TOPOLOGIA

ALBERTO SARACCO

ABSTRACT. Le presenti note saranno il più fedeli possibile a quanto detto a lezione. I testi consigliati sono Jänich [1], Kosniowski [2] e Singer-Thorpe [3]. Un ottimo libro di esempi (e controesempi) di topologia è Steen-Seebach [4].

CONTENTS

1. Definizioni di base	1
1.1. Definizione di spazio topologico	2
1.2. Spazi metrici	3
1.3. Definizioni alternative di spazio topologico	5
1.4. Funzioni continue	6
1.5. Sottospazi, unioni disgiunte e prodotti di spazi topologici	8
1.6. Basi e sottobasi	10
2. Compattezza	11
2.1. Un'utile proprietà	15
2.2. La compattificazione di Alexandrov	16
3. Assiomi di separazione	17
4. Costruzione di funzioni continue su spazi topologici	22
4.1. Il lemma di Urysohn	22
4.2. Lemma di estensione di Tietze	23
4.3. Partizioni dell'unità e paracompattezza	24
5. Proprietà di connessione	27
5.1. Connessione	27
5.2. Connessione per archi	28
5.3. Versioni locali delle proprietà di connessione	30
6. Omotopia	30
7. Il gruppo fondamentale	32
7.1. Cammini	32
7.2. Il gruppo fondamentale	34
8. Rivestimenti	34
9. Il teorema di Seifert-Van Kampen	34
References	34

1. DEFINIZIONI DI BASE

La nozione di spazio topologico è una naturale estensione di $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$ e del concetto di spazio metrico. È utile per dare in tutta generalità la

Date: February 4, 2012.

definizione di funzione continua, di successione convergente, di limite, e per focalizzarsi sulle proprietà di base che rendono veri certi teoremi.

1.1. **Definizione di spazio topologico.**

Definizione 1.1. Uno *spazio topologico* è una coppia $(X, \mathcal{O})$, dove X è un insieme e $\mathcal{O}$ è una famiglia di sottoinsiemi di X (detti *insiemi aperti*, o semplicemente *aperti*) che verificano i seguenti assiomi:

A1 Un'unione qualsiasi di aperti è un aperto;
A2 L'intersezione di due (e quindi di un numero finito) aperti è un aperto;
A3 $\emptyset$ e X sono aperti.

La famiglia $\mathcal{O}$ degli aperti è detta la topologia di X. Quando non ci sarà bisogno di indicare esplicitamente la topologia indicheremo semplicemente con X lo spazio topologico.

Esempio 1.1. Sia X un insieme qualsiasi. La *topologia banale* (o *concreta* o *indiscreta*) su X è la topologia $\mathcal{B} = \{\emptyset, X\}$.
I tre assiomi degli aperti sono banalmente verificati. Questa è la topologia su X con meno aperti.

Esempio 1.2. Sia X un insieme qualsiasi. La *topologia discreta* su X è la topologia $\mathcal{D} = \mathcal{P}(X)$ (insieme delle parti di X; tutti i sottoinsiemi di X sono aperti).
I tre assiomi degli aperti sono banalmente verificati. Questa è la topologia su X con più aperti.

Tranne che nei casi banali in cui X è l'insieme vuoto o un insieme con un solo punto (sui quali esiste una sola topologia), queste due topologie sono diverse.

Esempio 1.3. In $\mathbb{R}$ chiamiamo intervallo aperto un qualsiasi insieme della forma

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \quad a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},\ a < b.$$

Diamo una topologia $\mathcal{E}$ (*topologia standard* o *euclidea*) definendo gli aperti di $\mathbb{R}$ nel seguente modo: $A \subset \mathbb{R}$ è aperto se e soltanto se $\forall x \in A\ \exists (a, b)$ intervallo aperto tale che $x \in (a, b) \subset A$.
Verifichiamo che così facendo si definisce una topologia:

A1 Siano A_i aperti di $\mathbb{R}$. Allora $\forall x \in \cup_i A_i$ si ha che $x \in A_i$ per un qualche i. Pertanto esiste un intervallo aperto (a, b) tale che $x \in (a, b) \subset A_i \subset \cup_i A_i$. Quindi $\cup_i A_i$ è aperto.
A2 Siano A_1 e A_2 aperti di $\mathbb{R}$. Allora $\forall x \in A_1 \cap A_2$, $x \in A_1$ aperto, quindi esiste (a_1, b_1) intervallo aperto tale che $x \in (a_1, b_1) \subset A_1$. Analogamente si ha $x \in (a_2, b_2) \subset A_2$. Definendo $a = \max\{a_1, a_2\}$ e $b = \min\{b_1, b_2\}$ si ha che $(a, b) = (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$. Pertnato $x \in (a, b) \subset A_1 \cap A_2$ e $A_1 \cap A_2$ è aperto.
A3 $\emptyset$ è aperto, dato che la condizione è vera a vuoto; $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ è un intervallo aperto, quindi è aperto.

Esempio 1.4. In $\mathbb{R}^n$ chiamo palla aperta (di raggio r e centro x) un insieme del tipo

$$B_r(x) \;=\; \{y \in \mathbb{R}^n \mid \; \| x - y \| < r\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \; r \in \mathbb{R}^+.$$

Diamo una topologia $\mathcal{E}$ (*topologia standard* o *euclidea*) definendo gli aperti di $\mathbb{R}^n$ nel seguente modo: $A \subset \mathbb{R}^n$ è aperto se e soltanto se $\forall x \in A \; \exists B_r(y)$ palla aperta tale che $x \in B_r(y) \subset A$.

La verifica che si tratti di una topologia (del tutto analoga alla precedente) è lasciata al lettore.

Osserviamo che, siccome $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ come insiemi, la topologia appena definita è anche una topologia per $\mathbb{C}^n$, detta sempre topologia euclidea.

1.2. **Spazi metrici.** I due esempi precedenti, della topologia euclidea di $\mathbb{R}$ e di $\mathbb{R}^n$ sono in realtà un caso particolare della definizione di topologia per unoo spazio metrico.

Definizione 1.2. Uno *spazio metrico* è una coppia (X, d), dove X è un insieme e $d : X \times X \to \mathbb{R}$ è una funzione reale (detta *metrica* o *distanza*) tale che

M1 $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
M2 $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$;
M3 $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$, $\forall x, y, z \in X$ (disuguaglianza triangolare).

La definizione di topologia su uno spazio metrico ricalca perfettamente la definizione della topologia euclidea per $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.3. Sia (X, d) uno spazio metrico. Si può definire una topologia $\mathcal{O}_d$ su X, detta *topologia indotta dalla metrica* nel seguente modo.

Chiamo palla aperta (di raggio r e centro x) un insieme del tipo

$$B_r(x) \;=\; \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \; r \in \mathbb{R}^+.$$

Un sottoinsieme $A \subset X$ si dice aperto se e soltanto se $\forall x \in A \; \exists B_r(y)$ palla aperta tale che $x \in B_r(y) \subset A$.

Nuovamente la dimostrazione che questa è una topologia è lasciata al lettore.

Osserviamo che due metriche differenti (d e d') possono indurre la stessa topologia su X. Questo avviene se e solo se ogni palla aperta nella metrica d è aperta nella topologia indotta da d' (ovvero contiene una palla aperta nella metrica d' e viceversa.

Ovvero $\mathcal{O}_d = \mathcal{O}_{d'}$ se e solo se

$$\forall r > 0, \; \exists s > 0 \quad B_r(x) \subset B'_s(x); \quad B'_r(x) \subset B_s(x), \tag{1}$$

dove le B sono le palle nella metrica d e le B' le palle nella metrica d'.

La topologia euclidea di $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ è quella indotta dalla metrica euclidea d_2:

$$d_2(x, y) \;=\; \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \; y = (y_1, \ldots, y_n) \,.$$

La metrica d_1:

$$d_1(x,y) \; = \; \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad x=(x_1,\ldots,x_n),\; y=(y_1,\ldots,y_n)\,,$$

la metrica d_∞:

$$d_\infty(x,y) \; = \; \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i|, \quad x=(x_1,\ldots,x_n),\; y=(y_1,\ldots,y_n)\,,$$

e più in generale la metrica d_p, $1 \le p < +\infty$:

$$d_p(x,y) \; = \; \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^p}, \quad x=(x_1,\ldots,x_n),\; y=(y_1,\ldots,y_n)$$

inducono sempre la topologia euclidea.

Se $0 < p < 1$, allora d_p non è una metrica perchè non rispetta la disuguaglianza triangolare.

La dimostrazione di queste affermazioni è lasciata per esercizio al lettore.

Bisogna sempre prestare molta attenzione alla relazione tra metrica e topologia. Osserviamo che se (X,d) è uno spazio metrico qualsiasi, allora

$$d'(x,y) \; = \; \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

è una metrica limitata su X che induce la stessa topologia (perché? esercizio per il lettore). Pertanto la limitatezza della metrica non induce nessuna proprietà sulla topologia.

Definizione 1.4. Uno spazio topologico $(X,\mathcal{O})$ si dice *metrizzabile* se esiste una metrica d su X tale che $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$.

Il problema di trovare condizioni necessarie e/o sufficienti affinché uno spazio topologico sia metrizzabile è ovviamente di grande interesse.

Esempio 1.5. Sia $(X,\mathcal{D})$ uno spazio dotato della topologia discreta. Allora X è metrizzabile. Definendo infatti $d(x,y) = 1$ se $x \neq y$ e $d(x,x) = 0$ si ottiene che $\{x\} = B_{\frac{1}{2}}(x)$ è un insieme aperto. Tutti i singoletti sono aperti, quindi (per l'assioma A1) tutti i sottoinsiemi di X sono aperti. Pertanto $\mathcal{O}_d = \mathcal{D}$.

Esempio 1.6. Sia $(X,\mathcal{B})$ uno spazio con almeno due punti dotato della topologia banale. Allora X non è metrizzabile. Siano infatti $x \neq y \in X$ due punti distinti e supponiamo che d sia una metrica su X. Allora $d(x,y) = \delta > 0$ e $B_\delta(x)$ contiene x ma non y. Pertanto la topologia indotta da d ha almeno un aperto non vuoto diverso da tutto lo spazio. Quindi $\mathcal{O}_d \neq \mathcal{B}$.

Osserviamo che se X ha un solo punto $(X,\mathcal{B}) = (X,\mathcal{D})$ e pertanto è metrizzabile. Ovviamente non serve a molto mettere una metrica su uno spazio con un solo punto...

1.3. **Definizioni alternative di spazio topologico.** Definiamo ora alcuni concetti base per gli spazi topologici.

Definizione 1.5. Sia $(X, \mathcal{O})$ uno spazio topologico.

(1) $C \subset X$ si dice *chiuso* se e solo se $X \setminus C$ è aperto;
(2) $U \subset XX$ si dice *intorno* di $x \in X$ se e solo se esiste un aperto V tale che $x \in V \subset U$;
(3) Sia $B \subset X$. $x \in X$ si dice
  (a) *interno* a B se B è un intorno di x;
  (b) *esterno* a B se $X \setminus B$ è un intorno di x;
  (c) *di frontiera* per B altrimenti;
(4) l'insieme dei punti interni di B si indica con $\overset{\circ}{B}$ e si dice l'*interno* di B;
(5) l'insieme dei punti di frontiera per B si indica con bB (o dB o ∂B) e si dice la *frontiera* di B;
(6) l'insieme dei punti non esterni a B si indica con $\overline{B} = \overset{\circ}{B} \cup bB$ e si dice la *chiusura* di B.

Esercizio 1.1. Dimostrare che, per ogni $B \subset X$

(1) B è aperto se e solo se $B = \overset{\circ}{B}$;
(2) $\overset{\circ}{B}$ è aperto;
(3) $\overset{\circ}{B}$ è l'unione di tutti gli aperti contenuti in B;
(4) B è chiuso se e solo se $B = \overline{B}$;
(5) $\overline{B}$ è chiuso;
(6) $\overline{B}$ è l'intersezione di tutti i chiusi contenenti B;
(7) bB è chiuso.

Gli insiemi chiusi, gli intorni e le operazioni di chiusura e di fare l'interno possono essere utilizzati per definire gli aperti. Infatti: A è aperto se e soltanto se $X \setminus A$ è chiuso, se e soltanto se A è intorno di ciascuno dei suoi punti, se e soltanto se $X \setminus B$ coincide con la sua chiusura, se e soltanto se B coincide col suo interno.

Possiamo pertanto dare alcune definizioni alternative di topologia.

Definizione 1.6 (Assiomi per chiusi)**.** Uno spazio topologico è una coppia $(X, \mathcal{C})$, dove X è un insieme e $\mathcal{C}$ è una famiglia di sottoinsiemi di X (i chiusi) che verificano i seguenti assiomi:

C1 Un'intersezione qualsiasi di chiusi è un chiuso;
C2 L'unione di due (e quindi di un numero finito) apertichiusi è un chiuso;
C3 $\emptyset$ e X sono chiusi.

Si dimostra che questa definizione è equivalente a quella data per gli insiemi aperti sfruttando la seguente utilissima dualità, conseguenza delle leggi di Morgan: ad ogni aperto si fa corrispondere il chiuso complementare; ogni unione si trasforma in intersezione; ogni intersezione si trasforma in unione.

Definizione 1.7 (Assiomi per intorni)**.** Uno spazio topologico è una coppia $(X, \mathfrak{U})$, dove X è un insieme e $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U}_x\}_{x \in X}$ è una famiglia di insiemi $\mathfrak{U}_x$ di sottoinsiemi di X (gli *intorni* di x) che verificano i seguenti assiomi:

I1 L'intersezione di due intorni di x è un intorno di x;
I2 Un insieme che contiene un intorno di x è un intonro di x;
I3 Ogni intorno di x contiene un intorno che è intorno di tutti i suoi punti;
I4 Ogni intorno di x contiene x; X è intorno di tutti i suoi punti.

Definizione 1.8 (Assiomi per chiusura)**.** Uno spazio topologico è una coppia $(X,)$, dove X è un insieme e $: X \to X$ è un'applicazione (la *chiusura*) che verifica i seguenti assiomi:

Ch1 $A \subset \overline{A}$;
Ch2 $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
Ch3 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
Ch4 $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

Definizione 1.9 (Assiomi per interno)**.** Uno spazio topologico è una coppia $(X, \circ)$, dove X è un insieme e $\circ$: $X \to X$ è un'applicazione (l'*interno*) che verifica i seguenti assiomi:

In1 $A \supset \overset{\circ}{A}$;
In2 $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$;
In3 $\overset{\circ}{(A \cup B)} = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$;
In4 $\overset{\circ}{X} = X$.

Dimostrare, per esercizio, l'equivalenza di queste definizioni.

È interessante osservare che anche tra le operazioni di chiusura e di interno esiste una sorta di dualità.

In seguito useremo (quasi) sempre la definizione di spazio topologico per aperti, ma lavorare su queste definizioni alternative costituisce un utile esercizio per familiarizzare con i termini.

1.4. **Funzioni continue.**

Definizione 1.10. Una funzione $f : X \to Y$ tra spazi topologici è detta continua se e soltanto se $\forall U$ aperto di Y la controimmagine $f^{-1}(u)$ è un aperto di X.

È bene osservare che questa definizione generalizza quella standard di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua ("$\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta$ implica $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$" e le altre definizioni nel caso x_0 sia $\pm\infty$), nel caso in cui $\mathbb{R}$ sia dotato della topologia euclidea. Perchè? Esercizio per il lettore.

Esempio 1.7. La funzione identica $id_X : (X, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{O})$ è una funzione continua. Infatti la controimmagine di un aperto U è l'aperto U stesso.

Esempio 1.8. La funzione costante $y_0 : X \to Y$ che ad ogni punto di X associa y_0 è continua. Infatti la controimmagine di un aperto qualsiasi U di Y è X (se $y_0 \in U$) o $\emptyset$ (se $y_0 \notin U$).

Esercizio 1.2. Dimostrare che $id_X : (X, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{O}')$ è continua se e solo se $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$.

La relazione di inclusione tra topologie è molto importante, e merita di avere un nome.

Definizione 1.11. Siano $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ due topologie su X. $\mathcal{O}'$ si dice *meno fine* di $\mathcal{O}$ (o equivalentemente $\mathcal{O}$ si dice *più fine* di $\mathcal{O}'$) se $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ (ovvero tutti gli aperti di $\mathcal{O}'$ sono aperti anche di $\mathcal{O}$).

Per ricordarsi la definizione può essere utile pensare a "più fine" come "con più aperti" e a "meno fine" come "con meno aperti".

Ovviamente, se $\mathcal{O}$ è una qualsiasi topologia su X, si ha $\mathcal{B} \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{D}$, ovvero la topologia banale è la topologia meno fine di tutte e la topologia discreta è la topologia più fine di tutte.

Esercizio 1.3. Dimostrare che se $(X, \mathcal{O})$ è tale che ogni funzione $f : X \to Y$ è continua (per ogni spazio topologico Y), allora $\mathcal{O} = \mathcal{D}$, la topologia discreta.

Esercizio 1.4. Dimostrare che se $(Y, \mathcal{O})$ è tale che ogni funzione $f : X \to Y$ è continua (per ogni spazio topologico X), allora $\mathcal{O} = \mathcal{B}$, la topologia banale.

Esercizio 1.5. Dimostrare che $f : (\mathbb{R}, \mathcal{E}) \to (X, \mathcal{D})$ è continua se e soltanto se è costante.

Teorema 1.1. *Una funzione $f : X \to Y$ è continua se e solo se $\forall C \subset Y$ chiuso $f^{-1}(Y)$ è chiuso.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal fatto che C è chiuso se e solo se $U = Y \setminus C$ è aperto e che $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$, per ogni sottoinsieme $A \subset Y$. □

Teorema 1.2. *Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono funzioni continue, allora $g \circ f : X \to Z$ è continua.*

Dimostrazione. Se $U \subset Z$ è aperto, allora $g^{-1}(U) \subset Y$ è aperto e quindi $f^{-1}(g^{-1}(U)) \subset X$ è aperto. Osservando che $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ si conclude che $g \circ f$ è continua. □

Definizione 1.12. Due spazi topologici $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ si dicono *omeomorfi* se esiste una funzione $f : X \to Y$ biiettiva e bicontinua (ovvero continua, con inversa continua). Scriveremo $X \cong Y$ e diremo che f è un omeomorfismo tra X e Y.

Un omeomorfismo è quindi una biiezione tra i punti di X e Y e tra gli aperti di $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$.

Le proprietà invarianti per omeomorfismi (ovvero dipendenti solo dalle nozioni di punto e di aperto) saranno dette proprietà topologiche.

La nozione di omeomorfismo è una relazione d'equivalenza. La topologia si occupa dello studio degli spazi topologici a meno di omeomorfismo.

Esempio 1.9. Sia $X = [0, 1)$ con la topologia indotta dalla metrica che eredita da $\mathbb{R}$ e $Y = \mathbb{S}^1 = \{e^{2\pi t i} \in \mathbb{C} \mid t \in [0, 1)\}$ con la topologia indotta dalla metrica che eredita da $\mathbb{C}$. Allora

$$f : X \to Y, \qquad f(t) = e^{2\pi t i}$$

è una funzione biiettiva e continua. Osserviamo tuttavia che f^{-1} non è continua. Infatti $[0,a) \subset [0,1)$ è aperto (qualunque sia $0 < a < 1$), ma la sua controimmagine $f([0,a))$ non è aperta poiché $f(0) = 1$ non è un punto interno all'arco $f([0,a))$.

Esempio 1.10. Sia X uno spazio con due topologie differenti $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ $id_X : (X,\mathcal{O}) \to (X,\mathcal{O}')$ è biiettiva. Se $\mathcal{O} \supset \mathcal{O}'$ allora è anche continua, ma non ha inversa continua.

Vedremo in seguito un modo molto più semplice per dimostrare che quello dell'esempio sopra non è un omeomorfismo.

Pertanto affinché una funzione f sia un omeomorfismo **non** è sufficiente che sia biiettiva e continua.

1.5. **Sottospazi, unioni disgiunte e prodotti di spazi topologici.** Ora siamo pronti a dare tre metodi per costruire nuovi spazi topologici a partire da altri. Un quarto metodo (spazio quoziente) verrà introdotto in seguito.

Definizione 1.13. Se $(X,\mathcal{O})$ è uno spazio topologico e $Y \subset X$ un sottoinsieme, la topologia
$$\mathcal{O}|_Y \;=\; \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{O}\}$$
si dice *topologia di sottospazio* o *topologia indotta.* Lo spazio topologico $(Y,\mathcal{O}|_Y)$ si dice *sottospazio (topologico)* di $(X,\mathcal{O})$.

Osserviamo che se $Y \subset X$ è aperto, allora gli aperti di Y sono aperti di X. Più in generale, gli aperti di Y sono le restrizioni degli aperti di X ad Y.

Esercizio 1.6. Dimostrare che se $f : (X,\mathcal{O}) \to (Z,\mathcal{O}')$ è continua, allora per ogni sottospazio $(Y,\mathcal{O}|_Y)$ la restrizione $f|_Y : (Y,\mathcal{O}|_Y) \to (Z,\mathcal{O}')$ è continua.

Definizione 1.14. Siano A e B due insiemi. La loro *somma* o *unione disgiunta* è l'insieme
$$X + Y \;=\; X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}.$$
Considereremo sempre $X \subset X + Y$ e $Y \subset X + Y$.

L'unione disgiunta è semplicemente la giustapposizione dei due insiemi. Si distingue dall'unione in tutti i casi in cui gli insiemi non siano a intersezione vuota.

Definizione 1.15. Siano $(X,\mathcal{O}_X)$ e $(Y,\mathcal{O}_Y)$ due spazi topologici. Su $X+Y$ si definisce la topologia $\mathcal{O}_{X+Y}$ data da
$$\mathcal{O}_{X+Y} \;=\; \mathcal{O}_X + \mathcal{O}_Y \;=\{U + V \;|U \in \mathcal{O}_X,\; V \in \mathcal{O}_Y\}\,.$$
$(X + Y,\mathcal{O}_{X+Y})$ si chiama *unione disgiunta topologica* di $(X,\mathcal{O}_X)$ e $(Y,\mathcal{O}_Y)$.

Esercizio 1.7. Dimostrare che $\mathcal{O}_{X+Y}$ è effettivamente una topologia.

Proposizione 1.3. *$f : X + Y \to Z$ è continua se e solo se $f|_X$ e $f|_Y$ sono entrambe continue.*

Inoltre questa proprietà caratterizza la topologia $\mathcal{O}_{X+Y}$.

Dimostrazione. Sia $W \subset Z$ un aperto. Allora $f^{-1}(W) = (f|_X)^{-1}(W) + (f|_Y)^{-1}(W)$ è aperto se e solo se $(f|_X)^{-1}(W)$ e $(f|_Y)^{-1}(W)$ sono entrambi aperti.

Vediamo ora che tale proprietà caratterizza la topologia dell'unione disgiunta. Sia $\mathcal{O}$ una qualsiasi topologia su $X + Y$ tale che valga la proprietà in questione.

Consideriamo la funzione $id_{X+Y} : (X + Y, \mathcal{O}) \to (X + Y, \mathcal{O})$. Questa è continua. Pertanto $id_{X+Y}|_X$ e $id_{X+Y}|_Y$ sono continue.

Siano ora $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ due topologie per cui vale la proprietà.

Consideriamo la funzione $id_{X+Y} : (X+Y, \mathcal{O}_1) \to (X+Y, \mathcal{O}_2)$. Le funzioni $id_{X+Y}|_X$ e $id_{X+Y}|_Y$ sono continue per quanto appena visto. Pertanto id_{X+Y} è continua, e quindi $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$.

Invertendo i ruoli delle due topologie si prova l'inclusione inversa, e quindi $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$. Pertanto l'unica topologia con tale proprietà è la topologia dell'unione disgiunta. □

Definizione 1.16. Siano $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ due spazi topologici. Sul prodotto cartesiano $X \times Y$ si definisce la *topologia prodotto* $\mathcal{O}_{X\times Y}$ in questo modo. Un sottoinsieme $A \subset X \times Y$ è aperto se e soltanto se $\forall p \in X \times Y$ $\exists U$ aperto in X, $\exists V$ aperto in Y tali che $p \in U \times V \subset A$.

Esercizio 1.8. Dimostrare che quella appena definita è una topologia.

I sottoinsiemi aperti della forma $U \times V$, con U aperto in X e V aperto in Y, si dicono rettangoli aperti. Dato che l'unione di rettangoli aperti non è necessariamente un rettangolo aperto questi non sono i soli insiemi aperti.

Proposizione 1.4. *Sia $\mathcal{O}$ una topologia su $X \times Y$. Sono equivalenti:*

(1) $f = (f_1, f_2) : Z \to (X \times Y, \mathcal{O})$ *è continua se e solo se* $f_1 : Z \to X$ *e* $f_2 : Z \to Y$ *sono entrambe continue;*
(2) $\mathcal{O}$ *è la topologia meno fine per cui le proiezioni* $\pi_X : (X\times Y, \mathcal{O}) \to X$ *e* $\pi_Y : (X \times Y, \mathcal{O}) \to Y$ *sono continue;*
(3) $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X\times Y}$

Osservazione 1.5. *Pertanto le proprietà (1) o (2) possono essere prese come definizioni alternative di topologia prodotto.*

Dimostrazione. (3) $\Rightarrow$ (1): osserviamo innanzitutto che poiché l'unione di aperti è aperta, e poiché gli aperti di $X\times Y$ sono unione di rettangoli aperti, dire che una funzione a valori in $X \times Y$ è continua è equivalente a dire che le controimmagini dei rettangoli aperti sono aperte.

Supponiamo che f sia continua. Dato che $f_1^{-1}(U) = f^{-1}(U \times Y)$, allora f_1 è continua. Analogamente per f_2.

Viceversa se f_1 e f_2 sono continue, basta osservare che $f^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U \times Y) \cap f^{-1}(X \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V)$ per concludere che f è continua.

(1) $\Rightarrow$ (2): $id_{X\times Y} = (\pi_X, \pi_Y) : (X \times Y, \mathcal{O}_{X\times Y}) \to (X \times Y, \mathcal{O}_{X\times Y})$ è continua. Quindi sono continue le proiezioni π_X e π_Y.

Inoltre, sia $\mathcal{O}'$ la topologia meno fine che rende continue le proiezioni. Allora

$$id_X : (X \times Y, \mathcal{O}') \to (X \times Y, \mathcal{O})$$

è continua. Ma ciò implica che $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$. Poichè abbiamo dimostrato che $\mathcal{O}$ rende continue le proiezioni $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$.

(2) $\Rightarrow$ (3): basta osservare che gli insiemi $\pi_X^{-1}(U)$ ($U \subset X$ aperto) e $\pi_Y^{-1}(V)$ ($V \subset Y$ aperto) sono aperti di $\mathcal{O}$. Inoltre $U \times V = \pi_X^{-1}(U) \cap \pi_Y^{-1}(V)$ è aperto per $\mathcal{O}$. Quindi $\mathcal{O} \supset \mathcal{O}_{X\times Y}$. Ma per quanto già dimostrato, le proiezioni sono continue per la topologia $\mathcal{O}_{X\times Y}$. Pertanto $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X\times Y}$. □

Esercizio 1.9. Dimostrare che la topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$ (e quindi di $\mathbb{R}^n$) è la topologia prodotto che si ottiene da $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$.

1.6. **Basi e sottobasi.** Nel dare alcune topologie, quella euclidea di $\mathbb{R}$, quella euclidea di $\mathbb{R}^n$ e quella della topologia prodotto abbiamo usato uno stesso metodo. Prima abbiamo definito una classe $\mathfrak{B}$ di particolari insiemi aperti e poi abbiamo detto: un insieme A è aperto se e solo se per ogni punto $a \in A$ esiste $B \in \mathfrak{B}$ tale che $a \in B \subset A$. Ovvero gli insiemi aperti sono le unioni[1] degli insiemi di $\mathfrak{B}$. Questo permette rapidamente di dimostrare che valgono gli assiomi di topologia, posto che

$$\bigcup_{B\in\mathfrak{B}} B = X; \tag{2}$$

e che

$$\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B} \qquad B_1 \cap B_2 \in \mathfrak{B} \cup \{\emptyset\}\,. \tag{3}$$

Esercizio 1.10. Dimostrare dalle condizioni (2) e (3) gli assiomi di topologia.

Definizione 1.17. Sia X uno spazio topologico. Un insieme $\mathfrak{B}$ di insiemi aperti si dice *base* per la topologia se ogni aperto è unione di elementi di $\mathfrak{B}$.

Proposizione 1.6. *Sia X un insieme, e $\mathfrak{B}$ una famiglia di sottoinsiemi di X che verifica (2) e (3). Allora $\mathfrak{B}$ è una base per una topologia su X.*

Dimostrazione. Segue da quanto osservato prima della definizione di base. Per quale topologia? Lasciamo la risposta al lettore. □

Abbiamo trovato così un metodo per fornire una topologia facendo solo poche verifiche. Ma possiamo fare di meglio.

Definizione 1.18. Sia $(X, \mathcal{O})$ uno spazio topologico. Una famiglia $\mathfrak{S} \subset \mathcal{O}$ di insiemi aperti si dice *sottobase* per la topologia se ogni aperto è unione di intersezioni finite[2] di insiemi in $\mathfrak{S}$.

Ovvero $\mathfrak{S}$ è una sottobase se e solo se le intersezioni finite dei suoi elementi sono una base per la topologia.

[1] Consideriamo anche la possibilità di fare un'unione vuota, ponendo

$$\bigcup_{B\in\emptyset} B = \emptyset\,.$$

[2] Analogamente a prima considereremo anche le intersezioni di una famiglia vuota di insiemi:

$$\bigcap_{S\in\emptyset} S = X\,.$$

Proposizione 1.7. *Data una qualsiasi famiglia $\mathfrak{S}$ di insiemi di X questa è una sottobase per una topologia di X, indicata con $\mathcal{O}(\mathfrak{S})$.*

Dimostrazione. Definiamo $\mathcal{O}(\mathfrak{S})$ come tutte le unioni di intersezioni finite di elementi di $\mathfrak{S}$. Verifichiamo gli assiomi di topologia.

(A1) Siano O_α aperti in $\mathcal{O}(\mathfrak{S})$. Allora sono tutti unione di intersezioni finite di elementi di $\mathfrak{S}$. Pertanto la loro unione è anch'essa unione di intersezioni finite di elementi di $\mathfrak{S}$, ovvero un aperto.

(A2) Siano $O_1, O_2 \in \mathcal{O}(\mathfrak{S})$. Allora

$$O_i \;=\; \bigcup_{\alpha_i \in A_i} \left(\bigcap_{j=1}^{n(\alpha_i)} S_{j,\alpha_i} \right), \quad i = 1, 2.$$

Usando le leggi di De Morgan segue che

$$O_1 \cap O_2 \;=\; \bigcup_{\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2} \left(\bigcap_{j=1}^{n(\alpha_1)} S_{j,\alpha_1} \cap \bigcap_{k=1}^{n(\alpha_2)} S_{k,\alpha_2} \right),$$

ovvero anche $O_1 \cap O_2$ è unione di intersezioni finite di elementi di $\mathfrak{S}$, ovvero un aperto.

(A3) L'insieme vuoto e X sono aperti, dato che

$$\emptyset = \bigcup_{S \in \emptyset} S, \quad X = \bigcap_{S \in \emptyset} S\,.$$

□

Osservazione 1.8. *La topologia $\mathcal{O}(\mathfrak{S})$ appena definita è la topologia meno fine per cui gli elementi di $\mathfrak{S}$ sono aperti.*

2. Compattezza

Definizione 2.1. Sia X uno spazio topologico e $S \subset X$ un sottoinsieme. Un *ricoprimento* di S è una famiglia di sottoinsiemi $\{U_j\}_{j \in J}$ di X tali che

$$\bigcup_{j \in J} U_j \;\supset S\,.$$

Un ricoprimento viene detto

- *aperto* se tutti gli insiemi U_j sono aperti di X;
- *finito* se $|J| < +\infty$.

Non è richiesto nella definizione di ricoprimento di S che l'unione di tutti gli insiemi sia esattamente S. L'unione può essere un soprainsieme proprio. Questo per far sì che possano esistere ricoprimenti aperti anche di insiemi che aperti non sono.

Esempio 2.1. La famiglia $U_n = (1/n, 1)$, $n \in \mathbb{N}$, è un ricoprimento aperto di $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ (con la topologia euclidea), così come la famiglia $V_n = (1/n, 2)$.

Esempio 2.2. La famiglia $\{(0, 2), (1, 3), (2, 4)\}$ è un ricoprimento aperto finito di $[1, 3] \subset \mathbb{R}$ con la topologia euclidea.

Esempio 2.3. La famiglia $U_n = (-n, n)$, $n \in \mathbb{N}$, è un ricoprimento aperto di $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$.

Esempio 2.4. La famiglia $\{(-\infty, 0), [0, +\infty)\}$ è un ricoprimento finito di $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$.

Esempio 2.5. Sia Y un sottoinsieme non vuoto dello spazio topologico $(X, \mathcal{B})$. Allora $\{X\}$ e $\{X, \emptyset\}$ sono gli unici ricoprimenti aperti di Y.

Definizione 2.2. Siano $\{U_j\}_{j\in J}$ e $\{V_k\}_{k\in K}$ due ricoprimenti di $S \subset X$. Diciamo che $\{U_j\}_{j\in J}$ è un sottoricoprimento di $\{V_k\}_{k\in K}$ se $\forall j \in J\ \exists k \in K$ tale che $U_j = V_k$.

Esempio 2.6. La famiglia $V_{(n,m)} = (-n, m)$, $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, è un ricoprimento aperto di $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$, e $U_n = (-n, n)$, $n \in \mathbb{N}$, è un suo sottoricoprimento.

Definizione 2.3. Sia X uno spazio topologico. $S \subset X$ si dice *compatto* se ogni ricoprimento aperto di S ammette un sottoricoprimento finito.

Teorema 2.1. *$S \subset (X, \mathcal{O})$ è compatto se e solo se $S \subset (S, \mathcal{O}|_S)$ è compatto.*

Dimostrazione. La dimostrazione, basata sul fatto che gli aperti di $\mathcal{O}|_S$ sono della forma $U \cap S$, con $U \in \mathcal{O}$, è lasciata per esercizio al lettore. □

Definizione 2.4. Una famiglia qualsiasi $\mathcal{F} = \{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ di insiemi ha la *proprietà dell'intersezione finita* (o *p.i.f.*) se

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \ : \ \bigcap_{i=1}^{n} S_{\lambda_i} = \emptyset \,.$$

Proposizione 2.2. *Uno spazio topologico X è compatto se e solo se ogni famiglia di chiusi di X ha la proprietà dell'intersezione finita.*

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$ Supponiamo che X sia compatto e sia $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di chiusi di X. Se

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda = \emptyset \,,$$

(se coì non è, l'implicazione è vera poichè l'ipotesi è falsa) allora, definendo $A_\lambda = X \setminus C_\lambda$, gli A_λ sono aperti tali che

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = X \,,$$

ma poichè X è compatto, esistono un numero finito di indici $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i} = X \,,$$

e di conseguenza

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_{\lambda_i} = \emptyset \,,$$

ovvero $\mathcal{C}$ ha la p.i.f.

$(\Leftarrow)$ La dimostrazione del viceversa è del tutto analoga. I dettagli vengono lasciati al lettore. □

Corollario 2.3. *Sia X uno spazio compatto e $\mathcal{C} = \{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di chiusi non vuoti di X tali che $C_{n+1} \subset C_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset .$$

Dimostrazione. Ogni sottofamiglia finita di tali chiusi ha evdentemente intersezione non vuota. Siccome X è compatto, $\mathcal{C}$ ha la p.i.f. e ciò implica la tesi. □

Teorema 2.4. *Sia X uno spazio compatto, e $C \subset X$ un suo chiuso. Allora C è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{C}$ una famiglia di chiusi di C. Siccome C è chiuso, $\mathcal{C}$ è una famiglia di chiusi di X, e pertanto ha la p.i.f. □

Vedremo in seguito che con una piccola ipotesi su X tutti i compatti sono necessariamente chiusi. Questo non è vero in generale, come mostra il seguente banale esempio.

Esempio 2.7. Sia X un qualsiasi insieme con la topologia banale. Siccome gli aperti di X sono in numero finito, allora X e tutti i suoi sottoinsiemi sono compatti.

Esempio 2.8. $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea non è compatto in quanto il ricoprimento aperto $U_n = (-n, n)$, $n \in \mathbb{N}$, non ammette alcun sottoricoprimento finito. Infatti $U_n \subset U_m$ se $m \geq n$, e se per assurdo esistesse un sottoricoprimento finito $\{V_k\}_{k=1,\dots,l}$ di $\{U_n\}$ allora esisterebbe un $V_{\overline{k}} = U_{\overline{n}}$ che contiene tutti gli altri e quindi $\{U_{\overline{n}}$ è esso stesso un sottoricoprimento. Ma siccome $U_n \subsetneq \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ non può essere ricoperta dal solo $U_{\overline{n}}$. Assurdo.

Esempio 2.9. Sia X un insieme con $|X| < +\infty$ allora $|\mathcal{P}(X)| < +\infty$ e quindi, qualunque sia la topologia $\mathcal{O}$ su X, $|\mathcal{O}| < |\mathcal{P}(X)| < +\infty$, e X è compatto.

Esercizio 2.1. Dimostrare per ognuno degli esempi precedenti la compattezza o non compattezza dell'esempio usando la p.i.f.

Proposizione 2.5. *Sia X un insieme qualsiasi. $(X, \mathcal{D})$ è compatto se e solo se $|X| < +\infty$.*

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) per quanto osservato nell'essempio 2.9.

($\Rightarrow$) $\{x\}_{x\in X}$ è un ricoprimento aperto di X, che ovviamente non ammette sottoricoprimenti non banali. Siccome X è compatto, lui stesso è finito, ovvero $|X| < +\infty$. □

Teorema 2.6. *L'intervallo chiuso $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ (con la topologia euclidea) è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\{U_j\}_{j\in J}$ un ricoprimento aperto di $[0, 1]$. Supponiamo per assurdo che non esista un sottoricoprimento finito di $\{U_j\}$. Allora almeno uno dei due intervalli $[0, 1/2]$ e $[1/2, 1]$ non potrà essere ricoperto con un numero di finito di U_j. Chiamiamo tale intervallo $[a_1, b_1]$ (notiamo che $b_1 - a_1 = 1/2$).

Induttivamente, se abbiamo trovato che l'intervallo $[a_n, b_n]$ (per cui $b_n - a_n = 1/2^n$) non può essere ricoperto con un numero finito di U_j, lo stesso avviene per almeno uno dei due intervalli

$$\left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}\right], \qquad \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n\right].$$

Chiamiamo tale intervallo $[a_{n+1}, b_{n+1}$ e osserviamo che $b_{n+1} - a_{n+1} = 1/2^{n+1}$.

Abbiamo quindi trovato una successione di intervalli chiusi $\{I_n = [a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

(1) nessun I_n può essere risoperto da un numero finito di U_j;
(2) $I_{n+1} \subset I_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero $0 \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq 1$;
(3) $b_n - a_n = 1/2^n$.

La condizione (2) fa sì che l'insieme $\{a_n\}$ e l'insieme $\{b_n\}$ ammettano rispettivamente un limite superiore a (poiché a_n è crescente e limitata dall'alto da 1) e un limite inferiore b (poiché b_n è decrescente e limitata dal basso da 0).

La condizione (3) fa sì che $a = b \in [0, 1]$.

Poiché $\{U_j\}_{j\in J}$ è un ricoprimento di $[0, 1]$ esiste un $U_{\bar{\jmath}}$ della famiglia tale che $a \in U_{\bar{\jmath}}$. Poichè $U_{\bar{\jmath}}$ è un aperto, conterrà un intervallo aperto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ per un qualche $\varepsilon > 0$. Fissato $N \in \mathbb{N}$ tale che $1/2^N < \varepsilon$ si ha che $a - \varepsilon < a_N < b_N < a + \varepsilon$, e quindi $I_N \subset U_{\bar{\jmath}}$. Ma questo contraddice la (1). Assurdo. □

Teorema 2.7. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua tra spazi topologici. Se $S \subset X$ è compatto, allora $f(S)$ è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un ricoprimento aperto di $f(S)$. Allora la famiglia $\{f^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ è un ricoprimento aperto di S. Poichè S è compatto, esistono un numero finito di indici $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ tali che un sottoricoprimento finito di S sia $\{f^{-1}(U_{\lambda_1}, \ldots, f^{-1}(U_{\lambda_n})\}$. Pertanto $\{U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n}\}$ è un sottoricoprimento finito di $f(S)$. Ciò prova che $f(S)$ è compatto. □

Otteniamo quindi, come corollari di immediata dimostrazione:

Corollario 2.8. *Ogni intervallo chiuso $[a, b]$ di $\mathbb{R}$ è compatto.*

Corollario 2.9. *Ogni sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ è compatto.*

Corollario 2.10. *Siano X e Y due spazi topologici omeomorfi. X è compatto se e solo se Y è compatto (ovvero la compattezza è una proprietà topologica).*

Teorema 2.11. *Siano X e Y spazi topologici. Allora X e Y sono entrambi compatti se e solo se $X + Y$ è compatto, se e solo se $X \times Y$ è compatto.*

Dimostrazione. $X + Y$ compatto $\Rightarrow$ X e Y compatti. X e Y sono chiusi di $X + Y$. Pertanto per il teorema 2.4 sono compatti.

X, Y compatti $\Rightarrow$ $X + Y$ compatto. Sia $\mathcal{F}$ un ricoprimento di $X + Y$. Allora è un ricoprimento di X e un ricoprimento di Y. Esistono pertanto due sottofamiglie finite che ricoprono rispettivamente X e Y. La loro unione è una sottofamiglia finita che ricopre $X + Y$.

$X \times Y$ compatto $\Rightarrow$ X e Y compatti. Le proiezioni $\pi_X : X \times Y \to X$ e $\pi_Y : X \times Y \to Y$ sono continue. Pertanto per il teorema 2.7 X e Y sono compatti.

X e Y compatti $\Rightarrow$ $X \times Y$ compatto. Sia $\mathcal{W}$ un ricoprimento aperto di $X \times Y$. Siccome per ogni punto di $X \times Y$ esiste un rettangolo aperto $U \times V$ contenuto in uno degli aperti di $\mathcal{W}$ tale che $x \in U \times V$, basta dimostrare che dai ricoprimenti di $X\times$ fatti di rettangoli aperti si può estrarre un sottoricoprimento finito per dimostrarlo anche per un ricoprimento qualsiasi.

Possiamo pertanto supporre che gli elementi di $\mathcal{W}$ siano tutti rettangoli aperti: $\mathcal{W} = \{V_\lambda \times U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Sia $x \in X$ fissato. La famiglia

$$\mathcal{V}_x = \{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda,\ x \in U_\lambda\}$$

è un ricoprimento aperto di Y. Quindi esiste un numero finito di tali aperti, diciamo $V_{1,x}, \ldots, V_{n(x),x}$ che ricopre Y. Pertanto gli aperti $U_{j,x} \times V_{j,x}$, al variare di $j = 1, \ldots, n(x)$, ricoprono $\{x\} \times Y$.

Se poniamo

$$U_x \ = \ \bigcap_{j=1}^{n(x)} U_{j,x}\,,$$

si ottiene che gli aperti $U_x \times V_{j,x} \subset U_{j,x} \times V_{j,x}$, al variare di $j = 1, \ldots, n$, ricoprono ancora $\{x\} \times Y$.

Ovviamente gli aperti U_x ricoprono X, e poiché X è compatto, ne esistono un numero finito $U_{x_1}, \ldots, U_{x_k}$ che ricoprono X. Ma allora $X \times Y$ è ricoperto da $U_{x_i} \times V_{j,x_i}$ al variare di $i = 1, \ldots, k$ e $j = 1, \ldots, n(x_i)$, e quindi a maggior ragione dagli aperti $U_{j,x_i} \times V_{j,x_i} \in \mathcal{W}$ al variare di $i = 1, \ldots, k$ e $j = 1, \ldots, n(x_i)$, che sono in numero finito. Pertanto $X \times Y$ è compatto. $\square$

Segue immediatamente un corollario.

Corollario 2.12 (Teorema di Heine-Borel). *Un sottoinsieme $C \subset \mathbb{R}^n$ (con la topologia euclidea) chiuso e limitato è compatto.*

In realtà vale il se e solo se. Lo vedremo dopo.

2.1. **Un'utile proprietà.**

Definizione 2.5. Uno spazio topologico X si dice *di Hausdorff* (o *Hausdorff*, o T_2) se dati due punti distinti $x, y \in X$ esistono due aperti U, V di X disgiunti ($U \cap V = \emptyset$) tali che $x \in U$, $y \in V$.

Osserviamo subito che uno spazio metrico è T_2. Infatti se $x \neq y$, $d(x, y) = d \neq 0$ e le palle aperte di centri x e y di raggio $d/2$ soddisfano le proprietà richieste grazie alla disuguaglianza triangolare.

Teorema 2.13. *Sia X uno spazio T_2, e $K \subset X$ un compatto. Allora K è chiuso.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $X \setminus K$ è aperto. Sia $x \in X \setminus K$ e $p \in K$. Siccome X è T_2, esistono due aperti U_p e V_p disgiunti tali che $x \in U_p$, $p \in V_p$. Pertanto la famiglia di aperti V_p è un ricoprimento di K al variere di $p \in K$. Ma K è compatto, ed esiste quindi un sottoricoprimento finito $V_{p_1}, \ldots, V_{p_n}$. Allora

$$\bigcap_{j=1}^{n} U_{p_j} = U_x$$

è un aperto che contiene x e non interseca K. Pertanto $X \setminus K$ è aperto. □

Attenzione: alcuni autori definiscono *quasi compatti* gli spazi che noi abbiamo chiamato compatti, e definiscono compatto come *quasi compatto di Hausdorff*. In questo modo i compatti sono sempre chiusi.

Purtroppo in topologia è molto comune che non ci sia accordo sul significato esatto di un certo termine. In ogni occasione cercate di chiarire qual è la definizione usata.

Corollario 2.14. *I compatti di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli i chiusi limitati.*

Dimostrazione. Un chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$ è contenuto nel prodotto di n intervalli chiusi (che è compatto). Quindi è un chiuso in un compatto e pertanto compatto.

Un compatto di $\mathbb{R}^n$ è chiuso per il teorema appena dimostrato.

Un compatto di $\mathbb{R}^n$ è limitato perchè se non lo fosse le palle di centro l'origine e raggio n, $B_n(0)$, costituirebbero un suo ricoprimento aperto che non ammette sottoricoprimenti finiti. □

Corollario 2.15. *Sia K un compatto. Una funzione $f : K \to \mathbb{R}$ continua ammette massimo e minimo.*

Dimostrazione. L'immagine di K è un compatto di $\mathbb{R}$, ovvero un chiuso limitato. Poiché è limitata $\sup_K f$ e $\inf_K f$ sono limitati, poiché è chiusa sono valori assunti da f. □

Teorema 2.16. *Una biiezione continua $f : X \to Y$ da uno spazio X compatto a uno spazio Y di Hausdorff è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $f^{-1} : Y \to X$ è continua o –equivalentemente– che le immagini degli aperti di X sono aperti di Y o –ancora– che le immagini dei chiusi di X sono chiusi di Y.

Sia $C \subset X$ un chiuso. Allora è un compatto (teorema 2.4), e la sua immagine $f(C) \subset Y$ è un compatto (teorema 2.7) in uno spazio T_2, quindi è un chiuso (teorema 2.13). □

2.2. **La compattificazione di Alexandrov.** Dato uno spazio topologico non compatto X, sono di grande interesse le sue compattificazioni, ovvero gli spazi topologici Y compatti tali che X è omeomorfo ad un sottospazio denso di Y. Ne esistono di vari tipi. Vediamo qui la compattificazione più piccola possibile, ovvero quella che si ottiene aggiungendo un solo punto (detto punto improprio, o all'infinito) ad X.

Teorema 2.17. *Sia $(X, \mathcal{O})$ uno spazio topologico non compatto. Esiste uno spazio topologico compatto $(\hat{X}, \hat{\mathcal{O}})$ tale che X è omeomorfo a $\hat{X}$ meno un punto. Tale spazio si dice* ***compattificazione di Alexandov*** *di X.*

Dimostrazione. Definiamo $\hat{X} = X + \{\infty\}$. Per definire la topologia di $\hat{X}$, consideriamo come base

$$\hat{\mathcal{B}} \;=\; \mathcal{O}\; \cup \{A \cup \{\infty\} \mid X \setminus A \textit{ chiuso e compatto di } X\}\,.$$

Questa è una base, poichè $\hat{X} = X + \{\infty\} \in \hat{\mathcal{B}}$ e l'intersezione di due aperti di $\hat{\mathcal{B}}$ è o un aperto di X o il complementare di un chiuso compatto di X (e pertanto è in $\hat{\mathcal{B}}$.

Inoltre la restrizione della base a X è $\mathcal{O}$. Pertanto la topologia $\mathcal{O}$ è la restrizione della topologia $\hat{\mathcal{O}}$.

Resta da dimostrare che $\hat{X}$ è compatto. Sia $\mathfrak{U}$ un ricoprimento aperto di $\hat{X}$. Un aperto di $\mathfrak{U}$, diciamo U_0, è un intorno di ∞, pertanto contiene un aperto di base della forma $\hat{X} \setminus K$, con K compatto (chiuso) di X. Estraiamo un sottoricoprimento finito di K, $U_1, \ldots, U_n$. Allora $U_0, U_1, \ldots, U_n$ ricopre $\hat{X}$. □

Osservazione 2.18. *Se X è di Hausdorff gli intorni di ∞ sono semplicemente i complementari dei compatti di X (dato che sono chiusi).*

Esercizio 2.2. Dimostrare che la compattificazione di Alexandrov di $\mathbb{R}^n$ è (omeomorfa a) $\mathbb{S}^n$.

3. Assiomi di separazione

L'assioma di Hausdorff fa parte di una vasta famiglia di assiomi, detti di separazione, che hanno tutti la seguente struttura: *Se due oggetti topologici di X sono separati in questo senso debole, allora sono separati anche in quest'altro senso più forte.*

Gli assiomi di separazione prendono questo nome dal fatto che storicamente alcuni matematici includevano alcuni di essi nella definizione di cos'è uno spazio topologico. Ad esempio Hausdorff, nella sua definizione di spazio topologico, richiedeva che fosse soddisfatto l'assioma T_2. Ora si preferisce dare una definizione più generale di spazio topologico e poi avere spazi che verificano o meno certe proprietà di separazione.

Noi ci limiteremo a trattare alcuni degli assiomi di separazione.

Definizione 3.1. Uno spazio topologico X viene detto[3]:

- $\mathbf{T_0}$ se per ogni coppia di punti distinti di X esiste un aperto che contine uno di essi, ma non l'altro.
- $\mathbf{T_1}$ se per ogni coppia x_1, x_2 di punti distinti di X esistono due aperti U_1 e U_2 tali che $x_i \in U_i$, $x_j \notin U_i$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$.
- $\mathbf{T_2}$ se per ogni coppia x_1, x_2 di punti distinti di X esistono due aperti U_1 e U_2 disgiunti tali che $x_i \in U_i$, $i = 1, 2$.
- **regolare** se per ogni chiuso $F \subset X$ e ogni punto $x \in X \setminus F$ esistono due aperti U_F e U_x disgiunti tali che $F \subset U_F$, $x \in U_x$.

[3]Purtroppo questa nomenclatura non è universalmente accettata: alcuni autori (ad esempio [4]) invertono le definizioni di T_3 e regolare, e quella di T_4 e normale. Altri (ad esempio [3]) considerano T_3 e regolare sinonimi (di ciò che noi chiamiamo T_3) e così anche T_4 e normale. Occorre sempre prestare molta attenzione a cosa intende l'interlocutore quando usa uno di questi termini.

I termini T_0, T_1, T_2 sono universali (e a volte tali spazi vengono chiamati rispettivamente Kolmogorov, Fréchet e Hausdorff).

T$_3$ se è regolare e T_1.
normale se per ogni coppia di chiusi F_1, F_2 disgiunti di X esistono due aperti disgiunti U_1 e U_2 tali che $F_i \subset U_i$, $i = 1, 2$.
T$_4$ se è normale e T_1.

Esercizio 3.1. Dimostrare che le definizioni date sono topologiche (ovvero dati due spazi omeomorfi o soddisfano entrambi una delle condizioni o nessuno dei due la soddisfa).

Teorema 3.1. *Uno spazio X è T_0 se e solo se i suoi punti hanno famiglie di intorni distinte (i punti sono topologicamente distinguibili).*

Dimostrazione. Siano x_1 e x_2 due punti distinti di X.

Supponiamo che X sia T_0. Allora esiste un aperto U che è intorno di uno dei due ma non dell'altro. Pertanto i punti sono topologicamente distinguibili.

Viceversa, supponiamo che i punti di X siano topologicamente distinguibili. Allora esiste un intorno I di uno dei due (diciamo x_0) che non è intorno dell'altro. Per definizione di intorno, esiste un aperto $A \subset I$ intorno di x_0 che non contiene x_1. $\square$

Teorema 3.2. *Uno spazio X è T_1 se e solo se i punti di X sono chiusi.*

Dimostrazione. Supponiamo che i punti di x siano chiusi. Allora i punti distinti x_1 e x_2 appartengono rispettivamente agli aperti $X \setminus \{x_2\}$ e a $X \setminus \{x_1\}$.

Viceversa, sia X T_1 e $x \in X$ un punto. Dimostrare che $\{x\}$ è chiuso è equivalente a dimostrare che $X \setminus \{x\}$ è aperto. Sia $x_2 \in X \setminus \{x\}$. Allora esiste un suo intorno aperto U_2 che non contiene x, e pertanto $x_2 \in U_2 \subset X \setminus \{x\}$. Siccome x_2 era generico, ciò vuol; dire che $X \setminus \{x\}$ è aperto. $\square$

Corollario 3.3. *Uno spazio topologico X con un numero finito di elementi che sia T_1 ha la topologia discreta. Pertanto è T_2, T_3, T_4.*

Dimostrazione. I punti di X sono chiusi. Un sottoinsieme qualsiasi di X è unione di un numero finito di punti e pertanto è chiuso. Quindi ogni sottoinsieme di X è chiuso e aperto, ovvero la topologia di X è discreta. $\square$

Teorema 3.4. *Uno spazio X è T_2 se e solo se la diagonale di $X \times X$*

$$\Delta = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$$

è chiusa in $X \times X$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Sia X T_2. Dimostrare che Δ è chiuso è equivalente a dimostrare che $X \times X \setminus \Delta$ è aperto. Sia pertanto $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta$. Ciò vuol dire $x, y \in X$, $x \neq y$. Poiché X è T_2, esistono due aperti disgiunti $U \ni x$, $V \ni y$. Ma allora $(x, y) \in U \times V$ e $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$. Pertanto $X \times X \setminus \Delta$ è aperto.

($\Leftarrow$) Sia Δ chiuso in $X \times X$. Ciò è equivalente a $X \times X \setminus \Delta$ aperto. Siano $x, y \in X$, $x \neq y$. Allora $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta$. Poichè tale insieme è aperto, esiste un aperto della base $U \times V$ intorno di (x, y) contenuto in $X \times X \setminus \Delta$. Ma ci'o vuol dire che $U \ni x$ e $V \ni y$ sono disgiunti. Pertnato X è T_2. $\square$

Osservazione 3.5. *Banalmente si ha $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.*

Vediamo che i viceversa non valgono.

Esempio 3.1. Sia $X = \{x_1, x_2\}$ con la topologia $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{x_1\}, X\}$. X è T_0 (l'aperto $\{x_1\}$ contine x_1 ma non x_2), ma non T_1 (l'unico aperto che contiene x_2 è X, che contiene anche x_1).

Esempio 3.2. Sia X un insieme infinito con la topologia cofinita (gli aperti sono tutti e soli —a parte l'insieme vuoto— gli insiemi a complementare finito). Allora X è T_1 (perchè i punti sono chiusi), ma non è T_2, dato che due qualsiasi aperti non banali non sono disgiunti.

O se vogliamo dato che ogni sottoinsieme (anche non chiuso) di X è compatto, e in uno spazio T_2 i compatti sono necessariamente chiusi.

Teorema 3.6. *Le proprietà T_0, T_1 e T_2 passano ai sottospazi.*

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. □

Teorema 3.7. *Siano X e Y spazi topologici non vuoti. X e Y sono T_i ($i = 0, 1, 2$) se e solo se $X \times Y$ è T_i.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$, $y \in Y$. Se $X \times Y$ è T_i, allora i sottospazi $X \times \{y\}$ e $\{x\} \times Y$ sono T_2, e così X e Y, a cui sono omeomorfi.

Viceversa, siano X e Y T_i, e siano (x_1, y_1), (x_2, y_2) punti distinti di $X \times Y$. Allora almeno una delle coordinate è distinta. Supponiamo sia $x_1 \neq x_2$. Poichè X è T_i, esiste un aperto U o due aperti U_1, U_2 con la proprietà voluta per i punti x_1 e x_2. L'aperto $U \times Y$ o gli aperti $U_1 \times Y$ e $U_2 \times Y$ hanno la stessa proprietà per i punti (x_1, y_1), (x_2, y_2). □

Passiamo ora a considerare gli ultimi quattro assiomi.

Teorema 3.8. $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che grazie all'assioma T_1 i punti degli spazi T_3 o T_4 sono chiusi.

Sia X T_4. Usando l'assioma di normalità con $F_1 = F$, $F_2 = \{x\}$ si ottiene l'assioma di regolarità. Insieme all'assioma T_1 questo implica che X è T_3.

Sia X T_3. Usando l'assioma di regolarità con $F = \{x_1\}$, $x = x_2$ si ottiene l'assioma T_2. □

Osserviamo che l'assioma T_1 serve a far sì che si abbiano le catene di implicazioni illustrate sopra.

Esempio 3.3. Uno spazio topologico X con almeno due punti e la topologia banale è banalmente regolare e normale, ma non è T_0 e pertanto non può essere T_2.

Teorema 3.9. *Uno spazio regolare e T_0 è T_3.*

Proof. Basta dimostrare che T_0 e regolare implicano T_1.

Siano x_1 e x_2 punti distinti. Per l'assioma T_0 uno dei due (diciamo x_1) ha un intorno aperto U che non contiene l'altro. Allora x_1 e $F = X \setminus U$ sono un punto e un chiuso disgiunti e per l'assioma di regolarità li possiamo separare con due aperti $U_1 \ni x_1$ e $U_2 \supset X \setminus U \ni x_1$. Quindi X è T_1.

□

Mostriamo con un esempio che vi sono spazi topologici T_2 ma non T_3.

Esempio 3.4. Sia

$$X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$$

il semipiano superiore chiuso di $\mathbb{R}^2$.

Indichiamo con $R = \mathbb{R} \times \{0\}$ e con $X_+ = X \setminus R$ il semipiano superiore aperto. Definiamo una base $\mathcal{B}$ per la topologia di X nel seguente modo: $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, dove

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{B_{\mathbf{x}}(r) \mid \mathbf{x} = (x, y) \in X_+,\, r < y\}\,, \\ \mathcal{B}_2 &= \{(B_{\mathbf{x}}(r) \cap X_+) \cup \{\mathbf{x}\} \mid \mathbf{x} \in R\}\,, \end{aligned}$$

dove $B_{\mathbf{x}}(r)$ sono le palle della metrica euclidea di $\mathbb{R}^2$. La verifica che $\mathcal{B}$ è una base è diretta ed è lasciata al lettore.

X è T_2. Infatti dati due punti $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ distinti, sono ad una distanza $2r$, e pertanto le palle euclidee centrate in essi di raggio r li separano. Pertanto vi sono due elementi della base (di tipo $\mathcal{B}_1$ o $\mathcal{B}_2$ a seconda se i punti siano in X_+ o in R) di raggio r che separano nel modo voluto i due punti.

X non è T_3. Sappiamo già che X è T_2 e quindi T_1. Dobbiamo pertanto dimostrare che non è regolare. Osserviamo innanzitutto che la topologia di S induce su R la topologia discreta, dato che per ogni punto $(x, 0) \in R$ $((B_{\mathbf{x}}(r) \cap X_+) \cup \{(x, 0)\}) \cap R = \{(x, 0)\}$ è un aperto, e che R è chiuso in X (dato che X_+ è unione degli elementi di $\mathcal{B}_1$). Pertanto ogni sottoinsieme di R è chiuso.

Siano allora $\mathbf{0} = (0, 0)$ e $F = R \setminus \{\mathbf{0}\}$ un punto e un chiuso disgiunto. Supponiamo che esistano due aperti $U \ni \mathbf{0}$, $V \supset R \setminus \{\mathbf{0}\}$. Siccome U è aperto, allora esiste un elemento della base $(B_{\mathbf{0}}(r) \cap X_+) \cup \{\mathbf{0}\}$ contenuto in U. Ogni aperto contenente $(x, 0)$ (con $|x| \leq r$) interseca tale aperto, e quindi anche U. Pertanto U e V non sono disgiunti e X non è regolare.

Teorema 3.10. *Sia X uno spazio topologico regolare, e siano F un chiuso di X e $x \notin F$. Allora esistono due aperti $U_1 \supset F$ e $U_2 \ni x$ a chiusura disgiunta.*

Dimostrazione. Poichè X è regolare, esistono due aperti disgiunti $V_1 \supset F$ e $V_2 \ni x$. Allora $C = X \setminus V_2$ e x sono un chiuso e un punto di X disgiunti. Applicando di nuovo la regolarità di X troviamo due aperti disgiunti $W_1 \supset C$ e $W_2 \ni x$.

Poniamo allora $U_1 = V_1$ e $U_2 = W_2$. Si ha che $U_1 \supset C = X \setminus V_2 \supset V_1 \supset F$ e $U_2 \ni x$. Inoltre $W_1 \supset C = X \setminus V_2 \supset U_1$. Siccome C è chiuso, $C \supset \overline{U}_1$. Analogamente $\overline{U}_2 \subset X \setminus W_1$ e pertanto $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = \emptyset$. □

Teorema 3.11. *Sia X uno spazio topologico normale, e siano F_1 e F_2 due chiusi disgiunti di X. Allora esistono due aperti $U_i \supset F_i$ ($i = 1, 2$) a chiusura disgiunta.*

Dimostrazione. Analoga alla precedente. Lasciata per esercizio al lettore. □

Vediamo ora alcuni esempi di spazi T_4.

Teorema 3.12. *Uno spazio topologico metrizzabile X è T_4.*

Dimostrazione. Sia d la metrica che induce la topologia di X.

Osserviamo innanzitutto che X è T_1: infatti, dati due punti distinti x_1 e x_2 si ha $d(x_1, x_2) = \delta$. Allora le palle aperte $U_1 = B_{x_1}(\delta)$ e $U_2 = B_{x_2}(\delta)$ sono tali che $x_i \in U_i$, $x_i \notin U_j$, $i \neq j \in \{1, 2\}$.

Dimosriamo ora che X è normale. Dato un qualsiasi sottoinsieme $C \subset X$ definiamo la funzione *distanza da C* nel seguente modo:

$$d_C(x) \;=\; \inf_{c \in C} d(c, x)\,.$$

Siano F_1 e F_2 due chiusi disgiunti di X. Poniamo $d_i = d_{F_i}$, $i = 1, 2$. Definiamo gli insiemi U_+ e U_- nel seguente modo:

$$U_\pm\{x \in X \mid \pm (d_1(x) - d_2(x)) < 0\}\,.$$

È evidente che $U_+ \cap U_- = \emptyset$. Dimostreremo che $F_1 \subset U_+$, $F_2 \subset U_-$ e che $U_\pm$ sono aperti.

Supponiamo $x \in F_1$. Allora $d_1(x) = 0$. Per dimostrare che $x \in U_+$ basta far vedere che $d_2(x) > 0$. Se per assurdo fosse $d_2(x) = 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esisterebbe $x_\varepsilon \in F_2$ tale che $d(x, x_\varepsilon) < \varepsilon$. Ma allora $x \in \overline{F}_2 = F_2$, contro l'ipotesi che F_1 e F_2 siano disgiunti.

Pertanto $F_1 \subset U_+$, e con la stessa dimostrazione $F_2 \subset U_-$.

Dimostriamo che U_+ è aperto (anche questa volta la dimostrazione per U_- è identica). Sia $x_+ \in U_+$. Allora $d_1(x_+) - d_2(x_+) = -3a < 0$. Dimostrando che $B_{x_+}(a) \subset U_+$ dimostriamo che U_+ è aperto.

Sia $x \in B_{x_+}(a)$. Allora $d(x, x_+) < a$.

$$\begin{aligned} d_1(x) - d_2(x) &= (d_1(x) - d_1(x_+)) + (d_1(x_+) - d_2(x_+)) + (d_2(x_+) - d_2(x)) \\ &= (d_1(x) - d_1(x_+)) - 3a + (d_2(x_+) - d_2(x)) \end{aligned}$$

Per ogni $f_i \in F_i$ $(i = 1, 2)$ si ha

$$d(x, f_i) \leq d(x, x_+) + d(x_+, f_i) < a + d(x_+, f_i)$$

e passando all'estremo inferiore su F_i:

$$d_i(x) \leq a + d_i(x_+)\,, \qquad d_i(x) - d_i(x_+) \leq a\,, \qquad i = 1, 2\,,$$

da cui segue

$$d_1(x) - d_2(x) \;\leq\; a - 3a + a = -a < 0\,,$$

ovvero che $x \in U_+$. Pertanto U_+ è aperto.

□

Teorema 3.13. *Sia X uno spazio T_2 compatto. Allora X è T_4*

Dimostrazione. Poiché X è T_2, è T_1. Basta pertanto dimostrare che è normale.

Siano F e G due chiusi disgiunti di X. Poichè X è compatto, F e G sono compatti. Fissiamo due punti $f \in F$ e $g \in G$. Poiché X è T_2, esistono due aperti disgiunti $U_{f,g} \ni f$ e $V_{f,g} \ni g$.

Fissato $f \in F$, gli aperti $V_{f,g}$, al variare di $g \in G$, sono un ricoprimento aperto di G. Pertanto possiamo estrane un sottoricoprimento finito, fatto dagli aperti V_{f,g_i}, $i = 1, \dots, n$. Allora

$$U_f \;=\; \bigcap_{i=1}^{n} U_{f,g_i} \ni f \quad V_f = \bigcup_{i=1}^{n} V_{f,g_i} \supset G$$

sono aperti disgiunti.

Gli aperti U_f, al variare di $f \in F$, sono un ricoprimento aperto di F. Pertanto possiamo estrarne un sottoricoprimento finito, fatto dagli aperti U_{f_i}, $i = 1, \dots, k$. Allora gli aperti

$$U \;=\; \bigcup_{i=1}^{k} U_{f_i} \supset F \quad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{f_i} \supset G$$

sono disgiunti. □

4. Costruzione di funzioni continue su spazi topologici

Gli spazi normali sono l'ambiente giusto in cui è possibile costruire funzioni continue a valori in $\mathbb{R}$ con determinate proprietà, del tutto simili a quelle che si riescono a costruire in $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ e più in generale negli spazi metrici.

4.1. **Il lemma di Urysohn.** Un problema fondamentale nella costruzione di funzioni continue a valori in $\mathbb{R}$ è quello di, dati due insiemi disgiunti A e B di uno spazio topologico X, trovare una funzione continua $f : X \to [0, 1]$ tale che $f|_A \equiv 1$, $f|_B \equiv 0$.

Siccome $f^{-1}(0)$ e $f^{-1}(1)$ sono chiusi, il problema è risolvibile per A e B se e solo se è risolvibile per $\overline{A}$ e $\overline{B}$. Pertanto si può direttamente chiedere che A e B siano chiusi disgiunti.

È condizione evidentemente necessaria alla risoluzione del problema che X sia normale, dato che $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ e $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ sono aperti disgiunti che separano A e B. Questa condizione
'e anche sufficiente. Si ha infatti:

Lemma 4.1 (di Urysohn)**.** *Sia X uno spazio topologico normale. Allora per ogni coppia di insiemi chiusi disgiunti esiste una funzione continua $f : X \to [0, 1]$ che assume il valore 0 su uno e il valore 1 sull'altro.*

Dimostrazione. Costruiremo $f : X \to [0, 1]$ come limite di funzioni costanti a tratti.

Siano A e B due chiusi disgiunti di X. Diremo che una catena crescente di lunghezza r di aperti A_i di X

$$A \subset A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{r-1} \subset A_r = X \setminus B$$

è *ammissibile* se $\overline{A}_j \subset A_{j+1}$ per ogni $j \in \{0, \dots, r-1\}$.

La funzione $f_{\{A_i\}} : X \to [0, 1]$, costante sui gradini, che assume il valore 0 su A_0, il valore $\frac{k}{r}$ su $A_k \setminus A_{k-1}$ e il valore 1 su B è detta *funzione uniforme a gradini* della catena $\{A_i\}_{i=1}^{r}$.

Data una catena ammissibile di lunghezza r, un suo *raffinamento* è una catena ammissibile di lunghezza $2r$ del tipo

$$A \subset A_0 \subset A'_1 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{r-1} \subset A'_r \subset A_r = X \setminus B\,.$$

Vogliamo innanzitutto dimostrare due cose:

(1) esiste una catena ammissibile;
(2) ogni catena ammissibile può essere raffinata.

(1) A e B sono due chiusi di X. Poiché X è normale, per il teorema 3.11, esistono due aperti a chiusura disgiunta $V \supset A$, $U \supset B$. La catena

$$A \subset A_0 = V \subset A_1 = X \setminus B \,,$$

poiché $\overline{A}_0 = \overline{V} \subset X \setminus \overline{U} \subset X \setminus B = A_1$, è una catena ammissibile di lunghezza 1.

(2) Data una catena ammissibile, per raffinarla bisogna inserire tra ogni due suoi aperti $A_j \subset A_{j+1}$ (con $\overline{A}_j \subset A_{j+1}$) un nuovo aperto $A_j \subset A'_{j+1} \subset A_{j+1}$ (con $\overline{A}_j \subset A'_{j+1}$ e $\overline{A}'_{j+1} \subset A_{j+1}$). Osserviamo che $\overline{A}_j$ e $X \setminus A_{j+1}$ sono due chiusi disgiunti di X. Applicando nuovamente il teorema 3.11 e ragionando come nel punto (1) sopra si trova l'aperto A'_{j+1} voluto.

Chiamiamo ora $\mathfrak{U}_0$ la catena di lunghezza $2^0 = 1$ trovata al punto (1) e sia $\mathfrak{U}_{n+1}$ un raffinamento di $\mathfrak{U}_n$ per ogni n. $\mathfrak{U}_n$ è una catena ammissibile di lunghezza 2^n per ogni n. Sia f_n la funzione uniforme a gradini della catena $\mathfrak{U}_n$. Allora la successione di funzioni $f_n : X \to [0,1]$ è monotona decrescente e limitata dal basso da 0, quindi converge punto per punto ad una funzione limite $f = \lim f_n : X \to [0,1]$. Sicomme $f_n|_A \equiv 0$ e $f_n|_B \equiv 1$ per ogni n si ha che $f|_A \equiv 0$ e $f|_B \equiv 1$.

Bisogna ora dimostrare la continuità di f. Osserviamo che

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^n}$$

e che su ogni gradino aperto $A_{j+1} \setminus \overline{A}_{j-1}$ f_n varia al più di $\frac{1}{2^n}$, si ottiene che f non varia più di $\frac{1}{2^{n-1}}$ sul gradino $A_{j+1} \setminus \overline{A}_{j-1}$ (intorno aperto di x), e pertanto è continua. □

4.2. **Lemma di estensione di Tietze.** Vediamo ora una generalizzazione del lemma di Urysohn.

Lemma 4.2 (di estensione di Tietze)**.** *Sia X uno spazio topologico normale. Ogni funzione continua $f : A \to [a,b]$ definita su un chiuso A di X è restrizione di una funzione continua $F : X \to [a,b]$.*

Osservazione 4.3. *Il lemma di estensione di Tietze è effettivamente una generalizzazione del lemma di Urysohn. Infatti, siano F_0 e F_1 due chiusi disgiunti di X. Allora la funzione $f : F_0 \cup F_1 \to [0,1]$ definita come $f|_{F_0} \equiv 0$ e $f|_{F_1} \equiv 1$ è una funzione continua definita su un chiuso. Estendendola con Tietze, si trova la funzione data dal lemma di Urysohn.*

Dimostrazione. Se $\varphi : A \to [-3s, 3s]$ è una funzione continua limitata tale che $\sup_A |\varphi| = 3s$ una funzione continua $\Phi : X \to [-s, s]$ si dice *estensione approssimata $\frac{1}{3}$-chiusa* di φ se $|\varphi(a) - \Phi(a)| \leq 2s$ per ogni $a \in A$. Tale Φ è dunque un'approssimazione grossolana del problema di estensione. L'idea è quella di quasi approssimare f, poi quasi approssimare l'errore, e così via.

L'esistenza di estensioni approssimate $\frac{1}{3}$-chiuse è garantito dal lemma di Urysohn: gli insiemi $A_+ = \varphi^{-1}([s, 3s])$ e $A_- = \varphi^{-1}([-3s, -s])$ sono disgiunti e chiusi in A, dunque in X. Pertanto esiste una funzione continua

$\Phi : X \to [-s, s]$ che assume il valore s su A_+ e il valore $-s$ su A_-. Tale funzione è banalmente una estensione approssimata $\frac{1}{3}$-chiusa di φ.

Cerchiamo ora di estendere $f : A \to [a, b]$. Senza perdere di generalità, possiamo supporre che $[a, b] = [-1, 1]$. Sia F_1 una estensione approssimata $\frac{1}{3}$-chiusa di f e F_{n+1} una estensione approssimata $\frac{1}{3}$-chiusa di

$$f - \sum_{j=1}^{n} F_j|_A \, .$$

Allora si ha

$$|f(a) - \sum_{j=1}^{n} F_j(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n , \quad \forall a \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N} ,$$

$$|F_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n , \quad \forall x \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N} ,$$

e ciò garantisce la sommabilità della serie $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ e il fatto che $F : X \to [-1, 1]$ è un'estensione continua di f. □

Corollario 4.4. *Sia X uno spazio topologico normale. Ogni funzione continua $f : A \to \mathbb{R}$ definita su un chiuso A di X è restrizione di una funzione continua $F : X \to \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$\varphi = \arctan(f) : A \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

e estendiamola ad una funzione

$$\Phi : X \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] .$$

La funzione Φ potrebbe assumere i valori $\pm\frac{\pi}{2}$, su cui non è definita la tangente (obbligatoriamente su un chiuso B disgiunto da A). Sia allora $\lambda : X \to [0, 1]$ una funzione tale che $\lambda|_A \equiv 1$, $\lambda|_B \equiv 0$, che esiste per il lemma di Urysohn. Allora

$$\lambda\Phi : X \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

estende anch'essa la funzione φ, e $F = \tan(\lambda\Phi)$ è la funzione cercata. □

4.3. **Partizioni dell'unità e paracompattezza.** Vediamo ora uno strumento, la partizione dell'unità, che sarà di grande utilità nei successivi corsi di analisi e di geometria. Vedremo esattamente quali sono le ipotesi minimali che permettono di avere partizioni dell'unità.

Definizione 4.1. Sia X uno spazio topologico. Data una funzione continua $f : X \to \mathbb{C}$, il supporto di f, $\mathrm{Supp}(f)$, è

$$\mathrm{Supp}(f) \;=\; \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}} \, .$$

Definizione 4.2. Sia X uno spazio topologico. Una famiglia di sottoinsiemi di X, $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ è detta *localmente finita* se per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno V di x tale che $V \cap A_\lambda \neq \emptyset$ per un numero finito di $\lambda \in \Lambda$.

Definizione 4.3. Sia X uno spazio topologico. Una famiglia $\{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ di funzioni continue $\tau_\lambda : X \to [0, 1]$ è detta *partizione dell'unità* se:

(1) i supporti $\{\mathrm{Supp}(\tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ sono una famiglia localmente finita;
(2) per ogni $x \in X$
$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \tau_\lambda(x) \; = \; 1\,.$$
Una partizione dell'unità è detta *subordinata* a un dato ricoprimento $\mathfrak{U}$ di X se per ogni λ esiste $U \in \mathfrak{U}$ tale che $\mathrm{Supp}(\tau_\lambda) \subset U$.

Le partizioni dell'unità hanno molti scopi. Fra questi passare da soluzioni locali note di un problema a soluzioni globali, incollando fra loro le varie soluzioni. Oppure lo spezzare un integrale definito su una varietà in più pezzi definiti su carte locali per poter poi comodamente integrare i vari pezzi su aperti di $\mathbb{R}^n$.

L'esistenza di partizioni dell'unità subordinate a un dato ricoprimento aperto è collegata alla nozione di paracompattezza.

Definizione 4.4. Uno spazio topologico X di Hausdorff è detto *paracompatto* se ogni ricoprimento aperto $\mathfrak{U}$ ammette un raffinamento $\mathfrak{V}$ (ovvero $\mathfrak{V}$ è un ricoprimento aperto di X tale che ogni suo aperto è contenuto in un aperto di $\mathfrak{U}$) localmente finito.

Osservazione 4.5. *Uno spazio topologico compatto di Hausdorff è banalmente paracompatto, dato che come raffinamento localmente finito di* $\mathfrak{U}$ *si può scegliere direttamente un suo sottoricoprimento finito.*

Osservazione 4.6. *Un sottospazio chiuso di uno spazio paracompatto è paracompatto.*

Teorema 4.7. *Sia X paracompatto. Allora X è T_4.*

Dimostrazione. Siano A e B due chiusi disgiunti di X. Siano $a \in A$, $b \in B$ fissati. Poichè X è T_2 possiamo scegliere due aperti $U_{a,b} \ni a$ e $V_{a,b} \ni b$ disgiunti.

Fissato $a \in A$, gli aperti $V_{a,b}$ sono un ricoprimento di B. Poiché B è chiuso, è paracompatto e quindi esiste un raffinamento localmente finito di $\{V_{a,b}\}$, $\{W_{a,\lambda}\}$. Definiamo
$$V_a \; = \; \bigcup_\lambda W_{a,\lambda} \; \supset \; B\,.$$
Per la finitezza locale di $\{W_{a,\lambda}\}$, esiste un intorno $I_a \ni a$ che interseca solo un numero finito di questi $W_{a,\lambda}$. Siano tali insiemi contenuti in $\cup_{i=1}^n V_{a,b_i}$. Allora
$$U_a \; = \; I_a \, \bigcap_{i=1}^n U_{a,b_i} \; \ni a$$
è disgiunto da V_a.

Gli aperti U_a sono un ricoprimento di A. Poiché A è chiuso, è paracompatto e quindi esiste un raffinamento localmente finito di $\{U_a\}$, $\{W_\lambda\}$. Sia
$$U \; = \; \bigcup_\lambda W_\lambda\,.$$

Se per ogni $b \in B$ troviamo un intorno aperto $O_b \ni b$ che non interseca U, allora

$$V \;=\; \bigcup_{b \in B} O_b \;\supset B$$

è l'aperto desiderato.

Per la finitezza locale di W_λ, esiste un intorno $I_b \ni b$ che interseca solo un numero finito di questi W_λ. Siano tali insiemi contenuti in $\cup_{i=1}^k U_{a_i}$. Allora

$$O_b \;=\; I_b \bigcap_{i=1}^{k} V_{a_i} \;\ni b$$

è disgiunto da U. □

Teorema 4.8. *Sia X uno spazio di Hausdorff. X è paracompatto se e solo se ogni ricoprimento aperto di X ammette una partizione dell'unità subordinata.*

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Sia $\mathfrak{U}$ un ricoprimento di X e $\{\tau_\lambda\}$ una partizione dell'unità subordinata a $\mathfrak{U}$. Allora gli aperti $V_\lambda = \{\tau_\lambda \neq 0\}$ formano un raffinamento localmente finito di $\mathfrak{U}$. Poichè X è di Hausdorff, X è paracompatto.

($\Rightarrow$) Sia $\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}_\lambda$ un ricoprimento di X. Senza perdere di generalità, poichè X è paracompatto, possiamo supporre che sia localmente finito.

Supponiamo che esista un ricoprimento aperto $\mathfrak{V} = \{V_\lambda\}_\lambda$ tale che per ogni λ $\overline{V}_\lambda \subset U_\lambda$. Allora, poiché X è T_4, per il lemma di Urysohn scegliamo $\sigma_\lambda : X \to [0,1]$ con $\sigma_\lambda|_{\overline{V}_\lambda} \equiv 1$ e $\sigma_\lambda|_{X \setminus \overline{U}_\lambda} \equiv 0$. Poiché $\operatorname{Supp} \sigma_\lambda \subset U_\lambda$, la somma $\sum_\lambda \sigma_\lambda(x)$ è ben definita ovunque. Poiché $\mathfrak{V}$ è un ricoprimento di X tale somma è maggiore o uguale a 1 ovunque. Quindi si può definire la partizione dell'unità voluta come

$$\tau_\lambda(x) \;=\; \frac{\sigma_\lambda(x)}{\sum_\lambda \sigma_\lambda(x)}, \qquad x \in X, .$$

Bisogna provare che un tale $\mathfrak{V}$ esiste. Sia $x \in X$. $x \in U_\lambda$ per un qualche λ. Poiché X è T_3 possiamo separare x e $X \setminus U_\lambda$ con intorni aperti $Y_x \ni x$ e $Z_x \supset X \setminus U_\lambda$. Di conseguenza $x \in Y_x \subset \overline{Y}_x \subset U_\lambda$. $\{Y_x\}_{x \in X}$ è un ricoprimento aperto di X. Sia $\mathfrak{W} = \{W_\alpha\}_\alpha$ un suo raffinamento localmente finito. Sia

$$V_\lambda \;=\; \bigcup_{\overline{W}_\alpha \subset U_\lambda} W_\alpha \,.$$

Allora $\mathfrak{V} = \{V_\lambda\}_\lambda$ è un raffinamento di $\mathfrak{U}$. Dobbiamo dimostrare che, per ogni λ, $\overline{V}_\lambda \subset U_\lambda$.

Sia $x \in \overline{V}_\lambda$. Allora ogni intorno di x interseca un qualche W_α la cui chiusura è contenuta interamente in U_λ. Poichè $\mathfrak{W}$ è localmente finito, un aperto sufficientemente piccolo di x interseca solo un numero finito di tali aperti, $W_{\alpha_1}, \ldots, W_{\alpha_n}$ e x appartiene alla chiusura di almeno uno di essi. Quindi

$$x \in \overline{\bigcup_{i=1}^{n} W_{\alpha_i}} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{W}_{\alpha_i} \subset U_\lambda \,,$$

provando che $\overline{V}_\lambda \subset U_\lambda$. □

5. Proprietà di connessione

Vedremo ora una proprietà elementare degli spazi topologici che ci permette di distinguere tra spazi tutti di un pezzo e spazi divisi in più pezzi.

5.1. **Connessione.**

Definizione 5.1. Uno spazio topologico X si dice *connesso* se non è unione di due aperti disgiunti non vuoti.

Teorema 5.1. *Uno spazio topologico X è connesso se e solo se $\emptyset$ e X sono gli unici sottoinsiemi di X aperti e chiusi.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Supponiamo per assurdo che $A \subset X$ sia un sottoinsieme aperto e chiuso $A \neq X$, $A \neq \emptyset$. Allora $B = X \setminus A$ è anch'esso aperto e non vuoto. Quindi $X = A \cup B$ con A e B aperti disgiunti e non vuoti, cioè X non è connesso.

($\Leftarrow$) Supponiamo per assurdo che X non sia connesso, ovvero che $X = A \cup B$ con A e B aperti disgiunti e non vuoti. Allora $A \neq X$ (perché B non è vuoto), $A \neq \emptyset$, A è aperto e chiuso (perché $X \setminus A = B$ è aperto). $\square$

Esempio 5.1. Lo spazio topologico con un solo punto è connesso, in quanto due suoi aperti non possono essere non vuoti e disgiunti.

Esempio 5.2. Sia $(X, \mathcal{D})$ uno spazio topologico con almeno due punti con la topologia discreta. Allora sappiamo che tutti i suoi punti sono aperti e chiusi. Pertanto X non è connesso.

Esempio 5.3. Sia $(X, \mathcal{P}_{x_0})$ uno spazio topologico con la topologia del punto particolare: un insieme non vuoto $A \subset X$ è aperto se e solo se contiene il punto particolare x_0. Allora due aperti non vuoti hanno sempre in comune il punto x_0 e pertanto non possono essere disgiunti. Quindi X è connesso.

Esempio 5.4. Sia $\mathcal{F}$ la topologia su $\mathbb{R}$ che ha come base di aperti gli intervalli della forma $[t, s)$. Allora un qualsiasi sottoinsieme di $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$ con almeno due punti non è connesso. Siano infatti $x < y \in S$. Allora $A = (-\infty, y) \cap S$ e $B = [y, +\infty) \cap S$ sono due aperti non vuoti disgiunti tali che $A \cup B = S$.

Esempio 5.5. Sia $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ l'insieme dei numeri razionali con la topologia indotta dalla topologia euclidea. Sia $S \subset \mathbb{Q}$ un qualsiasi insieme con almeno due punti. Allora S non è connesso. Infatti, siano $x, y \in \mathbb{Q}$ due punti distinti. Allora fra essi vi è un numero irrazionale α: $x < \alpha < y$. Gli insiemi $A = (-\infty, \alpha) \cap S$ e $B = (\alpha, +\infty) \cap S$ sono aperti non vuoti disgiunti tali che $A \cup B = S$.

Teorema 5.2. *L'intervallo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ (con la topologia euclidea) è connesso.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $[0, 1]$ non sia connesso, ed esistano pertanto due aperti disgiunti non vuoti U e V tali che $[0, 1] = U \cup V$ (quindi U e V sono anche chiusi). Supponiamo che $0 \in U$.

Sia $s = \inf_{x \in V} x$. $s \in V$ poichè V è chiuso. Ma per definizione di s, o $s = 0$ (e allora $s \in U$) oppure $[0, s) \subset U$. Poichè U è chiuso, $s \in U$. Assurdo, poichè U e V sono disgiunti. $\square$

Teorema 5.3. *L'immagine di uno spazio connesso attraverso una funzione continua è connesso.*

Dimostrazione. Sia $f : X \to Y$ una funzione continua e X connesso. Sia $A \subset f(X)$ aperto e chiuso in $f(X)$. Allora $f^{-1}(U)$ è aperto e chiuso in X. Poiché X è connesso $f^{-1}(U)$ o è vuoto o è X. Riapplicando f, si ottiene che U o è vuoto o è $f(X)$. Pertanto $f(X)$ è connesso. □

Corollario 5.4. *La proprietà di connessione è topologica, ovvero se X e Y sono spazi omeomorfi, X è connesso se e solo se Y è connesso.*

Esempio 5.6. Poiché $\mathbb{S}^1$ è immagine continua di $[0,1]$ tramite la funzione $t \mapsto \exp(2\pi i t)$, $\mathbb{S}^1$ è connesso.

Esempio 5.7. $[a,b]$ è connesso.

Teorema 5.5. *Sia $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di sottospazi connessi di uno spazio X. Se $\cap_\lambda Y_\lambda \neq \emptyset$, allora $Y = \cup_\lambda Y_\lambda$ è connesso.*

Dimostrazione. Sia $U \subset Y$ aperto e chiuso non vuoto. Allora $U_\lambda = U \cap Y_\lambda \neq \emptyset$ per un qualche λ. Allora U_λ è aperto e chiuso non vuoto in Y_λ. Poichè Y_λ è connesso, $U_\lambda = Y_\lambda$, e pertanto $Y_\lambda \subset U$. Quindi U interseca ogni Y_λ e, ripetendo il ragionamento precedente, si ottiene che contiene ogni Y_λ. Pertanto $U = Y$, e Y è connesso. □

Corollario 5.6. *Gli insiemi $[a,b)$, (a,b), $(a,b]$, $[a,+\infty)$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$, $\mathbb{R}$ sono connessi.*

Dimostrazione. Tutti quegli intervalli possono essere scritti come unione crescente di intervalli chiusi, e il risultato segue dal teorema precedente. I dettagli al lettore. □

Teorema 5.7. *Siano X e Y due spazi topologici non vuoti. X e Y sono connessi se e solo se $X \times Y$ è connesso.*

Osservazione 5.8. *L'ipotesi X e Y non vuoti è fondamentale. Infatti, qualunque sia X, anche non connesso, $X \times \emptyset = \emptyset$ è connesso.*

Dimostrazione del teorema 5.13. ($\Leftarrow$) Le proiezioni su X e su Y sono funzioni continue, pertanto se $X \times Y$ è connesso, anche X e Y lo sono.

($\Rightarrow$) Se X e Y sono connessi, anche le "fette" $X \times \{y\}$ e $\{x\} \times Y$ (a loro omeomorfe) lo sono. Poichè $(X \times \{y\}) \cap (\{x\} \times Y) = \{x\} \times \{y\}$, per il teorema 5.5 gli insiemi $C_{x,y} = (X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)$ sono connessi, per ogni $x \in X$, $y \in Y$. Fissato $x \in X$, si ha che

$$X \times Y = \bigcup_{y\in Y} C_{x,y} .$$

Poiché

$$\bigcap_{y\in Y} C_{x,y} = \{x\} \times Y \neq \emptyset$$

nuovamente per il teorema 5.5, $X \times Y$ è connesso. □

5.2. **Connessione per archi.** Vediamo ora una nozione collegata a quella di connessione: la connessione per archi.

Da qui in avanti utilizzeremo molto spesso l'intervallo $[0,1] \subset \mathbb{R}$ con la topologia euclidea. Per brevità, lo indicheremo con I.

Definizione 5.2. Sia X uno spazio topologico. Un *arco* (o *cammino*) in X è un'applicazione continua $\alpha : I \to X$.

Come notazione, $\alpha(0)$ è detto *inizio* dell'arco e $\alpha(1)$ *fine* dell'arco, e α è detto un arco da $\alpha(0)$ a $\alpha(1)$.

La variabile $t \in I$ viene spesso interpretata come tempo, $\alpha(t)$ rappresenta la posizione al tempo t, e $\alpha(0)$ e $\alpha(1)$ le posizioni iniziale e finale.

Definizione 5.3. Uno spazio topologico X è detto *connesso per archi* se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esiste un arco in X con inizio in x e fine in y.

Ovviamente I è connesso per archi.

Teorema 5.9. *Uno spazio X connesso per archi è connesso.*

Proof. Supponiamo per assurdo che $X = A \cup B$, con A e B aperti disgiunti non vuoti. Sia $a \in A$ e $b \in B$. Consideriamo un arco α con inizio in a e fine in b (esiste perché X è connesso per archi). Allora $I = \alpha^{-1}(A) \cup \alpha^{-1}(B)$, con $0 \in \alpha^{-1}(A)$, $1 \in \alpha^{-1}(B)$. Inoltre A e B sono aperti poiché α è continua e banalmente disgiunti. Quindi I non è connesso. Assurdo. $\square$

Il viceversa non è vero:

Esempio 5.8. (la pulce e il pettine) Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$: il pettine

$$P = \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}*,\ y \in I \right\} \cup I \times \{0\}$$

e la pulce

$$p = \{(0, 1)\}.$$

Lo spazio topologico $X = p \cup P$ (la pulce e il pettine) è connesso, ma non connesso per archi. Il pettine è connesso per archi, ma la pulce non può essere collegata a nessun punto del pettine tramite un arco. Tutti gli intorni aperti della pulce intersecano però il pettine.

Valgono per la connessione per archi i seguenti teoremi, del tutto analoghi a quelli dimostrati per la connessione. Le dimostrazioni, molto semplici, sono lasciate per esercizio al lettore.

Teorema 5.10. *L'immagine di uno spazio connesso per archi attraverso una funzione continua è connesso per archi.*

Corollario 5.11. *La proprietà di connessione per archi è topologica, ovvero se X e Y sono spazi omeomorfi, X è connesso per archi se e solo se Y è connesso per archi.*

Teorema 5.12. *Sia $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di sottospazi connessi per archi di uno spazio X. Se $\cap_\lambda Y_\lambda \neq \emptyset$, allora $Y = \cup_\lambda Y_\lambda$ è connesso per archi.*

Teorema 5.13. *Siano X e Y due spazi topologici non vuoti. X e Y sono connessi per archi se e solo se $X \times Y$ è connesso per archi.*

5.3. **Versioni locali delle proprietà di connessione.** Data una proprietà topologica $\mathcal{P}$, si dice che uno spazio X verifica localmente la proprietà $\mathcal{P}$ se per ogni punto $x \in X$ e per ogni intorno $U \ni x$ esiste un intorno V ($x \in V \subset U$) tale che V ha la proprietà $\mathcal{P}$.

In particolare, consideriamo le seguenti definizioni.

Definizione 5.4. Uno spazio topologico X si dice *localmente connesso* se per ogni punto $x \in X$ e per ogni intorno $U \ni x$ esiste un intorno V ($x \in V \subset U$) connesso.

Definizione 5.5. Uno spazio topologico X si dice *localmente connesso per archi* se per ogni punto $x \in X$ e per ogni intorno $U \ni x$ esiste un intorno V ($x \in V \subset U$) connesso per archi.

Come per le proprietà locali, anche in questo caso si ha che

Teorema 5.14. *Sia X uno spazio topologico localmente connesso per archi. Allora X è localmente connesso.*

Dimostrazione. È una conseguenza immediata delle definizioni e del teorema 5.9. □

Anche in questo caso "la pulce e il pettine"costituisce un controesempio al viceversa.

È importante osservare che non c'è alcun legame tra la proprietà di connessione (per archi) globale e la sua versione locale, come mostrato dai seguenti esempi.

Esempio 5.9. Sia $X \neq \emptyset$ connesso (per archi). Allora $X + X$ è banalmente non connesso (per archi), mentre è localmente connesso (per archi).

Esempio 5.10. La pulce e il pettine è connesso ma non localmente connesso (vicino alla pulce).

Esempio 5.11. Aggiungendo alla pulce e il pettine un "filo" che colleghi la pulce alla costa del pettine si ottiene uno spazio connesso per archi, ma non localmente connesso per archi (vicino alla pulce).

L'analisi dettagliata degli esempi è lasciata per esercizio al lettore.

6. Omotopia

Definizione 6.1. Siano X e Y spazi topologici e $f_0, f_1 : X \to Y$ funzioni continue. f_0 e f_1 sono dette *omotope* se esiste un'applicazione continua $F : X \times I \to Y$ tale che $F(x, 0) = f_0(x)$ e $F(x, 1) = f_1(x)$ per ogni $x \in X$.

L'applicazione F si dice *omotopia* tra f_0 e f_1.

Scriveremo $f_0 \approx f_1$ o $F : f_0 \approx f_1$.

Si può pensare un'omotopia F come una famiglia di funzioni f_t che varia con continuità da f_0 a f_1.

Osservazione 6.1. *Se $X = I$, ogni arco è omotopo a un arco costante (al cammino costante nel punto finale, nel punto iniziale, o in un qualsiasi suo punto). Lasciamo al lettore la dimostrazione di questo fatto.*

Pertanto se Y è connesso per archi tutti gli archi in Y sono omotopi tra loro.

Onde evitare questo fenomeno, introduciamo una nozione più generale di omotopia.

Definizione 6.2. Siano X e Y spazi topologici, $A \subset X$ e $f_0, f_1 : X \to Y$ funzioni continue. f_0 e f_1 sono dette *omotope relativamente ad* A se esiste un'applicazione continua $F : X \times I \to Y$ tale che $F(x, 0) = f_0(x)$ e $F(x, 1) = f_1(x)$ per ogni $x \in X$, e $F(a, t) = f_0(a)$ per ogni $t \in I$.

L'applicazione F si dice *omotopia relativa ad* A tra f_0 e f_1.

Scriveremo $f_0 \approx_A f_1$ o $F : f_0 \approx_A f_1$.

Osservazione 6.2. *Ovviamente affinché* f_0 *e* f_1 *siano omotope relativamente ad* A *è condizione necessaria che* $f_0(a) = f_1(a)$ *per ogni* $a \in A$.

Se $A = \emptyset$*, ritroviamo il concetto di omotopia.*

Per dimostrare che l'omotopia realtiva ad A è una relazione d'equivalenza, ci serve dimostrare il seguente lemma di incollamento (glueing o pasting lemma, in inglese).

Lemma 6.3 (d'incollamento)**.** *Siano* X, Y *spazi topologici e* A, B *sottoinsiemi di* X*, entrambi aperti (o entrambi chiusi). Se* $f : A \to Y$ *e* $g : B \to Y$ *sono funzioni continue tali che* $f(x) = g(x)$ *per ogni* $x \in A \cap B$*, allora la funzione* $h : X \to Y$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

è continua.

Dimostrazione. Grazie all'ipotesi $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in A \cap B$, h è ben definita.

Sia $D \subset Y$ un aperto (un chiuso). Allora

$$h^{-1}(D) = h^{-1}(D) \cap (A \cup B) = (h^{-1}(D) \cap A) \cup (h^{-1}(D) \cap B) = f^{-1}(D) \cup g^{-1}(D).$$

Poichè f è continua $f^{-1}(D)$ è aperto (chiuso) in A, e poichè A è aperto (chiuso) in X, è aperto (chiuso) anche in X. Analogamente per $g^{-1}(D)$.

Pertanto $h^{-1}(D)$ è aperto (chiuso), e h è continua. □

Lemma 6.4. *La relazione* $\approx_A$ *è una relazione d'equivalenza sull'insieme delle funzioni continue da* X *a* Y*.*

Dimostrazione. La relazione è riflessiva: $F(x, t) = f(x)$ è un'omotopia relativa ad A fra f e f.

La relazione è simmetrica: se $F : f_0 \approx_A f_1$, allora $G : f_1 \approx_A f_0$, $G(x, t) = F(x, 1 - t)$.

La relazione è transitiva: siano $F : f_0 \approx_A f_1$ e $G : f_1 \approx_A f_2$. Allora $H : X \times I \to Y$ definita come

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(x, 2t - 1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

è continua per il lemma di incollamento ed è quindi un'omotopia relativa ad A tra f_0 e f_2, come voluto. □

Definizione 6.3. Due spazi topologici X e Y sono detti *omotopicamente equivalenti* ($X \approx Y$) se esistono due funzioni continue $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tali che

$$g \circ f \approx id_X : X \to X, \quad f \circ g \approx id_Y : Y \to Y.$$

L'equivalenza omotopica è una relazione d'equivalenza nell'insieme negli spazi topologici.

La nozione di equivalenza omotopica generalizza quindi quella di omeomorfismo. Due spazi omeomorfi sono infatti banalmente omotopicamente equivalenti, dato che $f \circ g = id_X$ e $f \circ g = id_Y$. Il viceversa non è vero, come mostrato dal seguente esempio.

Esempio 6.1. $\mathbb{R}^n \equiv \{0\}$. Infatti, definiamo $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $g(0) = 0$. Allora $f \circ g = id_{\{0\}}$, mentre $g \circ f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Ma la funzione costantemente 0 e la funzione costante in $\mathbb{R}^n$ sono omotope: l'omotopia è data da $F(x, t) = tx$.

Osserviamo che l'esempio precedente mostra anche che un qualsiasi aperto stellato di $\mathbb{R}^n$ è omotopicamente equivalente a un punto.

Definizione 6.4. Uno spazio topologico X omotopicamente equivalente a un punto si dice *contraibile*.

7. Il gruppo fondamentale

Lo scopo di questa sezione sarà quello di introdurre un'operazione tra cammini ed una relazione d'equivalenza in modo tale da far diventare l'insieme dei cammini un gruppo, che sarà un invariante topologico, utile a studiare gli spazi topologici.

7.1. Cammini.

Lemma 7.1. *Siano α e β due archi (o cammini) nello spazio topologico X, tali che $\alpha(1) = \beta(0)$, ovvero la fine di α coincide con l'inizio di β. Allora è definito un cammino in X, $\alpha * \beta$ detto prodotto di α e β, nel seguente modo:*

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta(2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Dimostrazione. È un'immediata conseguenza del lemma d'incollamento. □

Definizione 7.1. Due cammini in X, α e β, si dicono *omotopi* (come cammini) se sono funzioni omotope relativamente ad $A = \{0, 1\}$.

Scriveremo $\alpha \simeq \beta$.

Teorema 7.2. *Se $\alpha_0 \simeq \alpha_1$, $\beta_0 \simeq \beta_1$ e $\alpha_0 * \beta_0$ è ben definito, allora anche $\alpha_1 * \beta_1$ è ben definito e $\alpha_1 * \beta_1 \simeq \alpha_0 * \beta_0$.*

Dimostrazione. Per definizione, due cammini omotopi hanno stesso inizio e stessa fine. Pertanto $\alpha_1 * \beta_1$ è ben definito.

Siano $F : \alpha_0 \simeq \alpha_1$ e $G : \beta_0 \simeq \beta_1$ le omotopie di cammini. Un'omotopia di cammini tra $\alpha_0 * \beta_0$ e $\alpha_1 * \beta_1$ è data da

$$H(s, t) = \begin{cases} F(s, 2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(s, 2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

H è continua per il lemma d'incollamento. □

Definizione 7.2. Sia α un cammino in X. Il cammino inverso α^{-1} è definito da $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t)$.

L'inizio di α^{-1} è la fine di α e viceversa. Inoltre $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$.

Teorema 7.3. *Se $\alpha_0 \simeq \alpha_1$, allora $\alpha_0^{-1} \simeq \alpha_1^{-1}$.*

Dimostrazione. Se $F : \alpha_0 \simeq \alpha_1$, allora un'omotopia tra α_0^{-1} e α_1^{-1} è

$$H(s,t) \;=\; F(s, 1-t)\,.$$

□

Sia X uno spazio topologico e α un cammino in X. Con $\langle\alpha\rangle$ denotiamo la classe di $\simeq$-equivalenza di α, ovvero l'insieme di tutti i cammini omotopi ad α. Poiché cammini omotopi hanno lo stesso inizio e la stessa fine, l'inizio e la fine di $\langle\alpha\rangle$ sono ben definiti.

Definizione 7.3. Siano α e β due cammini in X tali che $\alpha * \beta$ sia ben definito. Allora definiamo

$$\begin{aligned} \langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle \;&=\; \langle\alpha * \beta\rangle\,, \\ \langle\alpha\rangle^{-1} \;&=\; \langle\alpha^{-1}\rangle\,. \end{aligned}$$

Le definizioni sono ben date grazie ai teoremi appena dimostrati.

Teorema 7.4. *Per ogni $x \in X$, sia e_x il cammino costante in X: $e_x(t) = x$ per ogni $t \in I$. Allora*

1. *se $\langle\alpha\rangle$ ha origine in x_0, $\langle e_{x_0}\rangle\langle\alpha\rangle = \langle\alpha\rangle$;*
2. *se $\langle\alpha\rangle$ ha fine in x_1, $\langle\alpha\rangle\langle e_{x_1}\rangle = \langle\alpha\rangle$;*
3. *se $\langle\alpha\rangle$ ha origine in x_0 e fine in x_1, allora $\langle\alpha\rangle\langle\alpha\rangle^{-1} = \langle e_{x_0}\rangle$ e $\langle\alpha\rangle^{-1}\langle\alpha\rangle = \langle e_{x_1}\rangle$;*
4. *se $(\langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle)\langle\gamma\rangle$ è definito, allora $(\langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle)\langle\gamma\rangle = \langle\alpha\rangle(\langle\beta\rangle\langle\gamma\rangle)$.*

Dimostrazione. (1) Un'omotopia di cammini tra $e_{x_0} * \alpha(s)$ e $\alpha(s)$ è data da

$$F(s,t) \;=\; \begin{cases} x_0 & s \leq \frac{1-t}{2} \\ \alpha\left(\frac{2s+t-1}{1+t}\right) & s \geq \frac{1-t}{2} \end{cases}$$

(2) Per dimostrare che $\alpha * e_{x_1}$ e α sono omotopi, osserviamo che x_1 è il punto iniziale di α^{-1} e che $(\alpha * e_{x_1})^{-1} = e_{x_1} * \alpha^{-1}$ e α^{-1} sono omotopi per il punto (1). La tesi segue dal teorema 7.3.

(3) Basta dimostrare che $\alpha * \alpha^{-1}(s)$ è omotopo a $e_{x_0}(s)$ (per l'altra parte, si scambiano i ruoli di α e α^{-1}. Un'omotopia è data da

$$F(s,t) \;=\; \begin{cases} x_0 & s \in \left[0, \frac{t}{2}\right] \cup \left[1-\frac{t}{2}, 1\right] \\ \alpha\,(t-2s) & s \in \left[\frac{t}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ \alpha\,(2-2s-t) & s \in \left[\frac{1}{2}, 1-\frac{t}{2}\right] \end{cases}$$

(4) Per dimostrare $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$, scriviamo esplicitamente i due cammini

$$(\alpha * \beta) * \gamma(s) \;=\; \begin{cases} \alpha(4s) & s \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \beta\,(4s-1) & s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma\,(2s-1) & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$\alpha * (\beta * \gamma)(s) \;=\; \begin{cases} \alpha(2s) & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta\,(4s-2) & s \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ \gamma\,(4s-3) & s \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

Un'omotopia tra i due cammini è data da

$$F(s,t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{4s}{t+1}\right) & t \in [4s-1, 1] \\ \beta\,(4s-t-1) & t \in [4s-2, 4s-1] \\ \gamma\left(\frac{4s-t-2}{2-t}\right) & t \in [0, 4s-2] \end{cases}$$

□

7.2. **Il gruppo fondamentale.** Siamo ora in grado, data una coppia spazio topologico / punto (X, x), di definire un gruppo di cammini.

Corollario 7.5. *Sia X uno spazio topologico e $x_0 \in X$. L'insieme delle classi di $\simeq$-equivalenza di cammini con inizio e fine in x_0, $\pi_1(X, x_0)$, forma un gruppo con le operazioni di prodotto e inverso definite prima. Si chiama* gruppo fondamentale *o* primo gruppo d'omotopia *di (X, x_0).*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal teorema 7.4. □

Dato uno spazio topologico X qualsiasi e due punti distinti $x_0 \neq x_1 \in X$, non possiamo aspettarci che ci siano relazioni tra $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$. Ad esempio se non esiste alcun cammino tra x_0 e x_1 (in particolare X non è connesso per archi) c'è da immaginare che i due gruppi non abbiano niente a che fare l'uno con l'altro.

Esempio 7.1. Consideriamo $X = \mathbb{S}^1 \cup \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Allora $\pi_1(X, (0,0)) = \{\langle e_{(0,0)} \rangle\}$, mentre il cammino $\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ è un cammino non omotopicamente equivalente al cammino costante[4] in $\pi_1(X, (1,0))$.

Se invece X è connesso per archi, le cose cambiano:

Teorema 7.6. *Sia X uno spazio topologico connesso per archi, $x_0, x_1 \in X$. Esiste un isomorfismo di gruppi tra $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$.*

Dimostrazione. □

8. Rivestimenti

9. Il teorema di Seifert-Van Kampen

References

[1] K. Jänich: Topologia, viii+200. Zanichelli, 1994.
[2] C. Kosniowski: Introduzione alla topologia algebrica, vi+314. Zanichelli, 1988.
[3] I.M. Singer e J.A. Thorpe: Lecture notes on elementary topology and geometry, viii+232. Springer, 1967.
[4] L.A. Steen e J.A. Seebach, Jr.: Counterexamples in topology. Second edition, xi+244. Springer, 1978.

Dipartimento di Matematica, Università di Parma, Parco Area delle Scienze 53/A, I-43124 Parma, Italy
E-mail address: alberto.saracco@unipr.it

[4]Intuitivamente perché, facendo un giro intorno al buco, non può essere deformato con continuità in un cammino che non gira intorno al buco. Dimostreremo rigorosamente questo fatto in seguito