Cognome Nome matr.

Corso di laurea in Tecniche dell'edilizia
Istituzioni di Analisi Matematica
a.a. 2008/09 – compito finale – 16/06/09 (fila A)

Compilare immediatamente con i propri dati l'intestazione. Rispondere ai quesiti e svolgere gli esercizi negli appositi spazi motivando le risposte ove necessario. Nelle domande con risposta a scelta, indicarne chiaramente una sola e non aggiungere altro. Nei disegni, evidenziare le parti richieste negli esercizi. Non scrivere a matita (ad eccezione eventualmente dei disegni) e non utilizzare il colore rosso. Non utilizzare correttori (bianchetti o simili). Non è concesso l'uso di calcolatrici o simili.

Le domande a risposta multipla con risposta sbagliata danno punteggio negativo.

Al termine della prova **consegnare solo questo foglio**.

1. Si considerino la funzione $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $h(x,y) = x^2 y$ e l'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\right\}$$

   (a) **(2 punti)** Disegnare D.

   (b) **(±1 punto)** D è normale rispetto a x. (V) (F)

   (c) **(±1 punto)** D è normale rispetto a y. (V) (F)

   (d) **(5 punti)** Calcolare

$$\iint_D h(x,y)\, dx\, dy$$

2. Sia $\varphi : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\varphi(t) = \begin{cases} (\cos(2t), \sin(t)) & \textit{if } 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ \left(\frac{4}{\pi}t - 3, -\frac{2}{\pi}t + 2\right) & \textit{if } \frac{\pi}{2} \le t \le \pi \end{cases}$$

(a) **(± 1 punto)** φ è una curva (V) (F)

(b) **(1 punto)** Disegna il supporto di φ

(c) **(± 1 punto)** φ è chiusa (V) (F)

(d) **(4 punti)** $\varphi'(t) =$

(e) **(± 1 punto)** φ è regolare (V) (F)

(f) **(± 1 punto)** φ è regolare a tratti (V) (F)

3. (a) **(3 punti)** Determinare le soluzioni stazionarie dell'equazione differenziale

$$3t^2u' = \frac{t}{u^2 + 4u + 3}.$$

(b) **(3 punti)** Determinare le soluzioni non stazionarie dell'equazione differenziale

$$3t^2u' = \frac{t}{u^2 + 4u + 3}.$$

(c) **(3 punti)** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 3t^2u' = \dfrac{t}{u^2 + 4u + 3} \\ u(1) = 2 \end{cases}$$

4. Sia $f(x,y) = \frac{e^{x^2}}{e^{xy}}$.

   (a) **(1 punto)** Il dominio di f è

$$\operatorname{dom} f \ =$$

   (b) **(2 punti)** Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) \ =$$

   (c) **($\pm$1 punto)** f ammette punti stazionari (V) (F)

   (d) **(2 punti)** La matrice Hessiana di f è

$$Hf(x,y) \ =$$

   (e) **(3 punti)** Determinare la natura degli eventuali punti stazionari di f.

Cognome Nome matr.

Corso di laurea in Tecniche dell'edilizia
Istituzioni di Analisi Matematica
a.a. 2008/09 – compito finale – 16/06/09 (fila B)

Compilare immediatamente con i propri dati l'intestazione. Rispondere ai quesiti e svolgere gli esercizi negli appositi spazi motivando le risposte ove necessario. Nelle domande con risposta a scelta, indicarne chiaramente una sola e non aggiungere altro. Nei disegni, evidenziare le parti richieste negli esercizi. Non scrivere a matita (ad eccezione eventualmente dei disegni) e non utilizzare il colore rosso. Non utilizzare correttori (bianchetti o simili). Non è concesso l'uso di calcolatrici o simili.

Le domande a risposta multipla con risposta sbagliata danno punteggio negativo.

Al termine della prova **consegnare solo questo foglio**.

1. Si considerino la funzione $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $h(x, y) = x$ e l'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\right\}$$

(a) **(2 punti)** Disegnare D.

(b) **(± 1 punto)** D è normale rispetto a x. (V) (F)

(c) **(± 1 punto)** D è normale rispetto a y. (V) (F)

(d) **(5 punti)** Calcolare

$$\iint_D h(x, y)\, dx\, dy$$

2. Sia $\varphi : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\varphi(t) = \begin{cases} \left(\frac{4}{\pi}t - 1, -\frac{2}{\pi}t + 1\right) & \textit{if } 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ (-\cos(2t), \cos(t)) & \textit{if } \frac{\pi}{2} \le t \le \pi \end{cases}$$

(a) **(±1 punto)** φ è una curva (V) (F)

(b) **(1 punto)** Disegna il supporto di φ

(c) **(±1 punto)** φ è chiusa (V) (F)

(d) **(4 punti)** $\varphi'(t) =$

(e) **(±1 punto)** φ è regolare (V) (F)

(f) **(±1 punto)** φ è regolare a tratti (V) (F)

3. (a) **(3 punti)** Determinare le soluzioni stazionarie dell'equazione differenziale

$$3t^2u' = \frac{u^2 + 4u + 3}{t}.$$

(b) **(3 punti)** Determinare le soluzioni non stazionarie dell'equazione differenziale

$$3t^2u' = \frac{u^2 + 4u + 3}{t}.$$

(c) **(3 punti)** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 3t^2u' = \dfrac{u^2 + 4u + 3}{t} \\ u(1) = 2 \end{cases}$$

4. Sia $f(x,y) = \frac{e^{xy}}{e^{x^2}}$.

(a) **(1 punto)** Il dominio di f è

$$\operatorname{dom} f \;=$$

(b) **(2 punti)** Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) \;=$$

(c) **(±1 punto)** f ammette punti stazionari (V) (F)

(d) **(2 punti)** La matrice Hessiana di f è

$$Hf(x,y) \;=$$

(e) **(3 punti)** Determinare la natura degli eventuali punti stazionari di f.

Cognome Nome matr.

Corso di laurea in Tecniche dell'edilizia
Istituzioni di Analisi Matematica
a.a. 2008/09 – compito finale – 16/06/09 (fila C)

Compilare immediatamente con i propri dati l'intestazione. Rispondere ai quesiti e svolgere gli esercizi negli appositi spazi motivando le risposte ove necessario. Nelle domande con risposta a scelta, indicarne chiaramente una sola e non aggiungere altro. Nei disegni, evidenziare le parti richieste negli esercizi. Non scrivere a matita (ad eccezione eventualmente dei disegni) e non utilizzare il colore rosso. Non utilizzare correttori (bianchetti o simili). Non è concesso l'uso di calcolatrici o simili.

Le domande a risposta multipla con risposta sbagliata danno punteggio negativo.

Al termine della prova **consegnare solo questo foglio**.

1. Si considerino la funzione $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $h(x, y) = x^2$ e l'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

   (a) **(2 punti)** Disegnare D.

   (b) **(± 1 punto)** D è normale rispetto a x. (V) (F)

   (c) **(± 1 punto)** D è normale rispetto a y. (V) (F)

   (d) **(5 punti)** Calcolare

$$\iint_D h(x, y)\, dx\, dy$$

2. Sia $\varphi : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\varphi(t) = \begin{cases} (\cos(t), \sin(t)) & \textit{if } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \left(\frac{2}{\pi}t - 1, -\frac{2}{\pi}t + 2\right) & \textit{if } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}$$

(a) **(1 punto)** Disegna il supporto di φ

(b) **($\pm$1 punto)** φ è chiusa (V) (F)

(c) **(4 punti)** $\varphi'(t) =$

(d) **(3 punti)** Calcola la lunghezza di φ

3. (a) **(3 punti)** Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' + u' = u.$$

(b) **(3 punti)** Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' + u' = u + t.$$

(c) **(3 punti)** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' + u' = u + t \\ u(0) = 100 \end{cases}$$

4. Sia $f(x, y) = \frac{y^2+1}{x^2+1}$.

(a) **(1 punto)** Il dominio di f è

$$\operatorname{dom} f \;=$$

(b) **(2 punti)** Il gradiente di f è

$$\nabla f(x, y) \;=$$

(c) **($\pm$1 punto)** f ammette punti stazionari (V) (F)

(d) **(2 punti)** La matrice Hessiana di f è

$$Hf(x, y) \;=$$

(e) **(3 punti)** Determinare la natura degli eventuali punti stazionari di f.

Cognome | Nome | matr.

Corso di laurea in Tecniche dell'edilizia
Istituzioni di Analisi Matematica
a.a. 2008/09 – compito finale – 16/06/09 (fila D)

Compilare immediatamente con i propri dati l'intestazione. Rispondere ai quesiti e svolgere gli esercizi negli appositi spazi motivando le risposte ove necessario. Nelle domande con risposta a scelta, indicarne chiaramente una sola e non aggiungere altro. Nei disegni, evidenziare le parti richieste negli esercizi. Non scrivere a matita (ad eccezione eventualmente dei disegni) e non utilizzare il colore rosso. Non utilizzare correttori (bianchetti o simili). Non è concesso l'uso di calcolatrici o simili.

Le domande a risposta multipla con risposta sbagliata danno punteggio negativo.

Al termine della prova **consegnare solo questo foglio**.

1. Si considerino la funzione $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $h(x, y) = y^2$ e l'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

(a) **(2 punti)** Disegnare D.

(b) **(± 1 punto)** D è normale rispetto a x. (V) (F)

(c) **(± 1 punto)** D è normale rispetto a y. (V) (F)

(d) **(5 punti)** Calcolare

$$\iint_D h(x, y)\, dx\, dy$$

2. Sia $\varphi : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\varphi(t) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}t, -\frac{2}{\pi}t + 1\right) & \textit{if } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ (-\sin(t), \cos(t)) & \textit{if } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}$$

(a) **(1 punto)** Disegna il supporto di φ

(b) **($\pm$1 punto)** φ è chiusa (V) (F)

(c) **(4 punti)** $\varphi'(t) =$

(d) **(3 punti)** Calcola la lunghezza di φ

3. (a) **(3 punti)** Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' + 4u' = u.$$

(b) **(3 punti)** Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' + 4u' = u + 4t.$$

(c) **(3 punti)** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' + 4u' = u + 4t \\ u(0) = 10 \end{cases}$$

4. Sia $f(x,y) = \frac{x^2+2x+1}{y^2+1}$.

(a) **(1 punto)** Il dominio di f è

$$\operatorname{dom} f \;=$$

(b) **(2 punti)** Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) \;=$$

(c) **($\pm$1 punto)** f ammette punti stazionari (V) (F)

(d) **(2 punti)** La matrice Hessiana di f è

$$Hf(x,y) \;=$$

(e) **(3 punti)** Determinare la natura degli eventuali punti stazionari di f.