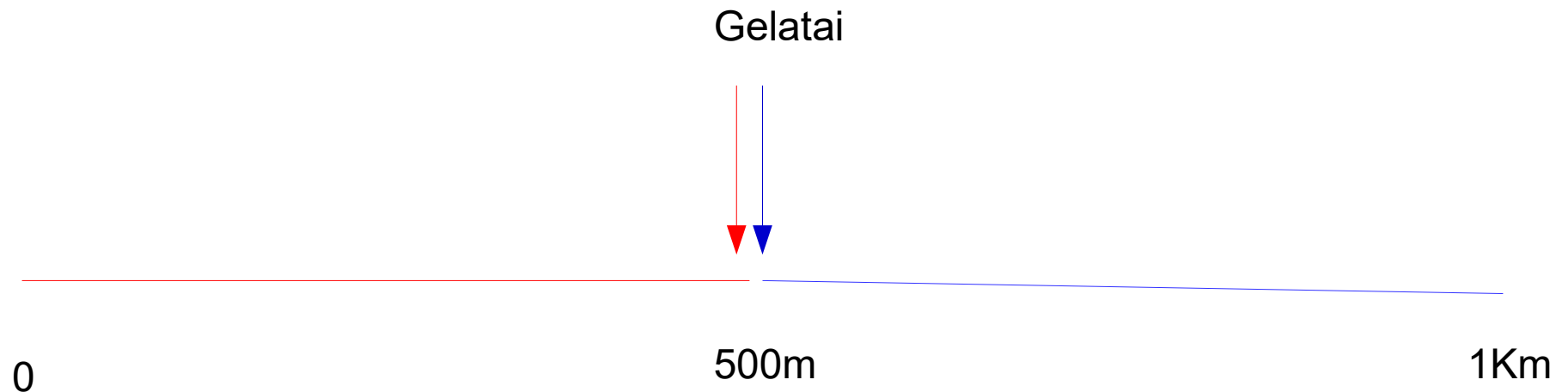


# Posizione ottimale dei gelatai

“Uhhh... e se cerco di rubare un po' di clienti al gelataio rosso?”

—

Gelataio blu



# Alienazione del bagnante



# L'amministratore di condominio

Carlo: **Ascensore!**

Bruno: **Parabola e  
ascensore!**

Alberto: **Parabola!**





# L'amministratore di condominio

Carlo: **Ascensore!**

Bruno: **Parabola e  
ascensore!**

Alberto: **Parabola!**

Parabola: 2 sì, 1 no  
Ascensore: 2 sì, 1 no



# I due candidati amministratori

- Amministratore buonissimo:  
Faccio tutto!

- Amministratore cattivissimo:  
Non faccio niente!



...chi viene eletto?

# Il voto combinato

	I scelta	II scelta	III scelta	IV scelta
<b>Carlo</b>	Ascensore			Parabola
<b>Bruno</b>	Tutto			Niente
<b>Alberto</b>	Parabola			Ascensore

# Il voto combinato

	I scelta	II scelta	III scelta	IV scelta
<b>Carlo</b>	Ascensore	Niente	Tutto	Parabola
<b>Bruno</b>	Tutto			Niente
<b>Alberto</b>	Parabola			Ascensore

# Il voto combinato

	I scelta	II scelta	III scelta	IV scelta
<b>Carlo</b>	Ascensore	Niente	Tutto	Parabola
<b>Bruno</b>	Tutto	Parabola	Ascensore	Niente
<b>Alberto</b>	Parabola			Ascensore

# Il voto combinato

	I scelta	II scelta	III scelta	IV scelta
<b>Carlo</b>	Ascensore	Niente	Tutto	Parabola
<b>Bruno</b>	Tutto	Parabola	Ascensore	Niente
<b>Alberto</b>	Parabola	Niente	Tutto	Ascensore

# I due candidati amministratori

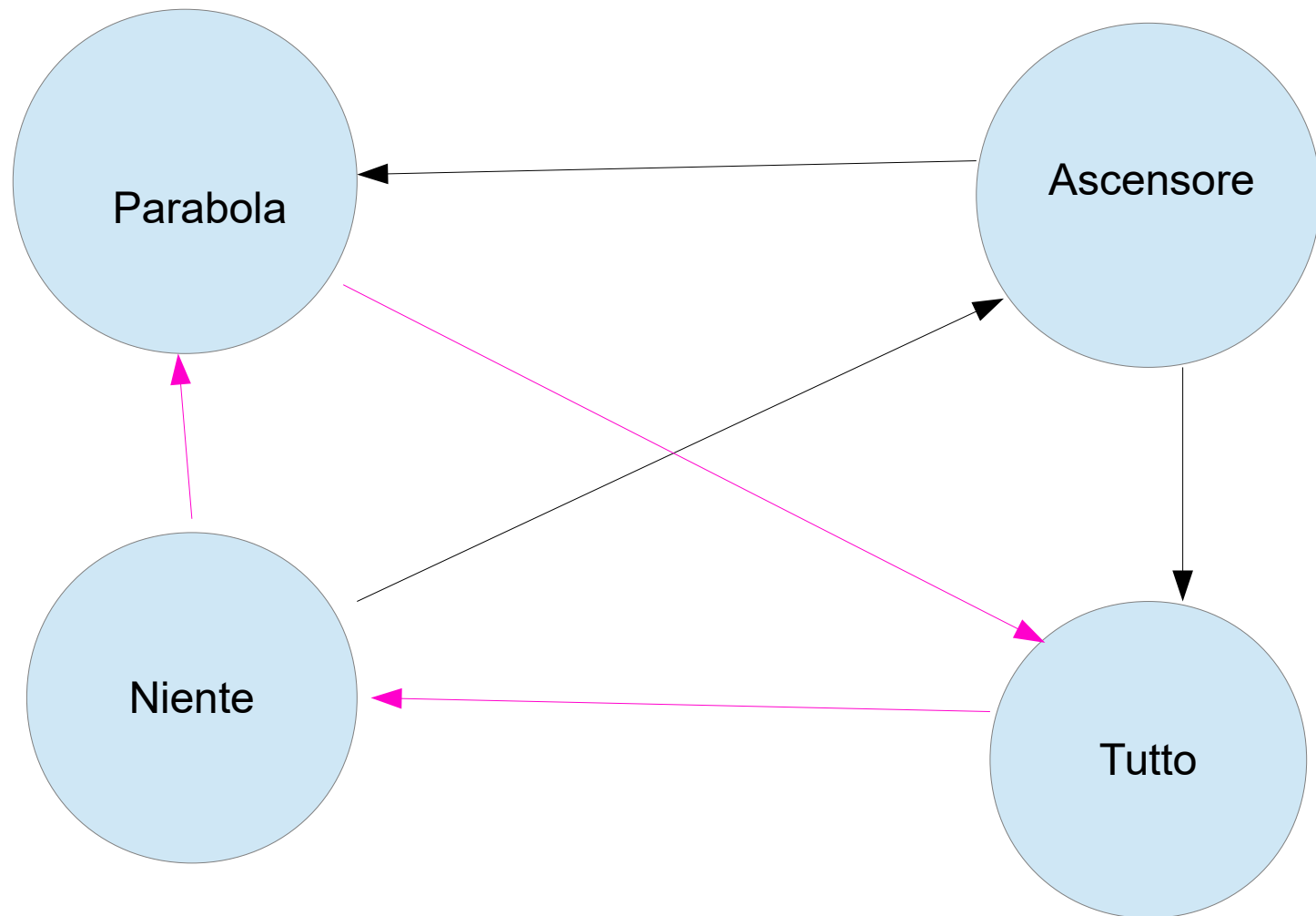
- Amministratore buonissimo:  
Faccio tutto!

- Amministratore cattivissimo:  
Non faccio niente!



...chi viene eletto?

# Cosa vogliono i condomini?





# Primarie repubblicane 2016

## Trump, Condorcet and Borda: Voting paradoxes in the 2016 Republican presidential primaries

Kurrild-Klitgaard, Peter



Table 1. Head-to-head match-ups, four Republican presidential candidates, March-April 2015. T-test.

	Candidates (vote shares)		P-value of vote share difference
Jeb Bush (54%)	→****	Chris Christie (28%)	0.0000
Jeb Bush (49%)	→	Ted Cruz (40%)	0.0718
Ted Cruz (55%)	→****	Chris Christie (30%)	0.0000
Ted Cruz (41%)	→	Scott Walker (36%)	0.2830
Scott Walker (46%)	→	Jeb Bush (42%)	0.4219

# Cosa vogliono “gli elettori”?

Una **legge di benessere sociale** è una funzione che alle preferenze dei singoli elettori associa una “preferenza degli elettori”.

Preferenza = ordinamento di tutte le alternative

**Perché non solo il primo?**



# Una buona legge di benessere sociale

- A1: sovranità dei cittadini

- 

- 

-

# Una buona legge di benessere sociale

- A1: sovranità dei cittadini
- A2: correlazione positiva

- 

-

# Una buona legge di benessere sociale

- A1: sovranità dei cittadini
- A2: correlazione positiva
- A3: invarianza per le alternative irrilevanti
-

# Una buona legge di benessere sociale

- A1: sovranità dei cittadini
- A2: correlazione positiva
- A3: invarianza per le alternative irrilevanti
- A1, A2, A3  $\Rightarrow$  unanimità

# Teorema di Arrow

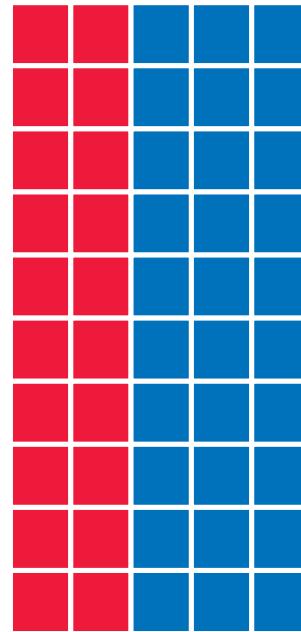
Se ci sono almeno 3 alternative, le uniche leggi di benessere sociale che soddisfano A1, A2 e A3 sono le **dittature**.



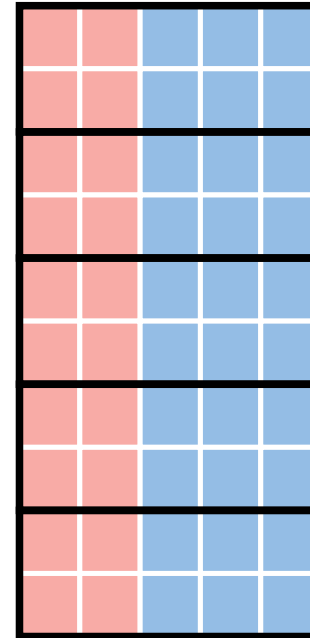


# Gerrymandering

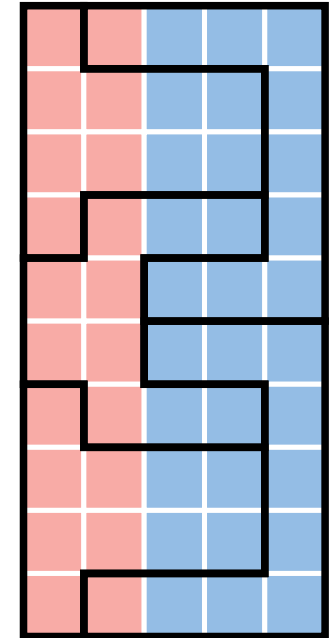
## HOW TO STEAL AN ELECTION



50 PRECINCTS  
60% BLUE  
40% RED



5 DISTRICTS  
5 BLUE  
0 RED  
BLUE WINS



5 DISTRICTS  
3 RED  
2 BLUE  
RED WINS

Marzo 1812:  
Governatore del Massachussets,  
Elbridge Gerry



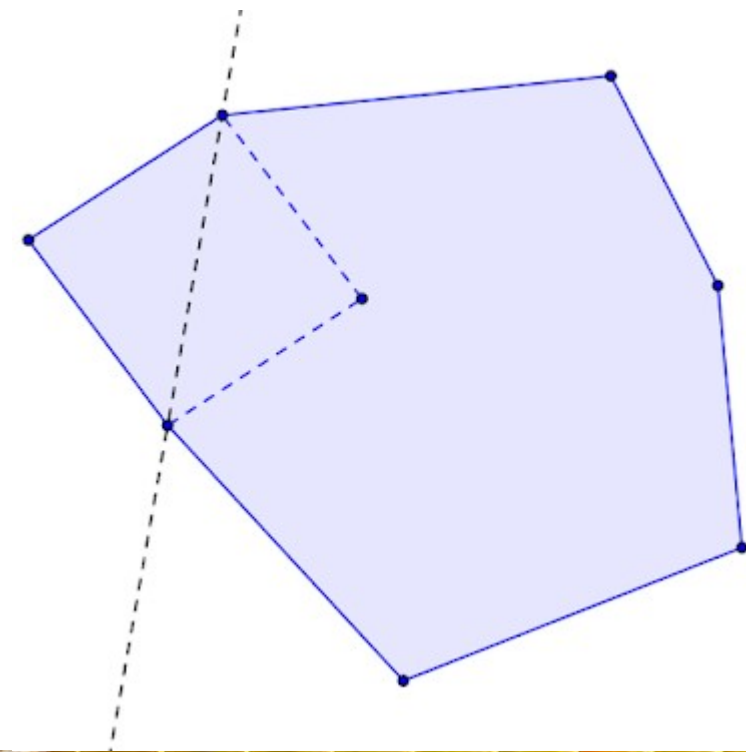
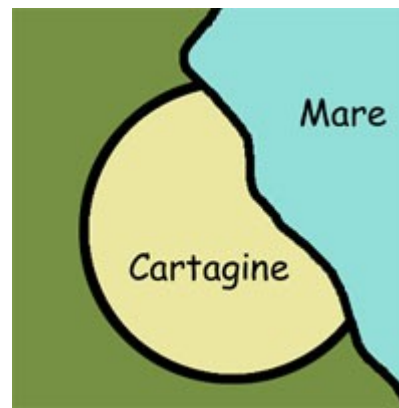
OOH, TOUGH LUCK, KIDS. ONE VOTE FOR VACATION AT DISNEYLAND. TWO VOTES FOR SPENDING SUMMER READING THE DICTIONARY AND NOT TALKING BACK.

BUT THAT'S NOT FAIR!

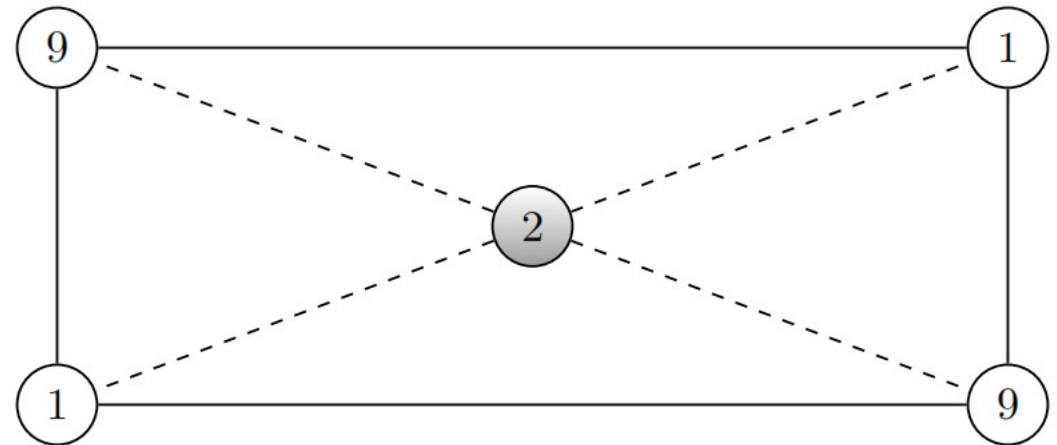
OH? DEMOCRACY ISN'T FAIR?!

Parenting became a lot easier after we gerrymandered the house.

# Isoperimetria: il problema di Didone



# Come limitare il Gerrymandering?



$$\lambda \sum_{\mathcal{C}(\{\Gamma_k\})} g(e_{i,j}) + (1 - \lambda) \sqrt{\sum_{k=1}^N \left( \sum_{v \in \Gamma_k} f(v_i) - \frac{\sum_{v \in \Gamma} f(v_i)}{N} \right)^2}$$

December 2019, 14(4): 771-788. doi: 10.3934/nhm.2019031

## A discrete districting plan

Alberto Saracco <sup>1</sup>,  and Giorgio Saracco <sup>2</sup>, ,  ;

# Metodo proporzionale

Seggi nei collegi in proporzione agli elettori... tutto molto bello, ma come?

100 elettori, 10 seggi.

Blu: 30 elettori → 3 seggi

Rossa: 70 elettori → 7 seggi

# Metodo proporzionale

100 elettori, 10 seggi.

Blu: 36 elettori  $\rightarrow$  3,6 seggi?

Rosso: 64 elettori  $\rightarrow$  6,4 seggi?

# Metodo proporzionale

100 elettori, 10 seggi.

Blu: 36 elettori → 3,6 seggi?

Rosso: 64 elettori → 6,4 seggi?

Non possiamo segare i  
parlamentari...



# Metodo proporzionale

Metodo dei maggiori resti.

Collegio	Elettori	SV	S	R	Seggi
Blu	36	3,6	3	0,6	4
Rosso	64	6,4	6	0,4	6



# Qualche paradosso...

- Paradosso dell'Alabama:  
1880, gli USA aumentano i deputati da 299 a  
300.

# Qualche paradosso...

- Paradosso dell'Alabama:  
1880, gli USA aumentano i deputati da 299 a 300.
- L'Alabama perde un deputato, due stati ne guadagnano 1.

# Qualche paradosso...

- Paradosso dell'Alabama:

1880, gli USA aumentano i deputati da 299 a 300. L'Alabama perde un deputato, due stati ne guadagnano 1.

- Paradosso del nuovo stato:

1907, l'Oklahoma entra negli USA. Vengono aggiunti i 5 seggi che gli spettano (305 in totale).

# Qualche paradosso...

- Paradosso dell'Alabama:

1880, gli USA aumentano i deputati da 299 a 300. L'Alabama perde un deputato, due stati ne guadagnano 1.

- Paradosso del nuovo stato:

1907, l'Oklahoma entra negli USA. Vengono aggiunti i 5 seggi che gli spettano (305 in totale), ma New York perde un seggio e il Maine ne guadagna uno.

# Perché?

I resti non crescono in maniera uguale per tutti,  
ma più velocemente per gli Stati grandi...

Stato	Popolazione (tot 999)	Seggi virtuali (tot 299)	Seggi (tot 299)	Seggi virtuali (tot 300)	Seggi (tot 300)
Alabama	18	5.387	6	5.405	5
X	88	26.338	26	26.426	27
Y	98	29.331	29	29.429	30

# Paradosso ineluttabile

- Balinsky e Young (1982) hanno mostrato come con qualunque metodo di suddivisione con almeno 7 seggi e 4 partizioni, il paradosso sia inevitabile.
- Inoltre, lo stesso teorema mostra come ci sia un insieme di tre paradossi, quello dell'Alabama, il paradosso della popolazione e il paradosso del nuovo stato, di cui almeno uno è presente in ogni sistema di suddivisione.

# Il doppio proporzionale

## Persistent bugs and misrepresentation in Italy's regional electoral laws



Aline Pennisi  
*Ministry of economy and finance, Italy*  
[aline.pennisi@tesoro.it](mailto:aline.pennisi@tesoro.it)

Federica Ricca  
*University of Rome "La Sapienza", Italy*  
[federica.ricca@uniroma1.it](mailto:federica.ricca@uniroma1.it)

*Grazie per l'attenzione!*

<http://www2.unipr.it/~saralb74/divulgazione/>

