Esame di GEOMETRIA - 9 CFU (Appello del 18 Luglio 2016)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, si considerino le rette

$$s_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}, \qquad s_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 \\ z = 2 + t \end{cases}$$

1. Stabilire la posizione reciproca delle due rette.
2. Determinare equazioni cartesiane della retta passante per $P = (1, 1, 1)^T$ e incidente a s_1 e s_2.

Svolgimento:

Esercizio 2. Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$W = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \qquad U = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

1. Determinare equazioni cartesiane di W.
2. Determinare una base di W e completarla a base di $\mathbb{R}^4$.
3. Calcolare $\dim(U + W)$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita da

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x-y+z \\ x+3y-3z \\ y-z \end{pmatrix}.$$

1. Determinare una base per il nucleo e una base per l'immagine di L.
2. Stabilire se il vettore $(0,2,-2,-1)^T$ appartiene all'immagine di L.

Svolgimento:

Esercizio 4. Sia A una matrice quadrata a coefficienti reali.

1. Scrivere la definizione di autovalore di A.
2. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovaolore di A. Definire la moltepliticità algebrica e molteplicità geometrica di λ e scrivere la disuguaglianza che lega le due molteplicità.
3. Stabilire, motivando le risposte, quali tra le seguenti matrici sono invertbili e quali sono simili:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento: