Perché un pallone da calcio ha 12 pentagoni?

Note Title 27/04/2012

Alberto Saracco

Dip. Matematica - Università di Parma

e-mail: alberto.saracco@unipr.it

home page: www2.unipr.it/~saralb74

Cesenatico, ven 4 maggio 2012

Classificazioni ed invarianti.

Una buona parte del lavoro del matematico (e del geometra in particolare) sta nel classificare oggetti matematici secondo alcune relazioni d'equivalenza.

Ad esempio, si classificano le figure geometriche del piano per

CONGRUENZA (sono equivalenti figure sovrapponibili tramite moti rigidi);

SIMILITUDINE (sono equivalenti figure sovrapponibili tramite moti rigidi e omotetie)

L'importanza delle classificazioni sta nel fatto che - dimostrato un certo teorema per un elemento della classe di equivalenza - esso vale per tutti gli elementi della classe.

Finezza di una classificazione

Alcune classificazioni sono più fini (ovvero permettono di distinguere tra loro più oggetti) di altre.

Ad esempio la congruenza è più fine della similitudine.

Una classificazione più fine permette di dimostrare un maggior numero di teoremi, una meno fine di estenderne maggiormente la validità di un risultato.

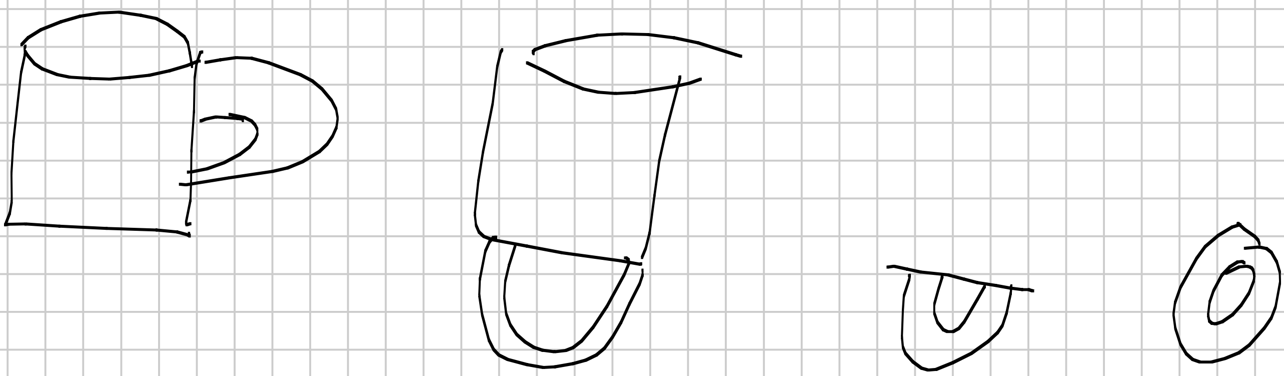
Per distinguere differenti classi di equivalenza, sono utili degli invarianti: numeri o altri oggetti matematici che sono costanti per tutti gli elementi di una stessa classe di equivalenza.

Topologia

La topologia è quella branca della geometria che studia oggetti geometrici a meno di trasformazioni bicontinue.

Intuitivamente due spazi topologici sono equivalenti se si possono deformare l'uno nell'altro, come fossero fatti di gomma molto elastica, ma senza fare tagli o incollamenti.

Es:



La caratteristica di Eulero - Poincaré.

Un importante invariante, che ci permetterà di rispondere alla domanda del titolo è la caratteristica di Eulero-Poincaré, χ.
Si può definire per ogni (componente connessa di uno) spazio topologico, e la sua definizione più generale è molto complicata, avendo a che fare con le dimensioni degli spazi di omologia...
Per fortuna a noi basta definirla per le superfici, cosa fatta da Eulero.

Data una superficie S, esiste un numero intero $\chi(S)$ che dipende solo dalla classe di equivalenza topologica di S, tale che, data una qualsiasi tassellazione di S con tasselli topologicamente equivalenti a un quadrato, si ha $\chi(S) = F - L + V$

dove: F = numero di tasselli
L = numero di lati *
V = numero di vertici

*NB: i lati devono essere topologicamente equivalenti a un segmento.

Nel corso del seminario calcoleremo

(1) $\chi(S^2) = 2$;

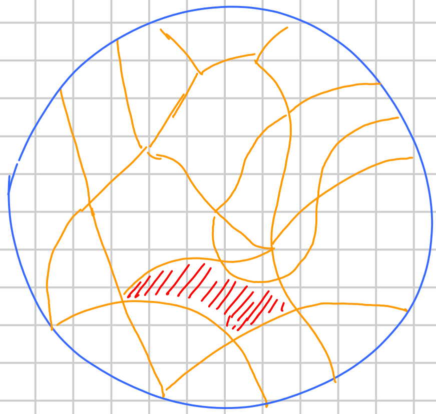
(2) $\chi(\mathbb{R}^2) = 1$.

Inoltre applicheremo la prima di queste formule (per la sfera), per rispondere alla nostra domanda sui palloni da calcio e per dimostrare che i solidi platonici* sono CINQUE.

* Solidi 3-dimensionali. In 2D sono infiniti (i poligoni regolari).
E in più dimensioni? La risposta nel seminario di Andrea Sambusetti!

Dimostrazione della formula di EP. $\chi(S^2) = F - L + V = 2$ (1)

Sia T una qualsiasi tassellazione della sfera:



come prima cosa, rimuoviamo un tassello dalla tassellazione (quello in rosso, ad esempio). La formula (1) è vera se e solo se per la tassellazione con un buco si ha

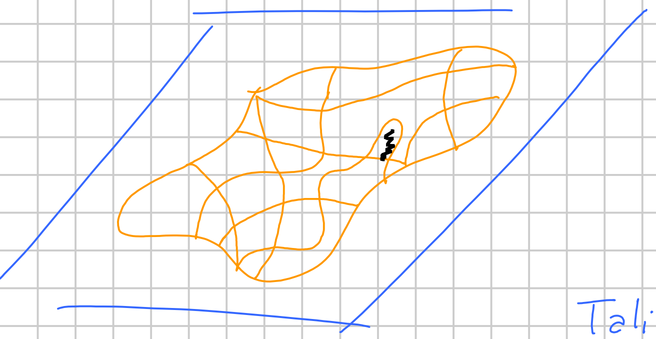
$$F - L + V = 1.$$

Osserviamo che la sfera meno il tassello tolto è topologicamente equivalente a (una porzione di) piano $\mathbb{R}^2$.

Pertanto la nostra dimostrazione sarà conclusa quando proveremo che

$$\chi(\mathbb{R}^2) = 1 \qquad (2)$$

Ora abbiamo quindi una tassellazione di (un pezzo limitato di) $\mathbb{R}^2$:



Ora faremo alcune operazioni sulla tassellazione in modo da modificarla senza cambiare la somma

$$F - L + V.$$

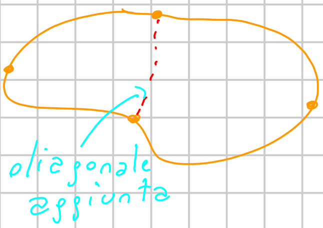
Tali operazioni sono dette triangolazione della tassellazione.

Posso:

1. Aggiungere un vertice al bordo di una faccia. Così facendo aumento di 1 L e di 1 V.

In questo modo mi assicuro che tutte le facce abbiano almeno 3 lati (e 3 vertici).

2. Aggiungo una "diagonale" ad una faccia. Così facendo, aumento di 1 L e di 1 F.



In questo modo tutte le facce diventano "triangoli", ovvero sono bordate da 3 lati e 3 vertici.

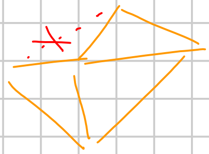
Siamo quindi ridotti ad una tassellazione piana con triangoli.
Con alcune mosse (che non cambino la somma $F - L + V$) ridurremo il numero di triangoli.

Ogni volta toglieremo un triangolo "al bordo" della tassellazione (avendo cura che il resto della tassellazione resti topologicamente equivalente al piano ... non si creano buchi, né si sconnette)

Possiamo togliere un triangolo con

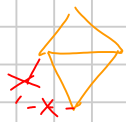
1 lato nel bordo

$(-1\ F,\ -1\ L)$



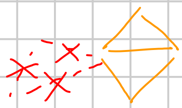
2 lati nel bordo

$(-1F, -2L, -1V)$



3 lati nel bordo

$(-1F, -3L, -2V)$



In ogni caso $F - L + V$ non cambia.
Così facendo, dopo $n-1$ passi, arriviamo ad una "tassellazione" con 1 solo triangolo, per cui è facile calcolare:

$$F - L + V = 1 - 3 + 3 = 1$$

QED

Pertanto abbiamo dimostrato che:

$$\chi(\mathbb{R}^2) = 1$$

$$\chi(S^2) = 2$$

Perché un pallone da calcio ha 12 pentagoni?

La superficie di un pallone da calcio è topologicamente equivalente ad una sfera.

Una tassellazione del pallone da calcio è data dalla sua scomposizione in pentagoni (neri) e esagoni (bianchi).

Cerchiamo di trarre qualche conseguenza dalla caratteristica di Eulero–Poincaré del pallone da calcio (che sappiamo essere 2).

Chiamiamo P il numero dei pentagoni e
E il numero degli esagoni.

Allora:

$$\left.\begin{aligned} F &= P + E \\ L &= \frac{5P+6E}{2} \\ V &= \frac{5P+6E}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow F - L + V = \frac{1}{6}P = 2$$

da cui ...

$$P = 12 \quad !!$$

Quindi... in un pallone da calcio ci sono dodici pentagoni perché "la palla è rotonda".

NB In un pallone da calcio ci sono 20 esagoni, ma non c'è nessun profondo motivo topologico per ciò... gli esagoni non portano curvatura...

Ovviamente la precedente è solo una buffa applicazione della formula di EP.

Ma con lo stesso ragionamento possiamo provare qualcosa di meglio...

DEF Un poliedro si dice regolare (o solido platonico) se:

1) tutte le sue facce sono poligoni regolari congruenti tra di loro;
2) in tutti i vertici concorrono lo stesso numero di facce;
3) tutti gli angoli diedri sono uguali tra loro.

TEO I solidi platonici sono 5 (tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro, icosaedro)

CURIOSITA' Dodecaedro e icosaedro hanno molto a che fare col pallone da calcio di cui abbiamo parlato finora...

DIMOSTRAZIONE Grazie alla proprietà 3 della definizione, un poliedro regolare solido è convesso, quindi è topologicamente equivalente a una palla e il suo bordo (il poliedro regolare) alla sfera S^2.

Possiamo pertanto applicare la formula di EP.

Un solido platonico è determinato da tre numeri:

- n, il numero delle facce;
- $k \geq 3$, il numero dei lati di ogni faccia;
- $h \geq 3$, il numero di facce concorrenti in ogni vertice.

Quindi:

$$F = n \quad ; \quad L = \frac{nk}{2} \quad ; \quad V = \frac{nk}{h}$$

$$F - L + V = n\left(1 - \frac{k}{2} + \frac{k}{h}\right) = 2$$

Ovvero

$$2h - hk + 2k = \frac{4h}{n} \qquad (3)$$

Il termine a sinistra è intero, e quello a destra positivo. Pertanto:

$$2(h+k) > hk \qquad e \qquad n \mid 4h.$$

Se $k=3$ (le facce sono triangoli), otteniamo

$$2(h+3) > 3h \Rightarrow h < 6, \text{ e - applicando } (3)$$

$$k=3, h=3 \Rightarrow n=4 \quad (\text{tetraedro})$$

$k=3,\ h=4 \Rightarrow n=8$ (ottaedro)

$k=3,\ h=5 \Rightarrow n=20$ (icosaedro)

Se $k=4$ (le facce sono quadrati), otteniamo

$$2(h+4) > 4h \Rightarrow 2h < 8,\quad h<4, \text{ e applicando (3)}$$

$k=4,\ h=3 \Rightarrow n=6$ (cubo o esaedro)

Se $k=5$ (le facce sono pentagoni), otteniamo

$$2(h+5) > 5h \Rightarrow 3h < 10,\quad h < 3+\frac{1}{3}, \text{ e applicando (3)}$$

$K=5,\ h=3 \Rightarrow n=12^{*}$ (dodecaedro)

* 12 pentagoni... ricorda qualcosa?

Infine, se $k \geq 6$, otteniamo

$$2(h+k) > kh \Rightarrow (k-2)h < 2k$$

$$h < \frac{2k}{k-2} = \frac{2(k-2)+4}{k-2} = 2+\frac{4}{k-2} \leq 2+\frac{4}{6-2} = 3$$

Pertanto $3 \leq h < 3$, impossibile!

Non vi sono altri poliedri regolari, oltre ai 5 trovati.

QED

curiosità Un pallone da calcio è un icosaedro tronco, ovvero un icosaedro a cui siano stati tagliati i vertici...

Dualità tra solidi platonici

Nella formula di EP, facce e vertici compaiono allo stesso modo.
Si dice che sono in rapporto di dualità.

Data una tassellazione, con $\begin{cases} a & \text{facce} \\ b & \text{lati} \\ c & \text{vertici} \end{cases}$, si può costruire la tassellazione duale, con $\begin{cases} c & \text{facce} \\ b & \text{lati} \\ a & \text{vertici} \end{cases}$ nel seguente modo: si mette un vertice all'interno di ogni vecchia faccia e si uniscono i nuovi vertici con lati che intersecano i vecchi lati.

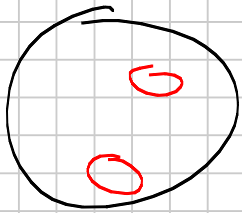
Le dualità tra solidi platonici sono:

cubo $\longleftrightarrow$ ottaedro

dodecaedro $\longleftrightarrow$ icosaedro

tetraedro $\circlearrowleft$

$$\chi(T) = \chi(S^2) - 2 = 0$$



. . .

$$\chi(2T) = \chi(T) - 2 = -2$$

$$\chi(gT) = 2 - 2g$$