Cognome	Nome	matr.

Corso di laurea in Tecniche dell'edilizia
Istituzioni di Analisi Matematica
a.a. 2008/09 – II compitino – 29/05/09 (fila A)

Compilare immediatamente con i propri dati l'intestazione. Rispondere ai quesiti e svolgere gli esercizi negli appositi spazi motivando le risposte ove necessario. Nelle domande con risposta a scelta, indicarne chiaramente una sola e non aggiungere altro. Nei disegni, evidenziare le parti richieste negli esercizi. Non scrivere a matita (ad eccezione eventualmente dei disegni) e non utilizzare il colore rosso. Non utilizzare correttori (bianchetti o simili). Non è concesso l'uso di calcolatrici o simili.

Le domande a risposta multipla con risposta sbagliata danno punteggio negativo.

Al termine della prova **consegnare solo questo foglio**.

valutazione

1a	1b	1c	1d	1e	1f

2a	2b	2c	3a	3b	3c	3d

voto

1. Sia $f(x,y) = (1-x)(1-y)(x^2+y^2)$.

   (a) Il dominio di f è

$$\operatorname{dom} f \;=$$

   (b) Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) \;=$$

   (c) f ammette punti stazionari (V) (F)

   (d) La matrice Hessiana di f è

$$Hf(x,y) \;=$$

   (e) Determinare la natura degli eventuali punti stazionari di f.

   (f) La retta tangente alla curva di livello $\{f = 0\}$ nel punto $(1,-1)$ è

$$(A) \quad x = 1 \qquad (B) \; x + y = 0$$

$$(C) \quad y = -1 \qquad (D) \; x - y = 2$$

$$(E) \quad 2x + 2y = -1 \quad (F) \text{ nessuna delle precedenti}$$

2. Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $g(x, y) = (x^3 - 2x^2 + x)e^y$ e $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.

   (a) Le derivate parziali di g sono

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \ = \qquad\qquad\qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \ =$$

   (b) Trova l'equazione del piano tangente al grafico di g nel punto $(1, 1, g(1, 1))$.

   (c) Calcola

$$\iint_Q \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\, dx\, dy$$

3. Si considerino la funzione $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $h(x, y) = x^2 - y$ e l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq x \leq y\}$$

(a) Disegnare D.

(b) D è normale rispetto a x. (V) (F)

(c) D è normale rispetto a y. (V) (F)

(d) Calcolare

$$\iint_D h(x, y)\, dx\, dy$$

Cognome	Nome	matr.

Corso di laurea in Tecniche dell'edilizia
Istituzioni di Analisi Matematica
a.a. 2008/09 – II compitino – 29/05/09 (fila B)

Compilare immediatamente con i propri dati l'intestazione. Rispondere ai quesiti e svolgere gli esercizi negli appositi spazi motivando le risposte ove necessario. Nelle domande con risposta a scelta, indicarne chiaramente una sola e non aggiungere altro. Nei disegni, evidenziare le parti richieste negli esercizi. Non scrivere a matita (ad eccezione eventualmente dei disegni) e non utilizzare il colore rosso. Non utilizzare correttori (bianchetti o simili). Non è concesso l'uso di calcolatrici o simili.

Le domande a risposta multipla con risposta sbagliata danno punteggio negativo.

Al termine della prova **consegnare solo questo foglio**.

valutazione

1a	1b	1c	1d	1e	1f

2a	2b	2c	3a	3b	3c	3d

voto

1. Sia $f(x,y) = \frac{(1-x)(1-y)}{(x^2+y^2)}$.

   (a) Il dominio di f è

$$\operatorname{dom} f \ =$$

   (b) Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) \ =$$

   (c) f ammette punti stazionari (V) (F)

   (d) La matrice Hessiana di f è

$$Hf(x,y) \ =$$

   (e) Determinare la natura degli eventuali punti stazionari di f.

   (f) La retta tangente alla curva di livello $\{f = 0\}$ nel punto $(1, -1)$ è

$(A)\ \ x = 1 \qquad (B)\ x + y = 0$

$(C)\ \ y = -1 \qquad (D)\ x - y = 2$

$(E)\ \ 2x + 2y = -1 \quad (F)$ nessuna delle precedenti

2. Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $g(x, y) = e^x(y^3 - 2y^2 + y)$ e $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.

   (a) Le derivate parziali di g sono

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \;=\; \qquad\qquad\qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \;=$$

   (b) Trova l'equazione del piano tangente al grafico di g nel punto $(1, 1, g(1, 1))$.

   (c) Calcola

$$\iint_Q \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\, dx\, dy$$

3. Si considerino la funzione $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $h(x, y) = x^2 - y$ e l'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq x^2\right\}$$

(a) Disegnare D.

(b) D è normale rispetto a x. (V) (F)

(c) D è normale rispetto a y. (V) (F)

(d) Calcolare

$$\iint_D h(x, y)\, dx\, dy$$

Cognome Nome matr.

Corso di laurea in Tecniche dell'edilizia
Istituzioni di Analisi Matematica
a.a. 2008/09 – II compitino – 29/05/09 (fila C)

Compilare immediatamente con i propri dati l'intestazione. Rispondere ai quesiti e svolgere gli esercizi negli appositi spazi motivando le risposte ove necessario. Nelle domande con risposta a scelta, indicarne chiaramente una sola e non aggiungere altro. Nei disegni, evidenziare le parti richieste negli esercizi. Non scrivere a matita (ad eccezione eventualmente dei disegni) e non utilizzare il colore rosso. Non utilizzare correttori (bianchetti o simili). Non è concesso l'uso di calcolatrici o simili.

Le domande a risposta multipla con risposta sbagliata danno punteggio negativo.

Al termine della prova **consegnare solo questo foglio**.

valutazione

1a	1b	1c	1d	1e	1f

2a	2b	2c	3a	3b	3c	3d

voto

1. Sia $f(x,y) = \frac{(1+x)(1+y)}{(x^2+y^2)}$.

   (a) Il dominio di f è

$$\operatorname{dom} f \; =$$

   (b) Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) \; =$$

   (c) f ammette punti stazionari (V) (F)

   (d) La matrice Hessiana di f è

$$Hf(x,y) \; =$$

   (e) Determinare la natura degli eventuali punti stazionari di f.

   (f) La retta tangente alla curva di livello $\{f = 0\}$ nel punto $(1, -1)$ è

$(A)\;\; x = 1 \qquad (B)\; x + y = 0$

$(C)\;\; y = -1 \qquad (D)\; x - y = 2$

$(E)\;\; 2x + 2y = -1 \quad (F)$ nessuna delle precedenti

2. Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $g(x, y) = (3x^3 - 2x^2 + x)(\sin y)$ e $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.

   (a) Le derivate parziali di g sono

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \ = \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \ =$$

   (b) Trova l'equazione del piano tangente al grafico di g nel punto $(1, 0, g(1, 0))$.

   (c) Calcola

$$\iint_Q \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\, dx\, dy$$

3. Si considerino la funzione $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $h(x, y) = x - 2y$ e l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y \leq 4, x \geq 0, y \leq 0\}$$

(a) Disegnare D.

(b) D è normale rispetto a x. (V) (F)

(c) D è normale rispetto a y. (V) (F)

(d) Calcolare

$$\iint_D h(x, y)\, dx\, dy$$

Cognome	Nome	matr.

Corso di laurea in Tecniche dell'edilizia
Istituzioni di Analisi Matematica
a.a. 2008/09 – II compitino – 29/05/09 (fila D)

Compilare immediatamente con i propri dati l'intestazione. Rispondere ai quesiti e svolgere gli esercizi negli appositi spazi motivando le risposte ove necessario. Nelle domande con risposta a scelta, indicarne chiaramente una sola e non aggiungere altro. Nei disegni, evidenziare le parti richieste negli esercizi. Non scrivere a matita (ad eccezione eventualmente dei disegni) e non utilizzare il colore rosso. Non utilizzare correttori (bianchetti o simili). Non è concesso l'uso di calcolatrici o simili.

Le domande a risposta multipla con risposta sbagliata danno punteggio negativo.

Al termine della prova **consegnare solo questo foglio**.

valutazione

1a	1b	1c	1d	1e	1f

2a	2b	2c	3a	3b	3c	3d

voto

1. Sia $f(x, y) = (1 - x)(1 + y)(x^2 + y^2)$.

   (a) Il dominio di f è

$$\operatorname{dom} f \;=$$

   (b) Il gradiente di f è

$$\nabla f(x, y) \;=$$

   (c) f ammette punti stazionari (V) (F)

   (d) La matrice Hessiana di f è

$$Hf(x, y) \;=$$

   (e) Determinare la natura degli eventuali punti stazionari di f.

   (f) La retta tangente alla curva di livello $\{f = 0\}$ nel punto $(1, 1)$ è

$$(A)\;\; x = 1 \qquad (B)\; x + y = 2$$

$$(C)\;\; y = 1 \qquad (D)\; x - y = 0$$

$$(E)\;\; 2x + 2y = -1 \quad (F)\; \text{nessuna delle precedenti}$$

2. Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $g(x, y) = (x^2 + x)(y^2 - y)$ e $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.

   (a) Le derivate parziali di g sono

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \;=\; \qquad\qquad\qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \;=$$

   (b) Trova l'equazione del piano tangente al grafico di g nel punto $(1, 1, g(1, 1))$.

   (c) Calcola

$$\iint_Q \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\, dx\, dy$$

3. Si considerino la funzione $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $h(x,y) = xy$ e l'insieme

$$D \;=\; \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -y \leq x \leq y^2,\ 0 \leq y \leq 2\right\}$$

(a) Disegnare D.

(b) D è normale rispetto a x. (V) (F)

(c) D è normale rispetto a y. (V) (F)

(d) Calcolare

$$\iint_D h(x,y)\,dx\,dy$$

Cognome Nome matr.

Corso di laurea in Tecniche dell'edilizia
Istituzioni di Analisi Matematica
a.a. 2008/09 – compito finale – 29/05/09

Compilare immediatamente con i propri dati l'intestazione. Rispondere ai quesiti e svolgere gli esercizi negli appositi spazi motivando le risposte ove necessario. Nelle domande con risposta a scelta, indicarne chiaramente una sola e non aggiungere altro. Nei disegni, evidenziare le parti richieste negli esercizi. Non scrivere a matita (ad eccezione eventualmente dei disegni) e non utilizzare il colore rosso. Non utilizzare correttori (bianchetti o simili). Non è concesso l'uso di calcolatrici o simili.

Le domande a risposta multipla con risposta sbagliata danno punteggio negativo.

Al termine della prova **consegnare solo questo foglio**.

1. Si considerino la funzione $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $h(x,y) = xy$ e l'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le x^2,\ 0 \le x \le 2\right\}$$

(a) Disegnare D.

(b) D è normale rispetto a x. (**V**) (F) Vero: infatti tagliando D lungo $\{x = \text{costante}\}$ si ottengono intervalli i cui estremi variano con continuità rispetto a x.

(c) D è normale rispetto a y. (**V**) (F) Vero: infatti tagliando D lungo $\{y = \text{costante}\}$ si ottengono intervalli i cui estremi variano con continuità rispetto a y.

(d) Calcolare

$$\iint_D h(x,y)\,dx\,dy$$

Sfruttando la normalità del dominio, calcolo

$$\iint_D h(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=x^2} xy\,dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=2} \left[\int \frac{xy^2}{2}\,dy \right]_{y=0}^{y=x^2} dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \frac{x^5}{2}\,dx = \left[\frac{x^6}{12}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{16}{3}$$

2. Sia $\varphi : [1, e] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\varphi(t) = (t \log t, t - \log t)\,.$$

(a) $\varphi(1) = (0, 1)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\varphi(e) = (e, e - 1)$

(b) φ è chiusa (V) (**F**) Falso: $\varphi(1) \neq \varphi(e)$.

(c) $\varphi'(t) = (\log t + 1, 1 - \frac{1}{t})$

(d) φ è regolare (**V**) (F) Vero: la prima coordinata è definita da una funzione crescente, quindi la prima componente del gradiente non è mai nulla.

(e) φ è semplice (**V**) (F) Vero: la prima coordinata è definita da una funzione crescente, quindi iniettiva.

(f) Sia r la retta normale a φ nel punto $t = 2$. L'equazione cartesiana di r è

(A) $y + (2 + \log 2)x = 3 \log 2$
(B) $x + 2y = 4$
(C) $x + y = 2 - \log 2$
(D) $y + (2 + \log 2)x = 3 \log 2 + (\log 2)^2$
(E) $x = 2 \log 2$
(**F**) nessuna delle precedenti.

Abbiamo $\varphi(2) = (2 \log 2, 2 - \log 2)$. $\varphi'(2) = (1 - \log 2, \frac{1}{2})$. Pertanto, la retta normale è data da:

$$(1 - \log 2)(x - 2 \log 2) + \frac{1}{2}(y - 2 + \log 2) = 0$$

$$(1 - \log 2)x + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} \log 2 - 2(\log 2)^2 + 1$$

3. (a) Determinare le soluzioni stazionarie dell'equazione differenziale

$$3tu' = \frac{t^2}{(u-1)(u-3)}.$$

$$g(u) = \frac{1}{(u-1)(u-3)}$$

è diversa da zero per ogni valore di u. Pertanto non ci sono soluzioni stazionarie. Notare che se $u = 1$ o $u = 3$ l'equazione perde di senso.

(b) Determinare le soluzioni non stazionarie dell'equazione differenziale

$$3tu' = \frac{t^2}{(u-1)(u-3)}.$$

Per $u \neq 1, 3$ si ha

$$\begin{aligned} \int (u-1)(u-3)\, du &= \int \frac{t^2}{3t}\, dt \\ \int (u^2 - 4u + 3)\, du &= \int \frac{t}{3}\, dt \\ \varphi(u) = \frac{u^3}{3} - 2u^2 + 3u &= \frac{t^2}{6} + k \end{aligned}$$

Lasciamo in forma implicita la soluzione. La funzione $\varphi(u)$ è invertibile negli intervalli $(-\infty, 1)$ (è crescente), $(1, 3)$ (è decrescente), e $(3, +\infty)$ (è crescente).

$$u = \Phi^{-1}\left(\frac{t^2}{6} + k\right)$$

(c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 3tu' = \dfrac{t^2}{(u-1)(u-3)} \\ u(1) = 2 \end{cases}$$

Sostituendo $t = 1$, $u = 2$ si ha

$$\frac{8}{3} - 8 + 6 = \frac{1}{6} + k,$$

da cui $k = \frac{1}{2}$.

Pertanto u è data implicitamente da

$$\begin{aligned} \frac{u^3}{3} - 2u^2 + 3u &= \frac{t^2}{6} + \frac{1}{2} \\ u(t) &= \Phi^{-1}\left(\frac{t^2}{6} + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

4. Sia $f(x,y) = (1+x^2)(1+y^2)xy$.

   (a) Il dominio di f è

$$\operatorname{dom} f \;=\; \mathbb{R}^2$$

   (b) Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) \;=\; ((1+3x^2)(y+y^3)), (1+3y^2)(x+x^3))$$

   (c) f ammette punti stazionari (**V**) (F) Vero: l'iunico punto stazionario è $(0,0)$.

   (d) La matrice Hessiana di f è

$$Hf(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} 6x(y+y^3) & (1+3x^2)(1+3y^2) \\ (1+3x^2)(1+3y^2) & 6y(x+x^3) \end{pmatrix}$$

   (e) Determinare la natura degli eventuali punti stazionari di f.
   La matrice Hessiana in $(0,0)$ è

$$Hf(0,0) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   che ha determinante negativo. Pertanto $(0,0)$ è un punto di sella.