Esame di Geometria - 9 CFU (I prova parziale 27 aprile 2017)

Cognome: SARACCO	Nome: ALBERTO					
Nr.matricola:	Corso di laurea: ING. I.E.T.					

Esercizio 1. Considera le rette

$$r: \begin{cases} x-2y-4z=-2 \\ -2x-4y+z=2 \end{cases} ; \quad s: \begin{cases} -2x-4y-6z=-2 \\ -2x-4y-4z=0 \end{cases}$$

1. Trova il piano α contenente s e parallelo a r e il piano β contenente r e perpendicolare a $s \times r$.
2. Trova l'intersezione tra α e β.

Svolgimento:

$$v_r \sim (1,-2,-4) \wedge (-2,-4,1) = (-18,7,-8)$$

$$v_s \sim (1,2,3) \wedge (1,2,2) = (-2,1,0)$$

$$n \sim v_s \wedge v_r = (-8,-16,4) \sim (-2,-4,1)$$

$\alpha: -2x-4y+z=k$ $\quad [(-2x-4y-6z+2)\lambda + (-2x-4y-4z)(1-\lambda) = \ldots$

$\Rightarrow -6\lambda+4\lambda-4=1 \quad \lambda = -\frac{5}{2}$

$\Rightarrow k=5$

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -2x-4y+z=5 \right\}$$

$\beta: -2x-4y+z=h \qquad r \in \beta \Rightarrow h=2$

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -2x-4y+z=2 \right\}$$

$\boxed{\alpha \cap \beta = \emptyset}$ (le due equazioni sono banalmente incompatibili)

Esercizio 2. Si consideri il sistema lineare in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} 2x + 2ky + 2kz = 2(\alpha + k) \\ -x + 3y + 2kz = 3 - \alpha \\ -x + 3y + 3kz = 6 \end{cases}.$$

1. Trova i valori di α e k per cui il sistema ammette una e una sola soluzione;
2. Per $\alpha = k = 1$ risolvi il sistema.

Svolgimento:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2k & 3-\alpha \\ -1 & 3 & 3k & 6 \\ 1 & k & k & \alpha+k \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}+\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2k & 3-\alpha \\ 0 & 0 & k & 3+\alpha \\ 0 & k+3 & 3k & 3+k \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2k & 3-\alpha \\ 0 & k+3 & 3k & 3+\alpha \\ 0 & 0 & k & 3+k \end{array}\right)$$

Una e una sola soluzione $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{k \neq 0, -3}$

$$\boxed{\alpha = k = 1} \Rightarrow (A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 4 \end{cases}$$

Esercizio 3. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 2 \\ i & 0 & -1+2i \\ 2 & -1-2i & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -i+2 & 4 \\ i+2 & 1 & -1+2i \\ 4 & -1-2i & 1 \end{pmatrix}$$

Calcola

1. traccia di A, B, $A+B$, AB;
2. determinante di A, B, $A+B$, AB.

Svolgimento:

oss A, B Hermitiane $\Rightarrow$ traccia e determinante in $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tr} A = 0 \\ \operatorname{tr} B = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{tr}(A+B) = 0+3 = 3$$

$$\det A = 2\operatorname{Re}[2(-i)(-1+2i)] = 8$$

$$\det B = 1 + 2\operatorname{Re}[4(-i+2)(-1+2i)] - 16 - |i+2|^2 - |-1-2i|^2 = -25$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = -200$$

$$AB = \begin{pmatrix} 9-2i & * & * \\ * & 6+2i & * \\ * & * & 13 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{tr}(AB) = 28$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & -2i-2 & 6 \\ 2i-2 & 1 & -2+4i \\ 6 & -2-4i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A+B) = 1 + 2\operatorname{Re}[6(-2i+2)(-2+4i)] - 36 - |2i-2|^2 - |-2+4i|^2 =$$

$$= -15$$

Esercizio 4. Sia $S \subset \mathbb{R}^5$. Dare la definizione di $S^\perp$ rispetto al prodotto scalare standard e dimostrare che se $v_1, v_2 \in S^\perp$, allora $2v_1 + -12v_2 \in S^\perp$.

Svolgimento:

$S \subset \mathbb{R}^5$

$$S^\perp \overset{def}{=} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{5} x_i s_i = 0 \quad \forall \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{pmatrix} \in S \right\}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} \in S^\perp \iff \forall s \in S \;\; \sum x_i s_i = 0 \quad (1)$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_5 \end{pmatrix} \in S^\perp \iff \forall s \in S \;\; \sum y_i s_i = 0 \quad (2)$$

$$2v_1 - 12v_2 = \begin{pmatrix} 2x_1 - 12y_1 \\ \vdots \\ 2x_5 - 12y_5 \end{pmatrix}$$

$$\forall s \in S \qquad \sum (2x_i - 12y_i) s_i = 2 \underbrace{\sum x_i s_i}_{\overset{(1)}{=} 0} - 12 \underbrace{\sum y_i s_i}_{\overset{(2)}{=} 0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2v_1 - 12v_2 \in S^\perp$$

$\square$