Corso di laurea in Tecniche dell'edilizia
Istituzioni di Analisi Matematica
a.a. 2008/09 - I compitino (aprile 2009)

Ecco i testi delle cinque diverse versioni del compitino. Alla fine dei testi, le soluzioni dei compitini.
Compitino 7 aprile

1. Sia $\varphi : [-2, 2] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\varphi(t) = (t^3 - 3t, 3t^2).$$

   (a) $\varphi(-2) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\varphi(2) =$

   (b) φ è chiusa (V) (F)

   (c) $\varphi'(t) =$

   (d) φ è regolare (V) (F)

   (e) φ è semplice (V) (F)

   (f) Sia r la retta normale a φ nel punto $t = 1$. L'equazione cartesiana di r è

   (A) $x = -2$ $\qquad$ (B) $y = 3$
   (C) $3x + 2y = 0$ $\qquad$ (D) $2x - y - 2 = 0$
   (E) $y = -2$ $\qquad$ (F) nessuna delle precedenti.

   (g) Calcolare la lunghezza di φ.

2. (a) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$4u'' + 8u' + 4u = 0.$$

   (b) Determinare una soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$4u'' + 8u' + 4u = (4t + 1)e^t.$$

   (c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 4u'' + 8u' + 4u = (4t + 1)e^t \\ u(0) = 2 \\ u'(0) = -1 \end{cases}$$

3. (a) Determinare le soluzioni stazionarie dell'equazione differenziale

$$8u' = 4(u^2 - 1)t.$$

   (b) Determinare le soluzioni non stazionarie dell'equazione differenziale

$$8u' = 4(u^2 - 1)t.$$

   (c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 8u' = 4(u^2 - 1)t \\ u(0) = -1 \end{cases}$$

Fila B

1. Sia $\varphi : [e^{-1}, e] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\varphi(t) = (-4t, t^2 - 2\log t).$$

   (a) $\varphi(e^{-1}) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\varphi(e) =$

   (b) φ è chiusa (V) (F)

   (c) $\varphi'(t) =$

   (d) φ è regolare (V) (F)

   (e) φ è semplice (V) (F)

   (f) Sia r la retta tangente a φ nel punto $t = 1$. L'equazione cartesiana di r è

   (A) $x = -4$ $\qquad$ (B) $y = 1$
   (C) $x + 4y = 0$ $\qquad$ (D) $x + 2y - 2 = 0$
   (E) $x = 1$ $\qquad$ (F) nessuna delle precedenti.

   (g) Calcolare la lunghezza di φ.

2. (a) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$u'' + 4u = 0.$$

   (b) Determinare una soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$u'' + 4u = \cos(2t).$$

   (c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' + 4u = \cos(2t) \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = -1 \end{cases}$$

3. (a) Determinare le soluzioni stazionarie dell'equazione differenziale

$$6u' = (u^2 - 9)t.$$

   (b) Determinare le soluzioni non stazionarie dell'equazione differenziale

$$6u' = (u^2 - 9)t.$$

   (c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 6u' = (u^2 - 9)t \\ u(0) = -3 \end{cases}$$

Fila C

1. Sia $\varphi : [0,4] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\varphi(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2, \frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}}\right).$$

   (a) $\varphi(0) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\varphi(4) =$

   (b) φ è chiusa (V) (F)

   (c) $\varphi'(t) =$

   (d) φ è regolare (V) (F)

   (e) φ è semplice (V) (F)

   (f) Sia r la retta normale a φ nel punto $t = 1$. L'equazione cartesiana di r è

   (A) $6x = -1$ $\qquad$ (B) $5y = 4$
   (C) $24x + 5y = 0$ $\qquad$ (D) $2x + 4y - 2 = 0$
   (E) $6y = -1$ $\qquad$ (F) nessuna delle precedenti.

   (g) Calcolare la lunghezza di φ.

2. (a) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$2u'' + 2\sqrt{3}u' + 2u = 0.$$

   (b) Determinare una soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$2u'' + 2\sqrt{3}u' + 2u = \cos t.$$

   (c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2u'' + 2\sqrt{3}u' + 2u = \cos t \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 1 \end{cases}$$

3. (a) Determinare le soluzioni stazionarie dell'equazione differenziale

$$6u' = 3\frac{t}{u^2}.$$

   (b) Determinare le soluzioni non stazionarie dell'equazione differenziale

$$6u' = 3\frac{t}{u^2}.$$

   (c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 6u' = 3\frac{t}{u^2} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Fila D

1. Sia $\varphi : [e^{-1}, e] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\varphi(t) = (t^2 - 2\log t, 4t).$$

   (a) $\varphi(e^{-1}) =$ $\qquad\qquad$ $\varphi(e) =$

   (b) φ è chiusa (V) (F)

   (c) $\varphi'(t) =$

   (d) φ è regolare (V) (F)

   (e) φ è semplice (V) (F)

   (f) Sia r la retta normale a φ nel punto $t = 1$. L'equazione cartesiana di r è

   (A) $x = 1$ $\qquad$ (B) $y = 4$
   (C) $4x - y = 0$ $\qquad$ (D) $x - 4y - 1 = 0$
   (E) $y = 1$ $\qquad$ (F) nessuna delle precedenti.

   (g) Calcolare la lunghezza di φ.

2. (a) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$3u'' + 6u' + 3u = 0.$$

   (b) Determinare una soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$3u'' + 6u' + 3u = (3t + 1)\cos t.$$

   (c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 3u'' + 6u' + 3u = (3t + 1)\cos t \\ u(0) = -2 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

3. (a) Determinare le soluzioni stazionarie dell'equazione differenziale

$$6u' = 3\frac{(u^2 - 4)}{t}.$$

   (b) Determinare le soluzioni non stazionarie dell'equazione differenziale

$$6u' = 3\frac{(u^2 - 4)}{t}.$$

   (c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 6u' = 3\dfrac{(u^2 - 4)}{t} \\ u(1) = 2 \end{cases}$$

Fila A

1. Sia $\varphi : [e^{-1}, e] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\varphi(t) = \left(2 \log t, t + \frac{1}{t}\right).$$

   (a) $\varphi(e^{-1}) =$ $\qquad\qquad$ $\varphi(e) =$

   (b) φ è chiusa (V) (F)

   (c) $\varphi'(t) =$

   (d) φ è regolare (V) (F)

   (e) φ è semplice (V) (F)

   (f) Sia r la retta normale a φ nel punto $t = 1$. L'equazione cartesiana di r è

   (A) $x = 2$ $\qquad$ (B) $y = 0$
   (C) $4x - 2y = 8$ $\qquad$ (D) $2x - 4y - 2 = 0$
   (E) $y = 2$ $\qquad$ (F) nessuna delle precedenti.

   (g) Calcolare la lunghezza di φ.

2. (a) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$4u'' + u = 0.$$

   (b) Determinare una soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$4u'' + u = \sin(t + \cos t)$$

   (c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 4u'' + u = \sin t + \cos t \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = -1 \end{cases}$$

3. (a) Determinare le soluzioni stazionarie dell'equazione differenziale

$$2u' = 4(u^2 + 1)t^2.$$

   (b) Determinare le soluzioni non stazionarie dell'equazione differenziale

$$2u' = 4(u^2 + 1)t^2.$$

   (c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2u' = 4(u^2 + 1)t^2 \\ u(1) = 2 \end{cases}$$

SOLUZIONI

Compitino 7 aprile

1. Sia $\varphi : [-2, 2] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\varphi(t) = (t^3 - 3t, 3t^2).$$

   (a) $\varphi(-2) = (-2, 12)$ $\qquad\qquad$ $\varphi(2) = (2, 12)$

   (b) φ è chiusa (V) (**F**) Falso: infatti $\varphi(-2) \neq \varphi(2)$

   (c) $\varphi'(t) = (3t^2 - 3, 6t)$

   (d) φ è regolare (**V**) (F) Vero: $\varphi(t) \neq (0, 0)$ per ogni $t \in (-2, 2)$

   (e) φ è semplice (V) (**F**) Falso: $\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (0, 1) = \varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, cioè la curva passa due volte dallo stesso punto

   (f) Sia r la retta normale a φ nel punto $t = 1$. L'equazione cartesiana di r è

   (A) $x = -2$ $\qquad$ (**B**) $y = 3$
   (C) $3x + 2y = 0$ $\qquad$ (D) $2x - y - 2 = 0$
   (E) $y = -2$ $\qquad$ (F) nessuna delle precedenti.

   $\varphi(1) = (-2, 3)$, $\varphi'(1) = (0, 6)$. Pertanto l'equazione di r è $(x - (-2)) \cdot 0 + (y - 3) \cdot 6 = 0$, ovvero $y = 3$.

   (g) Calcolare la lunghezza di φ.
   Per il teorema di rettificabilità:

$$L(\varphi) = \int_{-2}^{2} |\varphi'(t)|\, dt \;=\; \int_{-2}^{2} \sqrt{(3t^2 - 3)^2 + (6t)^2}\, dt \;=\; \int_{-2}^{2} \sqrt{9t^4 - 18t^2 + 36 + 36t^2}\, dt \;=$$

$$= \int_{-2}^{2} \sqrt{9t^4 + 18t^2 + 36}\, dt \;=\; \int_{-2}^{2} \sqrt{(3t^2 + 3)^2}\, dt \;=\; \int_{-2}^{2} |3t^2 + 3| dt \;=$$

$$= \int_{-2}^{2} 3t^2 + 3\, dt \;=\; \int_{-2}^{2} 3t^2\, dt + 3\int_{-2}^{2} 1\, dt \;=\; \cdot\, t^3\Big|_{-2}^{2} + 3 \cdot t\Big|_{-2}^{2} \;=\; 8 + 8 + 3(2 + 2) \;=\; 28$$

2. (a) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$4u'' + 8u' + 4u = 0.$$

   Dividendo l'equazione per 4 si ottiene l'equazione equivalente $u'' + 2u' + u = 0$. Il polinomio associato è $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$, che si annulla per $\lambda_{1,2} = -1$ ($\Delta = 0$, due soluzioni coincidenti).
   Pertanto la soluzione generale è

$$u(t) \;=\; (c_1 + tc_2)e^{-t}.$$

   (b) Determinare una soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$4u'' + 8u' + 4u = (4t + 1)e^t.$$

L'omogenea associata l'abbiamo appena trattata. Il termine in t, $g(t)$ è della forma $P(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, con $P(t) = 4t+1$, di primo grado, $\alpha = 1$, $\beta = 0$. La molteplicità μ di $\alpha + \beta\sqrt{-1} = 1$ è zero (non è soluzione del polinomio associato all'omogenea). Pertanto una soluzione particolare è della forma

$$v(t) \;=\; (at+b)e^t.$$

Derivando e sostituendo nell'equazione differenziale, si ricava

$$\begin{aligned} v'(t) &= (at+a+b)e^t \\ v''(t) &= (at+2a+b)e^t \end{aligned}$$

$$4(at+2a+b)e^t + 8(at+a+b)e^t + 4(at+b)e^t = (16at+16a+16b)e^t = (4t+1)e^t,$$

da cui $a = 1/4$, $b = -3/16$. Quindi

$$v(t) \;=\; \left(\frac{1}{4}t - \frac{3}{16}\right)e^t.$$

(c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 4u'' + 8u' + 4u = (4t+1)e^t \\ u(0) = 2 \\ u'(0) = -1 \end{cases}$$

Dai punti precedenti sappiamo già che la soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$u(t) \;=\; (c_1 + tc_2)e^{-t} + \left(\frac{1}{4}t - \frac{3}{16}\right)e^t.$$

Derivando ricaviamo

$$u'(t) \;=\; (c_2 - c_1 - tc_2)e^{-t} + \left(\frac{1}{4}t + \frac{1}{16}\right)e^t.$$

Sostituendo i dati iniziali ricaviamo

$$\begin{cases} u(0) = c_1 - \dfrac{3}{16} = 2 \\ u'(0) = c_2 - c_1 + \frac{1}{16} = -1 \end{cases},$$

da cui $c_1 = \frac{35}{16}$, $c_2 = \frac{9}{8}$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$u(t) \;=\; \left(\frac{35}{16} + \frac{9}{8}t\right)e^{-t} + \left(\frac{1}{4}t - \frac{3}{16}\right)e^t.$$

3. (a) Determinare le soluzioni stazionarie dell'equazione differenziale

$$8u' = 4(u^2-1)t.$$

Ponendo $u^2 - 1 = 0$, si ottengono come soluzioni stazionarie $u(t) = 1$ e $u(t) = -1$.

(b) Determinare le soluzioni non stazionarie dell'equazione differenziale

$$8u' = 4(u^2-1)t.$$

Se $u \neq \pm 1$, allora l'equazione è equivalente a

$$\frac{2u'}{u^2-1} = t.$$

Pertanto una soluzione verifica

$$\int \frac{2}{u^2-1}\,dt \;=\; \int t\,dt$$

Osservando che

$$\frac{2}{u^2-1} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}$$

e integrando si ottiene

$$\log|u-1| - \log|u+1| = \frac{t^2}{2} + k$$

con $k \in \mathbb{R}$. Svolgendo alcuni passaggi algebrici si arriva a

$$u(t) = \frac{1+ce^{t^2/2}}{1-ce^{t^2/2}}$$

con $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 8u' = 4(u^2-1)t \\ u(0) = -1 \end{cases}$$

Basta osservare che la soluzione stazionaria $u(t) = -1$ passa per il punto voluto. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è $u(t) = -1$.

Fila B – bianca

1. Sia $\varphi : [e^{-1}, e] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\varphi(t) = (-4t, t^2 - 2\log t).$$

(a) $\varphi(e^{-1}) = \left(-\frac{4}{e}, \frac{1}{e^2} + 2\right)$ $\qquad\qquad$ $\varphi(e) = (-4e, e^2 - 2)$

(b) φ è chiusa (V) (**F**) Falso: $\varphi(e^{-1}) \neq \varphi(e)$

(c) $\varphi'(t) = \left(-4, 2t - \frac{2}{t}\right)$

(d) φ è regolare (**V**) (F) Vero: $\varphi'(t) \neq (0,0)$ per tutti i $t \in (e^{-1}, e)$

(e) φ è semplice (**V**) (F) Vero: la prima coordinata è data da una funzione banalmente iniettiva

(f) Sia r la retta tangente a φ nel punto $t = 1$. L'equazione cartesiana di r è

(A) $x = -4$	(**B**) $y = 1$
(C) $x + 4y = 0$	(D) $x + 2y - 2 = 0$
(E) $x = 1$	(F) nessuna delle precedenti.

$\varphi(1) = (-4, 1)$, $\varphi'(1) = (-4, 0)$. Pertanto l'equazione di r è $(x-(-4))\cdot 0 - (y-1)\cdot(-4) = 0$, ovvero $y = 1$.

(g) Calcolare la lunghezza di φ.

Per il teorema di rettificabilità

$$L_\varphi = \int_{e^{-1}}^{e} |\varphi'(t)|\,dt = \int_{e^{-1}}^{e} \sqrt{(-4)^2 + \left(2t - \frac{2}{t}\right)^2}\,dt = \int_{e^{-1}}^{e} \sqrt{16 + 4t^2 - 8 + \frac{4}{t^2}}\,dt =$$

$$= \int_{e^{-1}}^{e} \sqrt{4t^2 + 8 + \frac{4}{t^2}}\,dt = \int_{e^{-1}}^{e} \sqrt{\left(2t + \frac{2}{t}\right)^2}\,dt = \int_{e^{-1}}^{e} \left|2t + \frac{2}{t}\right|\,dt = \int_{e^{-1}}^{e} 2t + \frac{2}{t}\,dt =$$

$$= \int_{e^{-1}}^{e} 2t\,dt + 2\int_{e^{-1}}^{e} \frac{1}{t}\,dt = t^2\big|_{e^{-1}}^{e} + 2\log(t)\big|_{e^{-1}}^{e} = e^2 - \frac{2}{e^2} + 4$$

2. (a) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$u'' + 4u = 0.$$

Il polinomio associato è $P(\lambda) = \lambda^2 + 4$, che non ha soluzioni reali ($\Delta < 0$). $p = 0$, $q = 2$. Pertanto la soluzione generale è

$$u(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t).$$

(b) Determinare una soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$u'' + 4u = \cos(2t).$$

L'omogenea associata l'abbiamo appena trattata. Il termine in t, $g(t)$, è della forma $P(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, con $P(t) = 1$ (di grado zero), $\alpha = 0$, $\beta = 2$. Siccome $\alpha = p$, $\beta = q$, la molteplicità è $\mu = 1$. Pertanto una soluzione particolare è data da

$$v(t) = t(a\cos(2t) + b\sin(2t)).$$

Derivando e sostituendo nell'equazione differenziale, si trova

$$v'(t) = (2bt + a)\cos(2t) + (-2at + b)\sin(2t)$$

$$v''(t) = (-4at + 4b)\cos(2t) + (-4bt - 4a)\sin(2t)$$

$$((-4at+4b)\cos(2t)+(-4bt-4a)\sin(2t))+4t(a\cos(2t)+b\sin(2t)) = 4b\cos(2t)-4a\sin(2t) = \cos(2t),$$

da cui $a = 0$, $b = 1/4$. Quindi

$$v(t) = \frac{1}{4}t\sin(2t)$$

(c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' + 4u = \cos(2t) \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = -1 \end{cases}$$

La soluzione generale dell'equazione completa è data da

$$u(t) = c_1\cos(2t) + \left(\frac{1}{4}t + c_2\right)\sin(2t).$$

Derivando e sostituendo i dati iniziali del problema di Cauchy si ottiene

$$u'(t) = 2\left(\frac{1}{4}t + c_2\right)\cos(2t) + \left(\frac{1}{4} - 2c_1\right)\sin(2t)$$

$$1 = u(0) = c_1, \quad 1 = u'(0) = 2c_2,$$

da cui $c_1 = 1$ e $c_2 = -\frac{1}{2}$, ovvero la soluzione del problema di Cauchy è data da

$$u(t) = \cos(2t) + \left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{2}\right)\sin(2t).$$

3. (a) Determinare le soluzioni stazionarie dell'equazione differenziale

$$6u' = (u^2-9)t.$$

Le soluzioni stazionarie si hanno quando $u^2 - 9 = 0$, ovvero sono $u(t) = \pm 3$.

(b) Determinare le soluzioni non stazionarie dell'equazione differenziale

$$6u' = (u^2-9)t.$$

Se $u \neq \pm 3$, possiamo dividere entrambi i membri per (u^2-9) e integrare rispetto a t:

$$\int \frac{6}{u^2-9}\,dt \;=\; \int t\,dt.$$

Osservando che

$$\frac{6}{u^2-9} \;=\; -\frac{1}{u+3}+\frac{1}{u-3}$$

si ottiene

$$-\log|u+3| + \log|u-3| = \frac{t^2}{2}+k$$

con $k \in \mathbb{R}$, da cui

$$u(t) \;=\; \frac{3+3ce^{t^2/2}}{1-ce^{t^2/2}}$$

con $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 6u' = (u^2-9)t \\ u(0) = -3 \end{cases}$$

Notiamo che la soluzione stazionaria $u(t) = -3$ è una soluzione dell'equazione differenziale che soddisfa il dato iniziale. Pertanto è soluzione del problema di Cauchy.

Fila C – verde

1. Sia $\varphi : [0,4] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\varphi(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2, \frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}}\right).$$

(a) $\varphi(0) = (0,0)$ $\qquad$ $\varphi(4) = \left(\frac{1}{3}4^3 - \frac{1}{2}4^2, \frac{4}{5}4^{5/2}\right) = \left(\frac{40}{3}, \frac{128}{5}\right)$

(b) φ è chiusa (V) (**F**) Falso: $\varphi(0) \neq \varphi(4)$.

(c) $\varphi'(t) = \left(t^2 - t, 2t^{\frac{3}{2}}\right)$

(d) φ è regolare (**V**) (F) Vero: $\varphi'(t) \neq (0,0)$ per $t \in (0,4)$. Nota bene: in $t_0 = 0$ non si può calcolare il vettore tangente.

(e) φ è semplice (**V**) (F) Vero: dato che la funzione che definisce la seconda coordinata è iniettiva, la curva è semplice.

(f) Sia r la retta normale a φ nel punto $t = 1$. L'equazione cartesiana di r è

(A) $6x = -1$ (**B**) $5y = 4$
(C) $24x + 5y = 0$ (D) $2x + 4y - 2 = 0$
(E) $6y = -1$ (F) nessuna delle precedenti.

$\varphi(1) = \left(\frac{1}{6}, \frac{4}{5}\right)$, $\varphi'(1) = (0, 2)$. Pertanto l'equazione della retta normale è $\left(x - \frac{1}{6}\right) \cdot 0 + \left(y - \frac{4}{5}\right) \cdot 2 = 0$, ovvero $5y = 4$.

(g) Calcolare la lunghezza di φ. Per il teorema di rettificabilità

$$L_\varphi = \int_0^4 |\varphi'(t)|\, dt = \int_0^4 \sqrt{(2t^{3/2})^2 + (t^2 - t)^2}\, dt = \int_0^4 \sqrt{4t^3 + t^4 - 2t^3 + t^2}\, dt =$$
$$= \int_0^4 \sqrt{t^4 + 2t^3 + t^2}\, dt = \int_0^4 \sqrt{(t^2 + t)^2}\, dt = \int_0^4 \left|t^2 + t\right|\, dt = \int_0^4 t^2 + t\, dt =$$
$$= \int_0^4 t^2\, dt + \int_0^4 t\, dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^4 + \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^4 = \frac{64}{3} + 8 = \frac{88}{3}$$

2. (a) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$2u'' + 2\sqrt{3}u' + 2u = 0.$$

Dividendo per 2, si ottiene l'equazione equivalente $u'' + \sqrt{3}u' + u = 0$. Passando al polinomio associato ($P(\lambda) = \lambda^2 + \sqrt{3}\lambda + 1$) si ottiene che $P(\lambda) = 0$ mai ($\Delta < 0$). $p = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $q = \frac{1}{2}$. Pertanto la soluzione generale è data da

$$u(t) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}(c_1 \cos(\frac{1}{2}t) + c_2 \sin(\frac{1}{2}t))$$

(b) Determinare una soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$2u'' + 2\sqrt{3}u' + 2u = \cos t.$$

L'omogenea associata l'abbiamo appena trattata. Il termine in t, $g(t)$, è della forma $e^{\alpha t}\cos(\beta t)P(t)$, con $\alpha = 0$, $\beta = 1$ e $P(t) = 1$ di grado zero. La molteplicità μ di $\alpha + \beta\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$ è zero. Pertanto una soluzione particolare dell'equazione è della forma

$$v(t) = a\cos(t) + b\sin(t).$$

Derivando e sostituendo nell'equazione differenziale, si ricava:

$$v'(t) = b\cos(t) - a\sin(t)$$
$$v''t) = -a\cos(t) - b\sin(t)$$
$$2(-a\cos(t) - b\sin(t)) + 2\sqrt{3}(b\cos(t) - a\sin(t)) + 2(a\cos(t) + b\sin(t)) =$$
$$= 2\sqrt{3}(b\cos(t) - a\sin(t)) = \cos(t),$$

da cui $a = 0, b = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Pertanto una soluzione dell'equazione è data da

$$v(t) = \frac{\sqrt{3}}{6}\sin(t).$$

(c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2u'' + 2\sqrt{3}u' + 2u = \cos t \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 1 \end{cases}$$

La soluzione generale dell'equazione completa è data da

$$u(t) \;=\; e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}\left(c_1 \cos\left(\frac{1}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}\sin(t).$$

Derivando e sostituendo i dati iniziali del problema di Cauchy, si ottiene

$$u'(t) \;=\; e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}\left(\left(\frac{1}{2}c_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}c_1\right)\cos\left(\frac{1}{2}t\right) + \left(-\frac{1}{2}c_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2\right)\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}\cos(t)$$

$$1 = u(0) = c_1, \quad 1 = u'(0) = \frac{1}{2}c_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

da cui $c_1 = 1, c_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è:

$$u(t) \;=\; e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}\left(\cos\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}\sin(t).$$

3. (a) Determinare le soluzioni stazionarie dell'equazione differenziale

$$6u' = 3\frac{t}{u^2}.$$

Le soluzioni stazionarie si trovano ponendo $\frac{1}{u^2} = 0$. Questo non accade mai. Pertanto non ci sono soluzioni stazionarie.

(b) Determinare le soluzioni non stazionarie dell'equazione differenziale

$$6u' = 3\frac{t}{u^2}.$$

Moltiplicando da entrambi i lati dell'equazione per u^2, e integrando rispetto a t, si ottiene:

$$\int 2u^2 u'\, dt \;=\; \int t\, dt$$

da cui

$$\frac{2u^3}{3} = \frac{t^2}{2} + k$$

con $k \in \mathbb{R}$. Esplicitando u, si ottiene

$$\sqrt[3]{\frac{3t^2}{4} + c}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

(c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 6u' = 3\frac{t}{u^2} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Sostituendo il dato iniziale del problema di Cauchy nella soluzione generale appena trovata si ha

$$1 = u(0) = \sqrt[3]{c}$$

Da cui $c = 1$. Ovvero la soluzione del problema di Cauchy cercata è

$$\sqrt[3]{\frac{3t^2}{4} + 1}$$

Fila D – gialla

1. Sia $\varphi : [e^{-1}, e] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\varphi(t) = (t^2 - 2\log t, 4t).$$

   (a) $\varphi(e^{-1}) = \left(\frac{1}{e^2} + 2, \frac{4}{e}\right)$ $\qquad\qquad$ $\varphi(e) = (e^2 - 2, 4e)$

   (b) φ è chiusa (V) (**F**) Falso: $\varphi(e^{-1}) \neq \varphi(e)$

   (c) $\varphi'(t) = \left(2t - \frac{2}{t}, 4\right)$

   (d) φ è regolare (**V**) (F) Vero: $\varphi'(t) \neq (0,0)$ per tutti i $t \in (e^{-1}, e)$

   (e) φ è semplice (**V**) (F) Vero: la seconda coordinata è data da una funzione banalmente iniettiva

   (f) Sia r la retta normale a φ nel punto $t = 1$. L'equazione cartesiana di r è

   (A) $x = 1$ $\qquad$ (**B**) $y = 4$
   (C) $4x - y = 0$ $\qquad$ (D) $x - 4y - 1 = 0$
   (E) $y = 1$ $\qquad$ (F) nessuna delle precedenti.

   $\varphi(1) = (1, 4)$, $\varphi'(1) = (0, 4)$. Pertanto l'equazione di r è $(x-1)\cdot 0 + (y-4)\cdot 4 = 0$, ovvero $y = 4$.

   (g) Calcolare la lunghezza di φ.
   Per il teorema di rettificabilità

$$L_\varphi = \int_{e^{-1}}^{e} |\varphi'(t)|\, dt = \int_{e^{-1}}^{e} \sqrt{\left(2t - \frac{2}{t}\right)^2 + 4^2}\, dt = \int_{e^{-1}}^{e} \sqrt{4t^2 - 8 + \frac{4}{t^2} + 16}\, dt =$$

$$= \int_{e^{-1}}^{e} \sqrt{4t^2 + 8 + \frac{4}{t^2}}\, dt = \int_{e^{-1}}^{e} \sqrt{\left(2t + \frac{2}{t}\right)^2}\, dt = \int_{e^{-1}}^{e} \left|2t + \frac{2}{t}\right| dt = \int_{e^{-1}}^{e} 2t + \frac{2}{t}\, dt =$$

$$= \int_{e^{-1}}^{e} 2t\, dt + 2\int_{e^{-1}}^{e} \frac{1}{t}\, dt = t^2\big|_{e^{-1}}^{e} + 2\log(t)\big|_{e^{-1}}^{e} = e^2 - \frac{2}{e^2} + 4$$

2. (a) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$3u'' + 6u' + 3u = 0.$$

   Semplificando e passando al polinomio associato si ottiene $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ che ha due soluzioni coincidenti ($\Delta = 0$): $\lambda_{1,2} = -1$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione è

$$u(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t}.$$

   (b) Determinare una soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$3u'' + 6u' + 3u = (3t + 1)\cos t.$$

   Abbiamo già risolto l'equazione omogenea. Il termine in t è della forma $g(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)P(t)$, dove $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P(t)$ è di primo grado. Osserviamo che la molteplicità μ è zero (poichè $\alpha + \beta\sqrt{-1} \neq \lambda$). Pertanto una soluzione particolare è data da

$$v(t) = (at + b)\cos t + (ct + d)\sin t.$$

Derivando e sostituendo nell'equazione si ottiene

$$v'(t) = (ct + a + d)\cos t + (-at + c - b)\sin t$$

$$v''(t) = (-at + 2c - b)\cos t + (-ct - 2a - d)\sin t$$

$(3t+1)\cos t = 3((-at+2c-b)\cos t+(-ct-2a-d)\sin t)+6((ct+a+d)\cos t+(-at+c-b)\sin t)+$
$+3((at + b)\cos t + (ct + d)\sin t) = (6ct + 6a + 6c + 6d)\cos t + (-6at - 6a + 6c - 6b)\sin t,$

da cui $6c = 3$, $6(a + c + d) = 1$, $-6a = 0$, $6(-a + c - b) = 0$, ovvero $a = 0, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}, d = -\frac{1}{3}$. Pertanto una soluzione particolare dell'equazione è

$$v(t) = \frac{1}{2}\cos t + \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{3}\right)\sin t.$$

(c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 3u'' + 6u' + 3u = (3t + 1)\cos t \\ u(0) = -2 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$u(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{3}\right)\sin t$$

Derivando e imponendo le condizioni iniziali del problema di Cauchy si ottiene

$$u'(t) = (-c_2 t + c_2 - c_1)e^{-t} + \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{3}\right)\cos t$$

$$-2 = u(0) = c_1 + \frac{1}{2}, \quad 0 = u'(0) = c_2 - c_1 - \frac{1}{3}$$

ovvero $c_1 = -\frac{5}{2}, c_2 = -\frac{13}{6}$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$u(t) = -\left(\frac{5}{2} + \frac{13}{6}t\right)e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{3}\right)\sin t$$

3. (a) Determinare le soluzioni stazionarie dell'equazione differenziale

$$6u' = 3\frac{(u^2 - 4)}{t}.$$

Le soluzioni stazionarie si hanno per $u^2 - 4 = 0$, ovvero le soluzioni stazionarie sono $u(t) = \pm 2$.

(b) Determinare le soluzioni non stazionarie dell'equazione differenziale

$$6u' = 3\frac{(u^2 - 4)}{t}.$$

Se $u \neq \pm 2$, posso dividere entrambi i membri per $3(u^2 - 4)$ e integrare rispetto a t, ottenendo

$$\int \frac{2}{u^2 - 4}u'\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt.$$

Osservando che $\frac{2}{u^2-4} = -\frac{1}{2(u+2)} + \frac{1}{2(u-2)}$, si ha

$$\frac{1}{2}\log\frac{|u-2|}{|u+2|} \;=\; \log|t| + k,$$

con $k \in \mathbb{R}$, da cui si ottiene la soluzione dell'equazione differenziale

$$u(t) \;=\; \frac{2+2ct^2}{1-ct^2}$$

con $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Notiamo che la soluzione è valida solo per gli intervalli $t < -\frac{1}{\sqrt{c}}$, $-\frac{1}{\sqrt{c}} < t < 0$, $0 < t < \frac{1}{\sqrt{c}}$ e $\frac{1}{\sqrt{c}} < t$, e non per tutti i $t \in \mathbb{R}$. (perché?)

(c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 6u' = 3\dfrac{(u^2-4)}{t} \\ u(1) = 2 \end{cases}$$

Osservando che $u(t) = 2$ è una soluzione stazionaria che soddisfa la condizione iniziale, è una soluzione del problema di Cauchy.

Fila A – rosa

1. Sia $\varphi : [e^{-1}, e] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\varphi(t) = \left(2\log t, t + \frac{1}{t}\right).$$

(a) $\varphi(e^{-1}) = \left(-2, e + \frac{1}{e}\right)$ $\qquad\qquad$ $\varphi(e) = \left(2, e + \frac{1}{e}\right)$

(b) φ è chiusa (V) (**F**) Falso: $\varphi(e^{-1}) \neq \varphi(e)$.

(c) $\varphi'(t) = \left(\frac{2}{t}, 1 - \frac{1}{t^2}\right)$

(d) φ è regolare (**V**) (F) $\varphi'(t) \neq (0,0)$ per ogni $t \in (e^{-1}, e)$.

(e) φ è semplice (**V**) (F) Vero: la prima coordinata è una funzione iniettiva.

(f) Sia r la retta normale a φ nel punto $t = 1$. L'equazione cartesiana di r è

(A) $x = 2$ $\qquad$ (B) $y = 0$
(C) $4x - 2y = 8$ $\qquad$ (D) $2x - 4y - 2 = 0$
(E) $y = 2$ $\qquad$ (**F**) nessuna delle precedenti.

$\varphi(1) = (0,2)$, $\varphi'(1) = (2,0)$. Pertanto l'equazione di r è data da $(x-0)\cdot 2 + (y-2)\cdot 0 = 0$, ovvero $x = 0$.

(g) Calcolare la lunghezza di φ.

$$L_\varphi \;=\; \int_{e^{-1}}^{e} |\varphi'(t)|\,dt \;=\; \int_{e^{-1}}^{e} \sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2}\,dt \;=\; \int_{e^{-1}}^{e} \sqrt{\frac{4}{t^2} + 1 - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}}\,dt \;=$$

$$= \int_{e^{-1}}^{e} \sqrt{1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}}\,dt \;=\; \int_{e^{-1}}^{e} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2}\,dt \;=\; \int_{e^{-1}}^{e} \left|1 + \frac{1}{t^2}\right| dt \;=\; \int_{e^{-1}}^{e} 1 + \frac{1}{t^2}\,dt \;=$$

$$= \int_{e^{-1}}^{e} 1\,dt + 2\int_{e^{-1}}^{e} \frac{1}{t^2}\,dt \;=\; t\big|_{e^{-1}}^{e} - \frac{1}{t}\big|_{e^{-1}}^{e} \;=\; e - \frac{1}{e} - \left(\frac{1}{e} - e\right) \;=\; 2e - \frac{2}{e}$$

2. (a) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$4u'' + u = 0.$$

Passando al polinomio caratteristico $P(\lambda) = 4\lambda^2 + 1$, si ottiene $\Delta < 0$, $p = 0$, $q = \frac{1}{2}$. Pertanto la soluzione generale è data da

$$u(t) \;=\; c_1 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) + c_2 \cos\left(\frac{1}{2}t\right)$$

(b) Determinare una soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$4u'' + u = \sin t + \cos t$$

Abbiamo appena trattato l'omogenea associata. Il termine in t è della forma $g(t) = e^{\alpha t}(P_1(t)\cos(\beta t) + P_2(t)\sin(\beta t))$, con $\alpha = 0$, $\beta = 1$ (pertanto $\mu = 0$) e $p_1(t), P_2(t)$ polinomi di grado zero.
Pertanto una soluzione particolare è della forma

$$v(t) \;=\; a\cos t + b\sin t.$$

Derivando e sostituendo si ricava

$$v'(t) \;=\; b\cos t - a\sin t$$

$$v''(t) \;=\; -a\cos t - b\sin t$$

$$\sin t + \cos t = 4(-a\cos t - b\sin t) + (a\cos t + b\sin t) = -3a\sin t - 3b\cos t$$

da cui $a = b = -\frac{1}{3}$. Pertanto una soluzione particolare è data da

$$v(t) \;=\; -\frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{3}\sin t.$$

(c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 4u'' + u = \sin t + \cos t \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = -1 \end{cases}$$

La soluzione generale dell'equazione completa è

$$u(t) \;=\; c_1 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) + c_2 \cos\left(\frac{1}{2}t\right) - \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{3}\sin t$$

Derivando e sostituendo i dati iniziali, si ha

$$u'(t) \;=\; \frac{1}{2}c_1 \cos\left(\frac{1}{2}t\right) - \frac{1}{2}c_2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) - \frac{1}{3}\cos t + \frac{1}{3}\sin t$$

$$0 = u(0) = c_2 - \frac{1}{3}, \quad -1 = u'(0) = \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{3}$$

da cui $c_1 = -\frac{4}{3}, c_2 = \frac{1}{3}$. Pertanto la soluzione al problema di Cauchy è

$$u(t) \;=\; -\frac{4}{3}\sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{2}t\right) - \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{3}\sin t$$

3. (a) Determinare le soluzioni stazionarie dell'equazione differenziale

$$2u' = 4(u^2 + 1)t^2.$$

Le soluzioni stazionarie si hanno per $u^2 + 1 = 0$, ovvero mai. Non ci sono soluzioni stazionarie.

(b) Determinare le soluzioni non stazionarie dell'equazione differenziale

$$2u' = 4(u^2 + 1)t^2.$$

Dividendo per $4(u^2 + 1)$ e integrando ambo i membri rispetto a t, otteniamo

$$\int \frac{u'}{2(u^2+1)}\,dt = \int t^2\,dt$$

$$\frac{1}{2}\arctan(u) = \frac{1}{3}t^3 + k,$$

con $k \in \mathbb{R}$. Infine

$$u(t) = \tan\left(\frac{2}{3}t^3 + c\right),$$

con $c \in \mathbb{R}$, è la soluzione cercata.

(c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2u' = 4(u^2 + 1)t^2 \\ u(1) = 2 \end{cases}$$

Imponendo la condizione iniziale

$$2 = u(1) = \tan\left(\frac{2}{3} + c\right),$$

si ottiene $c = \arctan 2 - \frac{2}{3}$, e quindi la soluzione cercata è

$$u(t) = \tan\left(\frac{2}{3}t^3 + \arctan 2 - \frac{2}{3}\right).$$