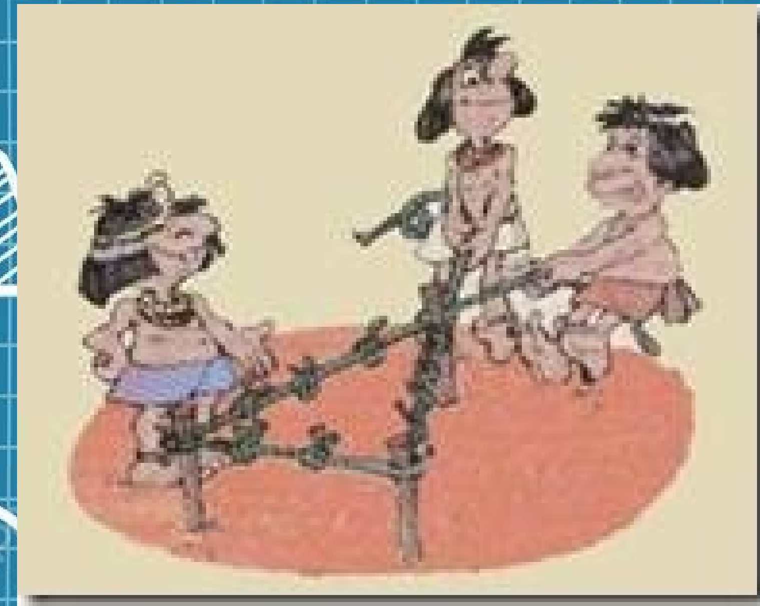
Genova, 27 ottobre 2019

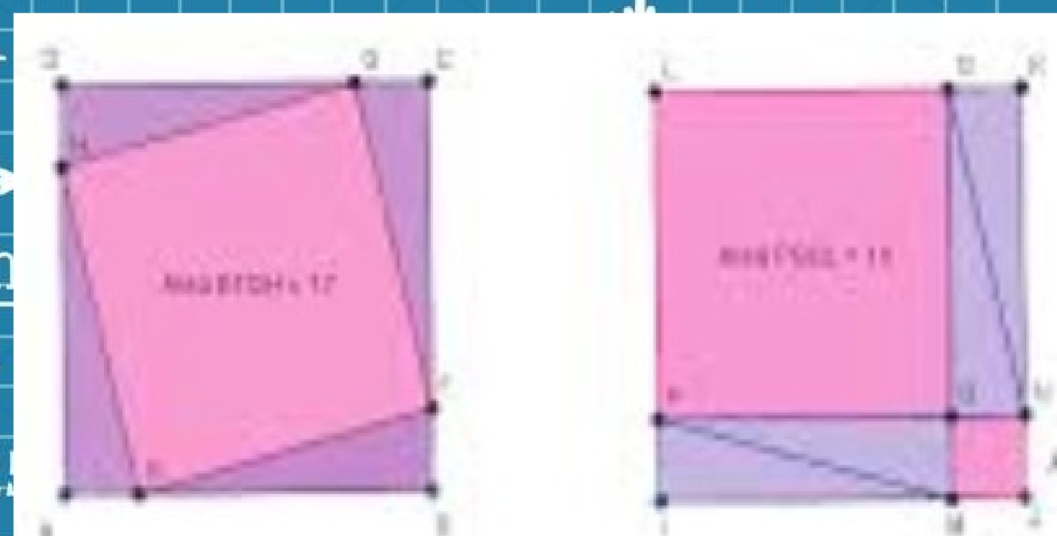
Festival della Scienza

La geometria dell'universo
La scienza delle forme dai greci a oggi

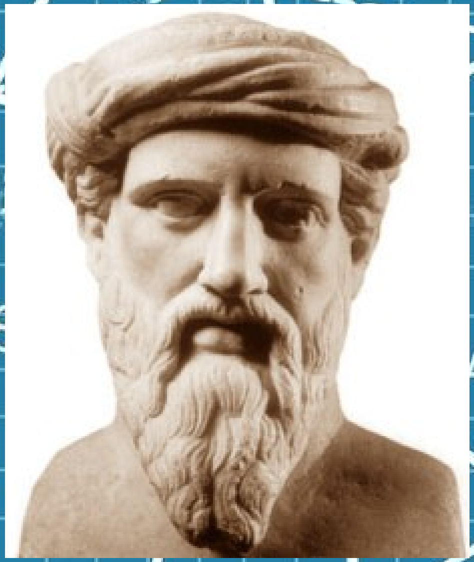
Alberto Saracco
Dipartimento di
Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche
Università di Parma

Il teorema di Pitagora



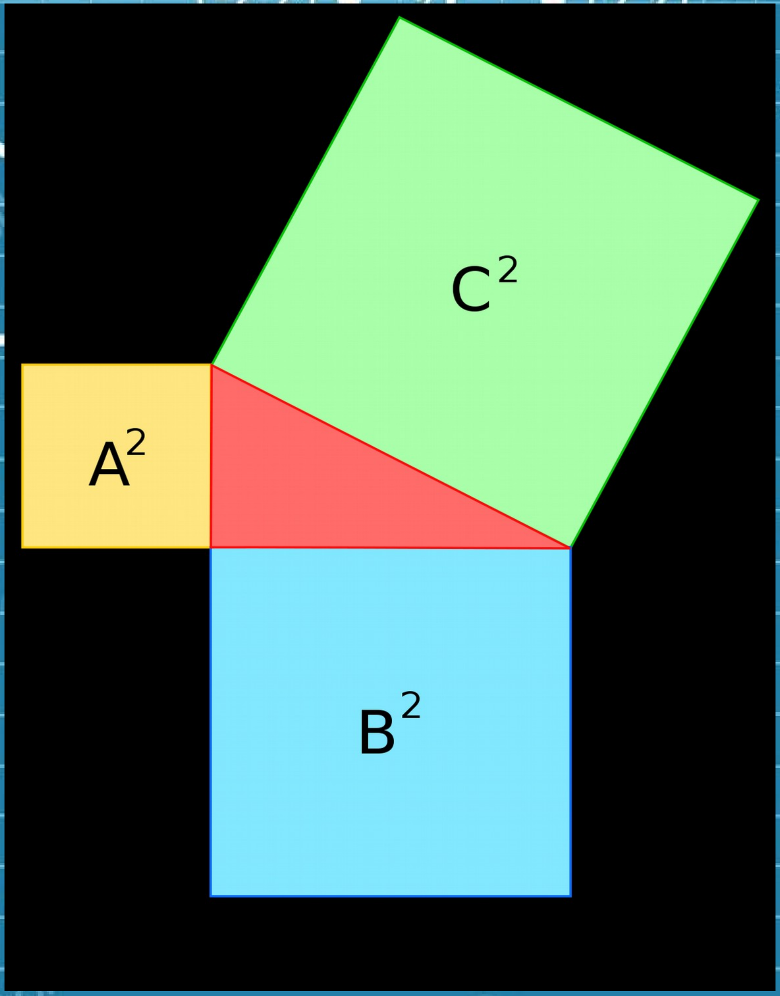


Il teorema di Pitagora



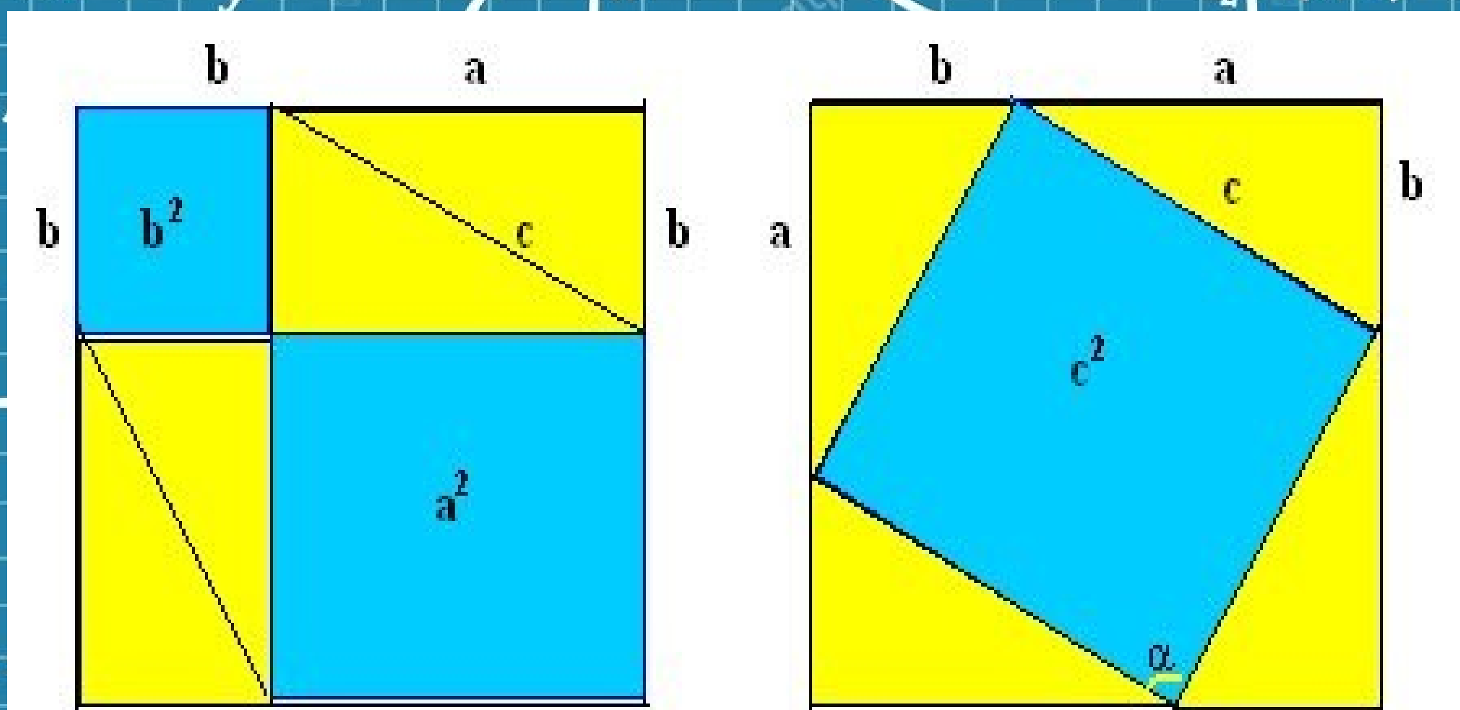
Pitagora 575-495 AC

$A^2+B^2=C^2$



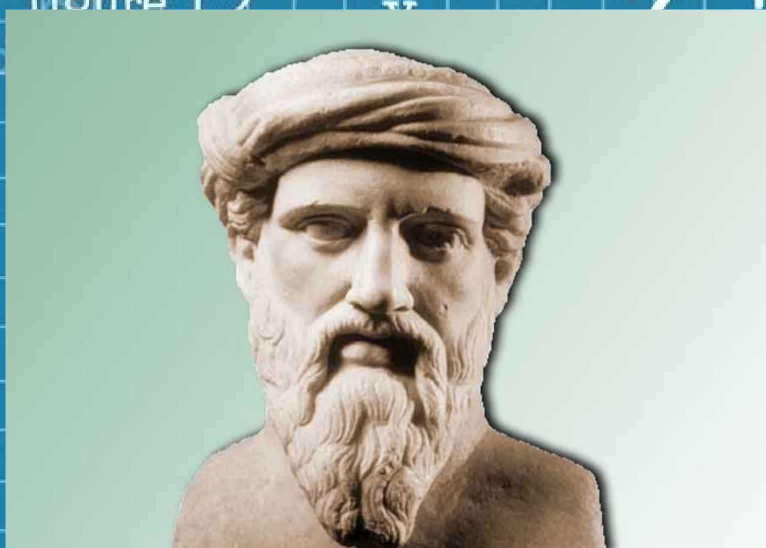
Il teorema di Pitagora

Serve una dimostrazione!

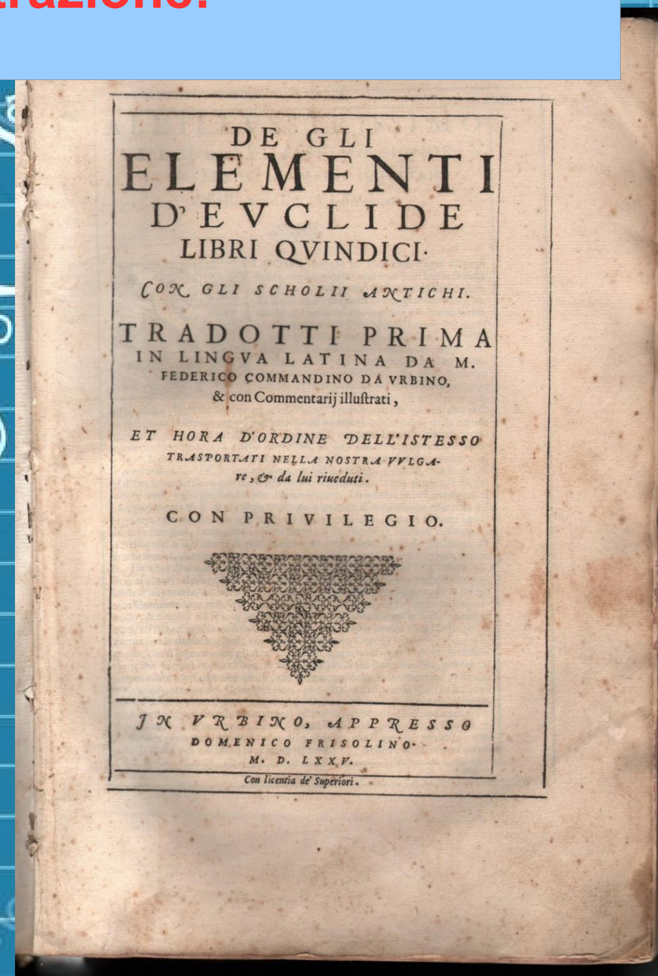


Euclide: matematica = dimostrazioni

Serve una dimostrazione!



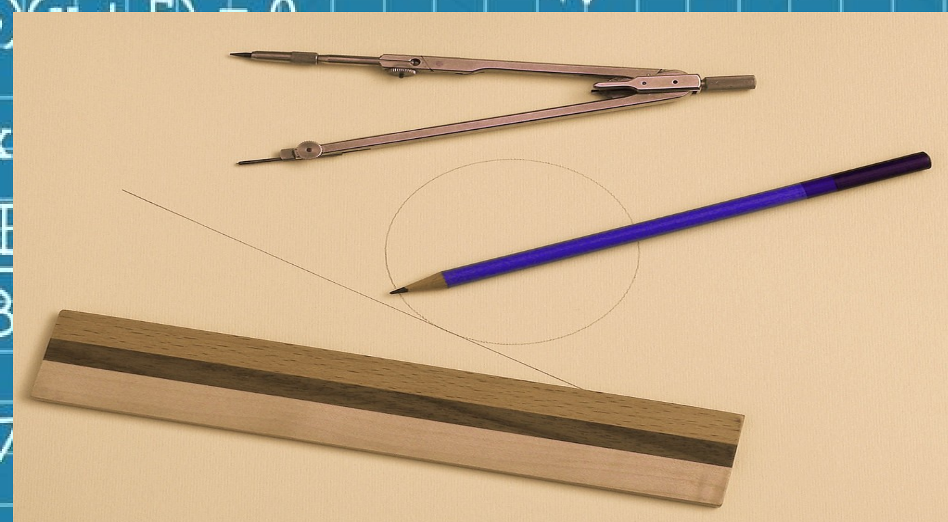
Euclide – IV-III sec AC



DE GLI
ELEMENTI
D'EVCLIDE
LIBRI QVINDICI.
CON GLI SCHOLII ANTICHI.
TRADOTTI PRIMA
IN LINGVA LATINA DA M.
FEDERICO COMMANDINO DA VRBINO,
& con Commentarij illustrati,
ET HORA D'ORDINE DELL'ISTESSO
TRASPORTATI NELLA NOSTRA VVLGA-
re, & da lui riueduti.
CON PRIVILEGIO.
IN VRBINO, APPRESSO
DOMENICO FRISOLINO.
M. D. LXXV.
Con licentia de' Superiori.

Postulati e dimostrazioni

1. *Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta;*
2. *Si può prolungare un segmento oltre i due punti indefinitamente;*
3. *Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio;*
4. *Tutti gli angoli retti sono congruenti tra loro;*



Il V postulato

V POSTULATO

Se una retta taglia altre due rette
e forma dalla stessa parte angoli interni
la cui somma è minore di due angoli retti,
allora le due rette si incontreranno
dalla parte di tali angoli.

Euclide senza il V postulato

Proposizioni 1-28 e 31 dimostrate senza il V

17: teorema inverso

Proposizioni 16 e 17: corollari della 32

Eliminare il V postulato!

Euclide ripulito da ogni macchia

Dimostrare V a partire da I-II-III-IV

Oppure

Sostituire V con una proprietà equivalente

Studiare la geometria assoluta (postulati I-IV)

P se e solo se V

In geometria assoluta,

V implica P e P implica V

P teorema della geometria Euclidea

P se e solo se V

Teorema di Pitagora

Esiste una coppia di rette equidistanti

Somma angoli interni di un triangolo: due angoli retti

costante

Per un punto esterno ad una retta, passa una e una solo parallela

Esiste un rettangolo

Rette parallele alla stessa retta sono parallele

Girolamo Saccheri 1667-1733

Tentativo di dimostrazione per assurdo

Geometria assoluta
+
V è falso

ASSURDO!

Saccheri Euclide ab omni naevo vindicatus 1733

Geometria assoluta
+
V è falso

Saccheri Euclide ab omni naevo vindicatus 1733

Geometria assoluta
+
V è falso

Rette Asintotiche: Non bello!

Saccheri Euclide ab omni naevo vindicatus 1733

Geometria assoluta
+
V è falso

Rette
Asintotiche:
Non bello!

ASSURDO

Saccheri Euclide ab omni naevo vindicatus 1733

Geometria assoluta
+
V è falso

Rette
Asintotiche:
Non bello!

ASSURDO

ERRORI DI CONTO!

Bolyai (1802-1860) e Lobachevskij (1792-1856)

Fondamenti della geometria iperbolica

Geometria iperbolica

Rette asintotiche

Non ci sono figure simili

Somma degli angoli interni di un triangolo < 2 retti

non costante

Per un punto esterno ad una retta data passano infinite parallele

In un triangolo la somma degli angoli interni e dell'area è costante

Geometria iperbolica: e se ci fosse un assurdo?

Idea: modello della geometria iperbolica in termini di geometria euclidea

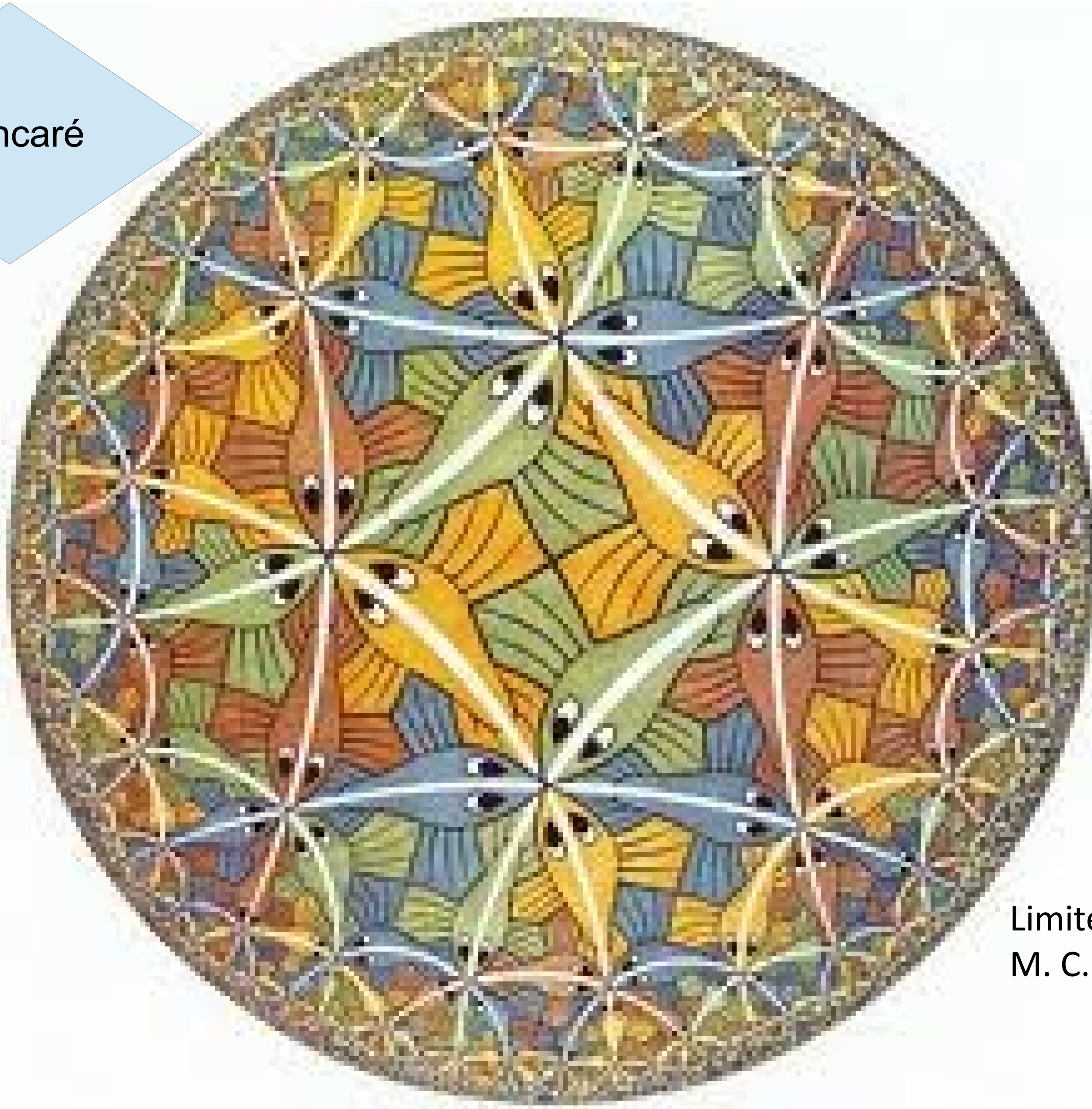
Riemann (1826-1866)

Poincaré (1854-1912)

Beltrami (1835-1900)

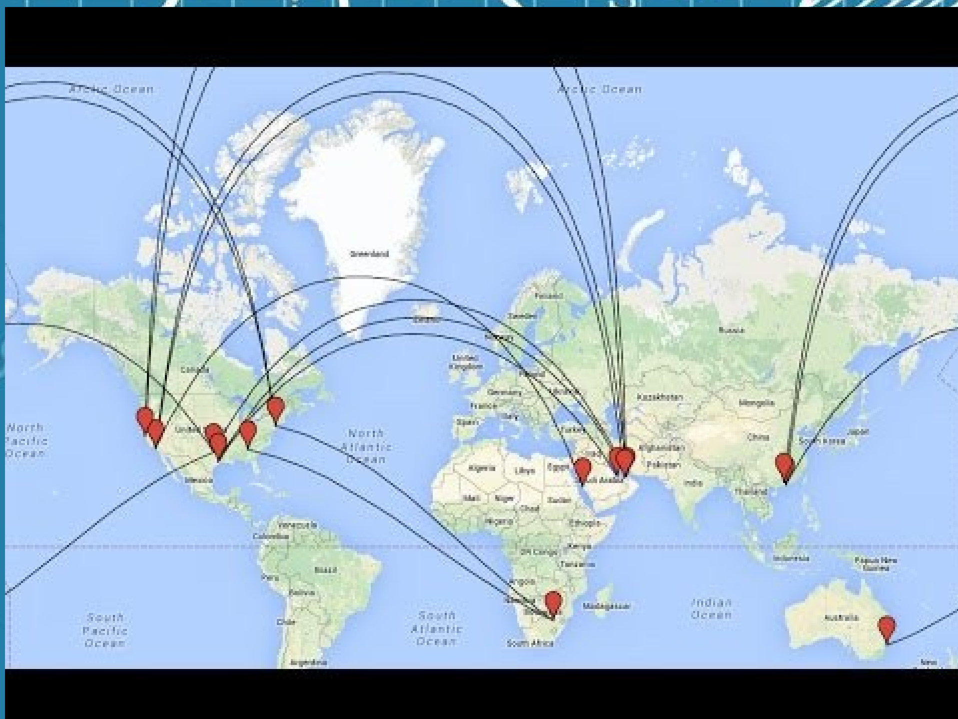
Klein (1849-1925)

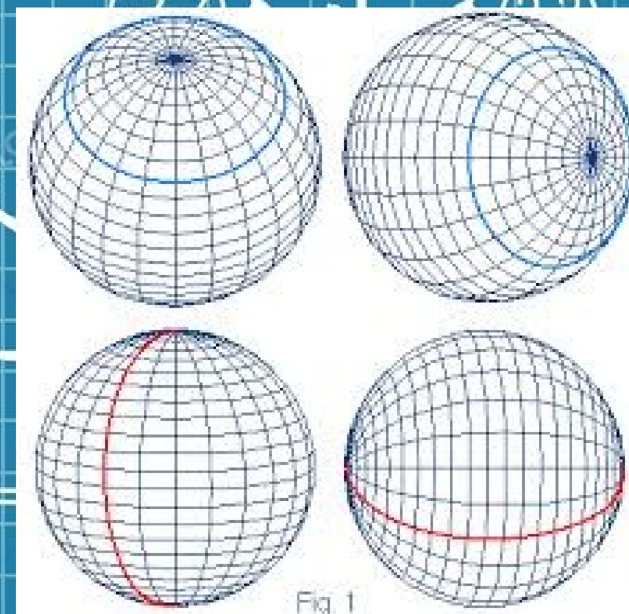
Poincaré



Limite del cerchio,
M. C. Escher

Geometria sferica





Riemann

Non ci sono parallele!

Paperoga

Di nuovo la geometria euclidea

Assiomi di Hilbert

I. Assiomi di collegamento [modifica | modifica wikitesto]

1. Due punti distinti dello spazio individuano una retta.
2. Ogni coppia di punti di una retta individua tale retta.
3. Tre punti non allineati dello spazio individuano un piano.
4. Qualsiasi terna di punti non allineati di un piano individua tale piano.
5. Se due punti di una retta giacciono su un piano tutti i punti della retta giacciono su quel piano.
6. Se due piani hanno un punto in comune avranno almeno un secondo punto in comune.
7. Ogni retta contiene almeno due punti, ogni piano contiene almeno tre punti non allineati.
8. Esistono almeno quattro punti che non giacciono sullo stesso piano.

II. Assiomi di ordinamento [modifica | modifica wikitesto]

1. Se un punto *A* sta tra *B* e *C*, *A* sta anche tra *C* e *B*, ed i tre punti sono allineati
2. Dati due punti distinti *A* e *B*, esistono un terzo e un quarto punto *C* e *D* sulla retta passante per *A* e *B* tali che *A* sta tra *C* e *B* e *B* sta tra *A* e *D*
3. Dati tre punti distinti e allineati, ce n'è esattamente uno che giace tra gli altri due
4. (Assioma di Pasch). Siano dati tre punti *A*, *B* e *C* non allineati, contenuti in un piano *p*, ed una retta *d* contenuta in *p* non contenente nessuno dei tre punti A, B, C: se *d* contiene un punto del segmento *AB*, allora contiene anche un punto di uno dei due segmenti *AC* e *BC*.

III. Assiomi di congruenza [modifica | modifica wikitesto]

1. Se A, B sono due punti di una retta a ed inoltre A' è un punto sulla stessa retta oppure su un'altra retta a', si può sempre trovare un punto B', da una data parte della retta a' rispetto ad A', tale che il segmento AB sia congruente, ovvero uguale, al segmento A'B'. In simboli: AB ≡ A'B'.
2. La relazione di congruenza tra segmenti è transitiva, cioè se *A'B'* e *A"B"* sono congruenti ad *AB*, allora *A'B'* ≡ *A"B"*.
3. Siano *AB* e *BC* segmenti su una retta *r* privi di punti interni comuni, e siano A'B' e B'C' segmenti su una retta *r'* privi di punti interni comuni. Se *AB* ≡ *A'B'* e *BC* ≡ *B'C'*, allora *AC* ≡ *A'C'*.
4. Sia *ABC* un angolo e *B'C'* una semiretta, esistono e sono uniche due semirette *B'D* e *B'E*, tali che l'angolo *DB'C'* è congruente all'angolo ABC et l'angolo *EB'C'* è congruente all'angolo *ABC*.
5. La relazione di congruenza tra angoli è transitiva, cioè se *A'B'C'* e *A"B"C"* sono congruenti ad *ABC*, allora *A'B'C'* ≡ *A"B"C"*.
6. (Primo dei criteri di congruenza dei triangoli[1]). Se per due triangoli *ABC* e *A'B'C'* si ha che *AB* ≡ *A'B'*, *AC* ≡ *A'C'*, e l'angolo *BAC* ≡ all'angolo *B'A'C'*, allora tutto il triangolo *ABC* ≡ al triangolo *A'B'C'*.

Corollario del punto 1: ogni segmento è congruente a sé stesso.

Corollario del punto 4: ogni angolo è congruente a sé stesso.

IV. Assioma delle parallele [modifica | modifica wikitesto]

1. (Postulato di Playfair): Dati una retta *r*, un punto *A* non in *r*, ed un piano *p* contenente entrambi, esiste al più una retta in *p* contenente *A* e non contenente nessun punto di *r*.

L'esistenza di almeno una retta per *A* che non interseca *r* può essere dimostrata e quindi non è necessaria in questo sistema assiomatico, se consideriamo una geometria euclidea. È necessario precisare che in una geometria sferica o ellittica le rette parallele non esistono, ma il postulato rimane corretto grazie alla sua formulazione.

V.Assiomi di continuità [modifica | modifica wikitesto]

1. (*Assioma di Archimede*). Se *AB* e *CD* sono due segmenti qualsiasi, allora esiste sulla retta contenente *AB* una famiglia di punti A_1, A_2, ...,A_n tali che i segmenti AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, sono congruenti a *CD* e tali che *B* giace tra *A* e A_n.
2. (*Assioma di completezza*). Ad un sistema di punti, rette e piani è impossibile aggiungere altri elementi geometrici in modo che il sistema così generalizzato formi una nuova geometria obbediente a tutti i venti assiomi precedenti. In altre parole gli elementi della geometria formano un sistema che non è suscettibile di estensione, ammesso che si considerino validi i venti assiomi del sistema assiomatico di Hilbert.

Hilbert vs Euclide

Geometria greca

Assiomi (verità)

↓

Teoremi (veri)

Matematica moderna

Assiomi (arbitrari)

↓

Teoremi

Modelli

Ma allora cos'è la (una) geometria?

Programma di Erlangen

Klein (1872)

Geometria

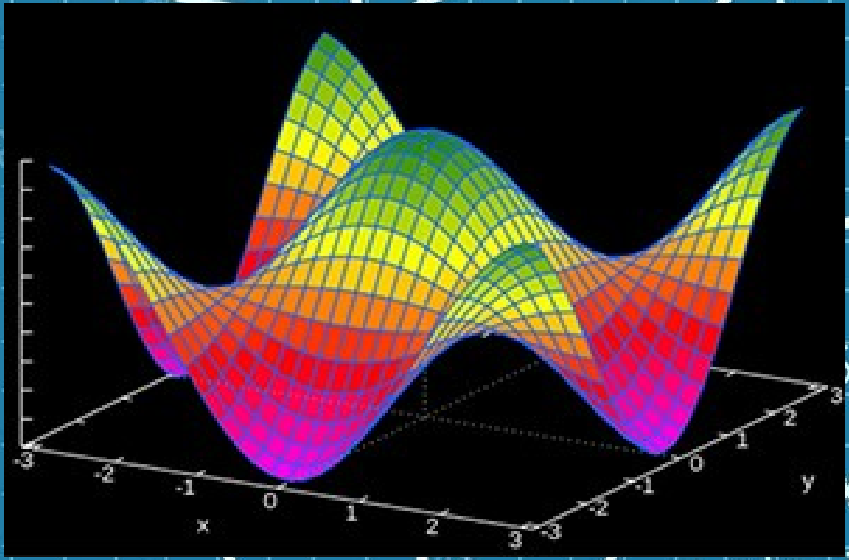
Studio delle proprietà invarianti rispetto a un gruppo di trasformazioni

Altre geometrie: la topologia

La **topologia** considera gli oggetti matematici a meno di trasformazioni bicontinue.
Intuitivamente potremmo dire che li tratta come se fossero di gomma.
Una tazza e una ciambella, dal punto di vista topologico, sono la stessa cosa.

Altre geometrie: la geometria differenziale

L'analisi al servizio della geometria



$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{x,x}(x,y)=z''_{x,x}$$

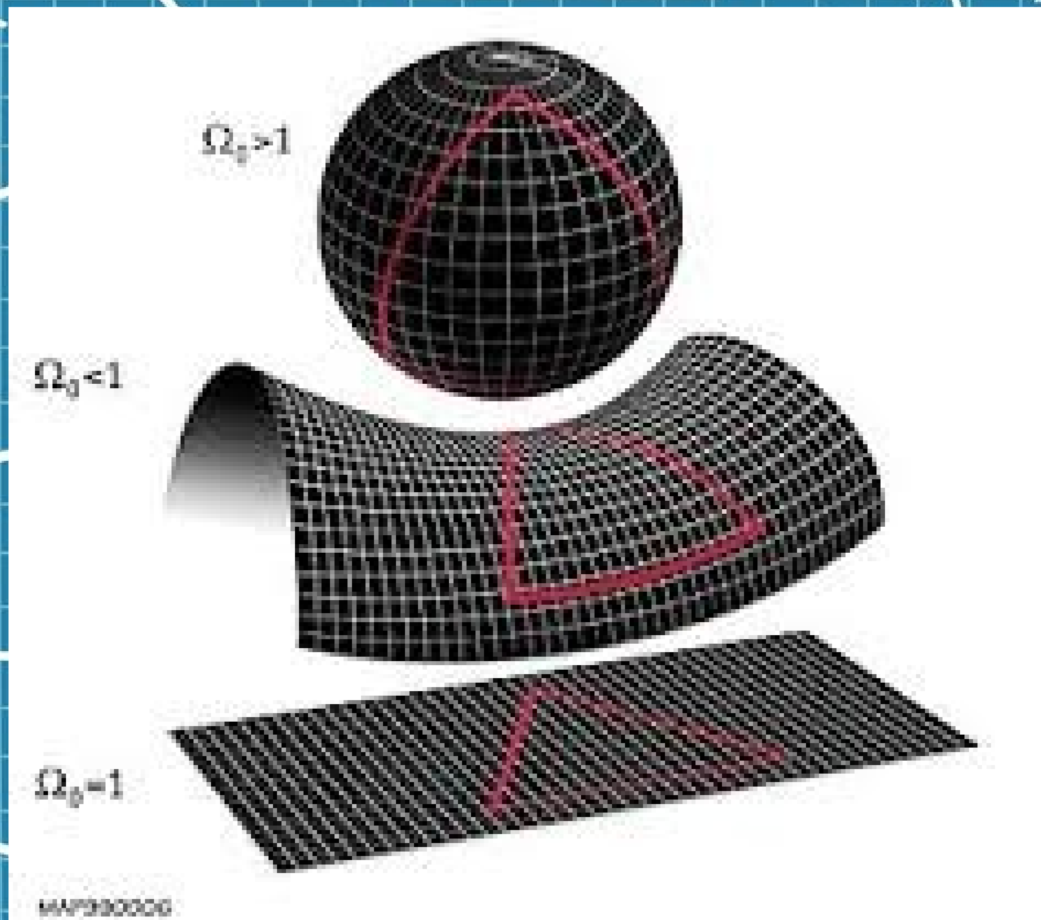
$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{x,y}(x,y)=z''_{x,y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f''_{y,x}(x,y)=z''_{y,x}$$

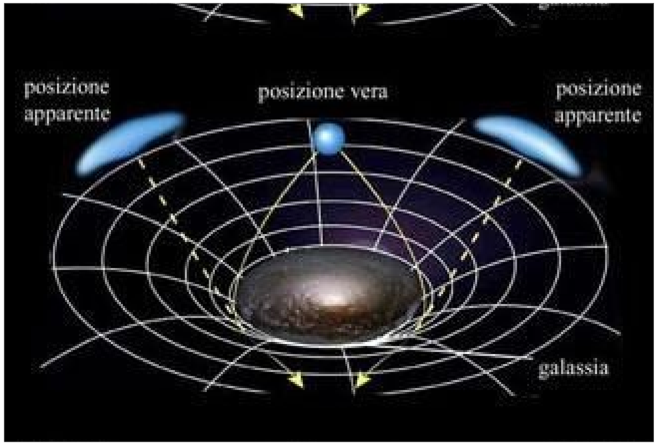
$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{y,y}(x,y)=z''_{y,y}$$

Gauss: curvatura

Geometrie omogenee o a curvatura costante



Misurare la geometria dell'universo



Luce = rette

La geometria moderna

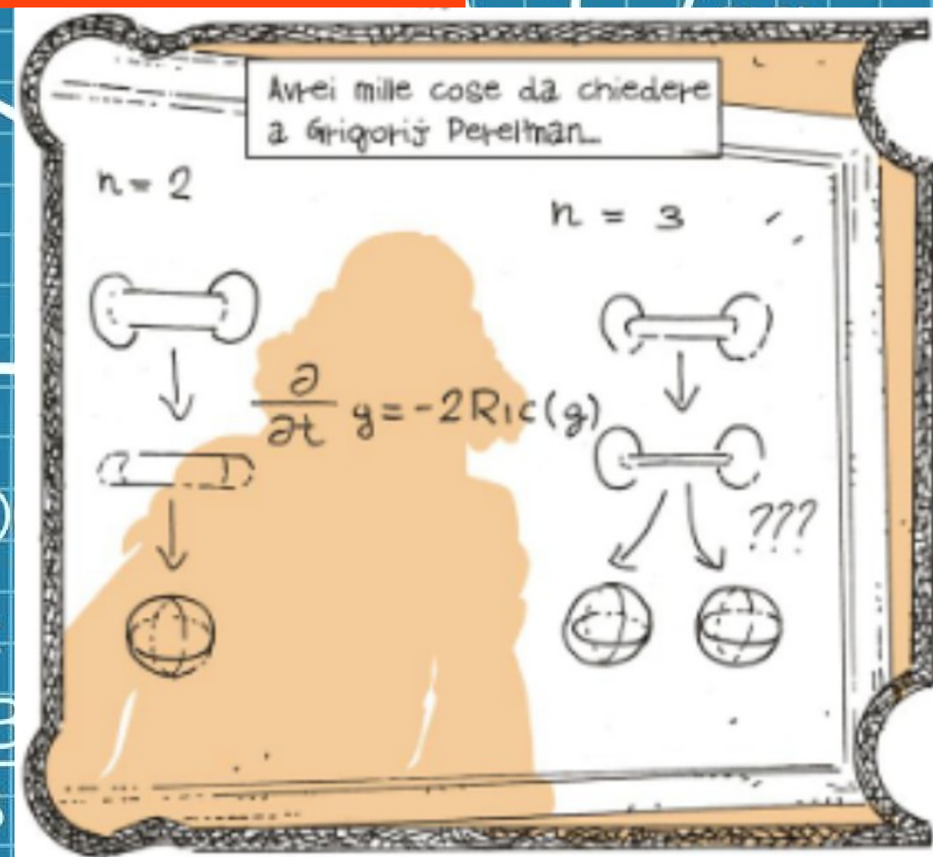
Congettura di Poincaré (1903)

L'unica 3-varietà chiusa semplicemente connessa è la 3-sfera

La geometria moderna

Congettura di Poincaré (1903)

Flusso di Ricci



Archimede 4-2019, gennaio 2020

Grazie!

maddmaths.simai.eu

www2.unipr.it/~saralb74/divulgazione