Esercizio 4. Sia $T : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare.

1. Scrivere la definizione di nucleo di T.
2. Dimostrare che se T è iniettiva allora $\dim V \leq \dim W$.

Svolgimento:

1.

$$\operatorname{Ker} T = T^{-1}(0_W) = \{ v \in V \mid T(v) = 0_W \}$$

2. Se T è iniettiva $\operatorname{Ker} T = \{0_V\}$, $\dim \operatorname{Ker} T = 0$.

Per la formula della dimensione,

$$\dim V = \dim \operatorname{Im} V + \dim \operatorname{Ker} V = \dim \operatorname{Im} V$$

Poiché $\operatorname{Im} V \subseteq W$, $\dim \operatorname{Im} V \leq \dim W$.

Quindi

$$\dim V \leq \dim W$$

c.v.d.

Esame di GEOMETRIA - 9 CFU (Appello del 20 Giugno 2016, A)

Cognome: SARACCO	Nome: ALBERTO					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Siano $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ e $\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ due basi di $\mathbb{R}^2$.

1. Calcolare le coordinate di $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ rispetto alle base $\mathcal{B}$.
2. Calcolare la matrice di cambiamento di base $M(\mathcal{B}', \mathcal{B})$.

Svolgimento:

1.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -x+y \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2 = x \\ 1 = -x+y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Pertanto $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

2. La matrice di cambiamento di base ha come colonne i vettori della base B scritti in coordinate rispetto alla base B'.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{B'} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ x+y \end{bmatrix} \dots$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{B'} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} -x \\ x+y \end{bmatrix} \dots$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quindi $M(B', B) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^5$, si considerino i sottospazi

$$W_1 : x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5 = 0, \qquad W_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 + x_5 = 0. \end{cases}$$

1. Determinare una base e la dimensione di $W_1 \cap W_2$.
2. Determinare una base ortonormale di $W_1^{\perp}$.

Svolgimento:

1\. $W_1 \cap W_2$ ha equazioni cartesiane

$$\begin{array}{l} \mathrm{II} \\ \mathrm{I} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \qquad\quad -2x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \qquad\quad = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 \qquad\qquad + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc} x_4 & x_3 & x_1 & x_2 & x_5 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{IV}-\mathrm{I}} \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 & 3 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{IV}+3\mathrm{II}} \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} x_4 & x_3 & x_1 & x_2 & x_5 \end{array}$$
$$\xrightarrow{2\mathrm{IV}+3\mathrm{III}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -13 \end{bmatrix}$$

Il rango è $4 \Rightarrow \dim W_1 \cap W_2 = 5 - 4 = 1$

Base di un vettore.

Ponendo $x_5 = 4$, si ottiene $x_2 = -13$, $x_1 = 15$, $x_3 = -6$, $x_4 = -22$

$$\mathcal{B}_{W_1 \cap W_2} = \left\{ \begin{bmatrix} 15 \\ -13 \\ -6 \\ 22 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

2\. I vettori di $W_1^{\perp}$ hanno prodotto scalare nullo coi vettori di W_1. Pertanto i vettori di $W_1^{\perp}$ sono tutti multipli di $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$,

Calcolando $\|v\| = \sqrt{7}$, pertanto una base ortonormale di $W_1^{\perp}$ è

$$\mathcal{B}_{W_1^{\perp}} = \left\{ \frac{v}{\|v\|} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{7} \\ 1/\sqrt{7} \\ -1/\sqrt{7} \\ 0 \\ -2/\sqrt{7} \end{bmatrix} \right\}$$

Esercizio 3. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

trovare una matrice ortogonale U ed una matrice diagonale D tale che $U^T A U = D$.

Svolgimento:

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda Id_3) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda =$$
$$= -(\lambda - 3)^2 \lambda$$

Autovettori:

$\lambda = 0 \qquad V_0 = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \text{[illegible]} \end{bmatrix} \right)$

$\lambda = 3 \qquad V_3 = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$

Trovo una base ortonormale di V_0: $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

Trovo una base ortonormale di V_3:

$$\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Quindi $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$S = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$