GEOMETRIA E ALGEBRA
ESERCIZI

ALBERTO SARACCO

1. Insiemi

Consideriamo i seguenti insiemi:

$$A_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 15\} \quad A_2 = \{a, b, c, d, 1, 2, 3\}$$

$$A_3 = \{\textit{lettere dell'alfabeto italiano}\} \quad A_4 = \{n \in A_1 \mid n \textit{ è pari}\}$$

Esercizio 1.1. Trova gli insiemi $U_{ij} = A_i \cup A_j$ e $I_{ij} = A_i \cap A_j$, per oogni scelta di $i, j = 1, 2, 3, 4$, $i \neq j$.

Esercizio 1.2. Quali sono le inclusioni tra gli insiemi trovati?

Esercizio 1.3. Trova l'insieme $A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$. Coincide con $A_1 \cup A_2$? È un caso o quessto vale per ogni coppia di insiemi?

Esercizio 1.4. Dati A, B insiemi è vera la seguente uguaglianza?

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

(Aiuto: prova prima a vedere se è valida per alcune scelte di A e B, poi prova ad usare i diagrammi di Venn)

Esercizio 1.5. Dati A, B insiemi è vera la seguente uguaglianza?

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

(Aiuto: prova prima a vedere se è valida per alcune scelte di A e B, poi prova ad usare i diagrammi di Venn)

2. Logica

Esercizio 2.1. Siano P e Q due proposizioni. Scrivi la tabella di verità delle seguenti proposizioni:

(1) $(P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow \textit{ non } Q)$;
(2) $(P \Rightarrow Q) \vee (\textit{non } P \Rightarrow \textit{ non } Q)$;
(3) $(P \Rightarrow Q) \vee (\textit{non } P \Rightarrow Q)$;
(4) $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \textit{ non } Q)$;
(5) $(P \Rightarrow Q) \wedge (\textit{non } P \Rightarrow \textit{ non } Q)$;
(6) $(P \Rightarrow Q) \wedge (\textit{non } P \Rightarrow Q)$;
(7) $P \vee \textit{non } Q$;
(8) $P \wedge \textit{non } P$;
(9) $((P \Rightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q$;
(10) $((P \Rightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$.

Date: January 20, 2011.

3. Relazioni

Considera le seguenti relazioni:

(1) $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \equiv_{12N})$ data da
$$x, y \in \mathbb{Z}, \quad x \equiv_{12N} y \iff \frac{x-y}{12} \in \mathbb{N};$$
(2) $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \equiv_{12Z})$ data da
$$x, y \in \mathbb{Z}, \quad x \equiv_{12Z} y \iff \frac{x-y}{12} \in \mathbb{N};$$
(3) $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, R_3)$ data da
$$R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x(y+1) = 0\};$$
(4) $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, R_4)$ data da
$$R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y + 1 = 0\};$$
(5) $([-1, 2], [-1, 0], R_5)$ data da
$$R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y + 1 = 0\};$$
(6) $([-1, 0], [-1, 2], R_6)$ data da
$$R_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y + 1 = 0\};$$
(7) Sia $A = \{$*rotazioni nel piano attorno a un punto*$\}$. Chiamo r_0 la rotazione di angolo nullo, ovvero l'identità, e $\circ$ la composizione tra rotazioni. Allora definisco la relazione (A, A, R_7)
$$R_7 = \{(\alpha, \beta) \in A^2 \mid \alpha \circ \beta = r_0\};$$
(8) $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, R_8)$ data da
$$R_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\};$$
(9) $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, R_9)$ data da
$$R_9 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\};$$
(10) $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \geq)$ data da
$$x, y \in \mathbb{N}, \quad x \geq y \iff x - y \in \mathbb{N};$$
(11) $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, id)$ data da
$$id = \{(n, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}\};$$
(12) $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, T)$ data da
$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \in \mathbb{Z}\}.$$

Esercizio 3.1. Per ognuna delle relazioni sopra definite, rispondere alle seguenti domande.

- È una funzione? Se sì, è iniettiva, suriettiva o biiettiva?
- È una relazione d'equivalenza? Se sì, quali sono le sue classi d'equivalenza?
- È una relazione d'ordine parziale? Se sì, è una relazione d'ordine totale?

4. Matrici

Esercizio 4.1. Considera le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quali matrici puoi sommare tra loro? Quali puoi moltiplicare tra loro? Calcola tutte le somme e i prodotti possibili (somma e moltiplica una matrice anche con sè stessa, se possibile).

5. Caratteristica, rango e sistemi lineari

Esercizio 5.1. Calcola la caratteristica delle matrici della pagina precedente e riducile a scala.

Esercizio 5.2. Delle matrici della pagina precedente, quali sono invertibili? Trova le inverse.

Esercizio 5.3. Risolvi i seguenti sistemi lineari

$$\begin{cases} x+y \qquad = 2 \\ x-y+2z = 3 \\ x+y-2z = 4 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x+y \qquad +3t = 2 \\ x-y+2z+2t = 3 \\ x+y-3z+4t = 4 \\ \qquad +2t+3z = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ x-y+2z = 3 \\ x-y-2t = 4 \\ x-y-t+z = 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x+y = z \\ x+z = y \\ z+y = x \\ x+y+z = 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} x+y = z+t \\ x+z = y+t \\ z+y = x+t \\ x+y+z = 3 \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} 3(x+y) = z+t \\ x+z-3y+t = 1 \\ 2z+y = x+t-1 \\ x+2y+3t+z = 3 \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} x+y-1 = 0 \\ x+z+1 = 0 \\ z+y = x+t \\ 3x+y+z = 2 \end{cases} \tag{7}$$

6. Piani e rette

Esercizio 6.1. Trova le equazioni cartesiane e parametriche dei seguenti oggetti geometrici

(1) $r_1 \subset \mathbb{R}^2$ retta passante per il punto $A = (3, 2)$ e l'origine;
(2) $r_2 \subset \mathbb{R}^2$ retta passante per il punto $B = (3, -1)$ con vettore direzione $\mathbf{v}_2 = (-1, 3)$;
(3) $r_3 \subset \mathbb{R}^2$ retta passante per il punto $C = (1, -1)$ normale al vettore $\mathbf{n}_3 = (1, 3)$;
(4) $r_4 \subset \mathbb{R}^2$ retta passante per il punto $B = (3, -1)$ perpendicolare alla retta r_3;
(5) $r_5 \subset \mathbb{R}^2$ retta passante per il punto $B = (3, -1)$ parallela alla retta r_1;
(6) π_6 piano passante per i punti $D = (0, 0, 1)$, $E = (1, 1, 0)$ e $F = (1, 1, 1)$;
(7) π_7 il piano parallelo al piano π_6 passante per il punto $G = (2, 2, 2)$;
(8) π_8 il piano perpendicolare al piano π_6 passante per i punti D e G;
(9) π_9 il piano passante per il punto E perpendicolare al vettore $\mathbf{n}_9 = (9, 1, 10)$;
(10) π_{10} il piano passante per l'origine parallelo ai vettori $\mathbf{n}_9$ e $\mathbf{v}_{10} = (1, 2, 3)$;
(11) le intersezioni tra i piani precedenti, a due a due;
(12) le rette perpendicolari ai piani precedenti passanti rispettivamente per i punti D per il piano π_6, G per il piano π_7, e per l'origine per gli altri tre piani.

Esercizio 6.2. Calcola i prodotti scalari e vettoriali tra i seguenti vettori:

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 2, 1), \quad \mathbf{v}_3 = (-1, 0, -1),$$
$$\mathbf{v}_4 = (4, 1, -1), \quad \mathbf{v}_5 = (-1, -2, -1), \quad \mathbf{v}_6 = (-2, 3, -1),$$
$$\mathbf{v}_7 = (1, -1, 0), \quad \mathbf{v}_8 = (-1, 10, 0), \quad \mathbf{v}_9 = (0, 0, -1).$$

Esercizio 6.3. I tre vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ $\mathbf{v}_3$ del piano formano tra di loro tre angoli di $\frac{2}{3}\pi$. Sapendo che $\mathbf{v}_1 = (1, 3)$ e che $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = (0, 0)$, che vettori sono $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$?

Dipartimento di Matematica, Università di Parma, Parco Area delle Scienze 53/A, I-43124 Parma, Italy

E-mail address: `alberto.saracco@unipr.it`