GEOMETRIA E ALGEBRA
LABORATORIO DI MATEMATICA
SCIENZE DELL'ARCHITETTURA

ALBERTO SARACCO

Contents

1. Cenni di base sulla teoria elementare degli insiemi 2
1.1. Insiemi 2
1.2. Un po' di logica 3
1.3. Prodotto cartesiano di insiemi 7
1.4. Relazioni e funzioni 7
2. Il piano $\mathbb{R}^2$ e lo spazio $\mathbb{R}^3$ (parte I) 10
2.1. Retta, piano e spazio 10
2.2. Vettori del piano e dello spazio 11
2.3. Spazi vettoriali. $\mathbb{R}^n$ 12
2.4. Funzioni lineari tra spazi vettoriali 13
3. Matrici 15
3.1. Somma e prodotto tra matrici. Cenni sull'inversa 17
3.2. Determinanti 22
3.3. Combinazioni lineari e (in)dipendenza lineare 24
3.4. Caratteristica e rango 27
3.5. Sistemi lineari 31
3.6. Risoluzione di sistemi lineari 34
3.7. Inversa di una matrice 39
3.8. Sistemi lineari omogenei 42
4. Il piano $\mathbb{R}^2$ e lo spazio $\mathbb{R}^3$ (parte II) 42
4.1. Prodotto scalare 42
4.2. Prodotto vettoriale 45
4.3. Prodotto misto 46
4.4. I postulati di Euclide 47
4.5. Geometria nel piano: rette 48
4.6. Geometria nello spazio: rette e piani 49
References 53

Date: March 13, 2012.

Queste dispense sono conformi a quanto fatto a lezione. Per alcuni argomenti sono liberamente ispirate al libro di testo di Anichini e Conti [1].

1. Cenni di base sulla teoria elementare degli insiemi

1.1. **Insiemi.** Consideriamo concetti primitivi (cioè sufficientemente chiari da non necessitare di una definizione) il concetto di insieme e quello di appartenenza.

Abitualmente si indica con una lettera latina maiuscola un insieme e con una lettera latina minuscola un elemento di un insieme. Per dire "l'elemento a appartiene all'insieme A" si scrive $a \in A$, oppure $A \ni a$. Per dire "l'elemento b non appartiene all'insieme A" si scrive $b \notin A$, oppure $A \not\ni b$.

Un insieme è dato quando sono noti i suoi elementi, ovvero gli elementi che gli appartengono. Un insieme può quindi essere dato per elencazione degli elementi che lo compongono

$$A = \{1, 2, 3\}$$

o tramite una proprietà[1] che gli elementi devono soddisfare

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n < 4\}.$$

Con $\mathbb{N}$ abbiamo indicato l'insieme dei numeri naturali. Useremo sempre questa notazione, insieme alle seguenti:
$\mathbb{N}_+$: insieme dei numeri naturali zero escluso;
$\mathbb{Z}$: insieme dei numeri interi;
$\mathbb{Q}$: insieme dei numeri razionali;
$\mathbb{R}$: insieme dei numeri reali.

Definizione 1.1. Si dice che A è un **sottoinsieme** di B (e si scrive $A \subseteq B$, o $B \supseteq A$) se ogni elemento di A appartiene a B.

Lemma 1.1. *Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, allora $A \subseteq C$.*

Dimostrazione. Sia $x \in A$ un elemento qualsiasi. Allora $x \in B$ (poichè $A \subseteq B$). Allora $x \in C$ (poichè $B \subseteq C$). Questo vale per ogni elemento di A, quindi $A \subseteq C$. □

Definizione 1.2. Si dice che $A = B$ se e solo se $A \subseteq B$ e $A \supseteq B$, ovvero se A e B sono formati dagli stessi elementi.

Definizione 1.3. Si dice che A è propriamente contenuto in B ($A \subsetneq B$ o $B \supsetneq A$) se e solo se è contenuto in B e non è uguale a B.

Definizione 1.4. Si dice che A è un **insieme vuoto** se non ha elementi.

Lemma 1.2. *Se A è un insieme vuoto, allora A è sottoinsieme di ogni altro insieme B.*

---

[1] Quella che stiamo esponendo è chiamata teoria intuitiva degli insiemi, e pone qualche problema. Il più noto è il paradosso di Russell: consideriamo l'insieme di Russell R definito tramite una proprietà:

$$R = \{A \text{ insieme} \mid A \notin A\}.$$

R è cioè l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sè stessi.

Domandiamoci se $R \in R$. Se fosse $R \in R$, allora sarebbe $R \notin R$, per la proprietà che definisce l'insieme di Russell. Se fosse $R \notin R$, sarebbe $R \in R$, sempre per lo stesso motivo. Quindi non si riesce a stabilire su R appartiene o meno all'insieme.

Il problema (autoreferenzialità) non si porrà per gli insiemi che considereremo, quindi possiamo ignorarlo.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $A \not\subseteq B$. Allora c'è un elemento $a \notin B$, $a \in A$. Ma A non ha elementi. Assurdo. □

Corollary 1.3. *Se A e B sono insiemi vuoti, allora $A = B$.*

Dimostrazione. Poichè A è un insieme vuoto, allora $A \subseteq B$ per il lemma precedente. Poichè B è un insieme vuoto, allora $B \subseteq A$ per il lemma precedente. Quindi $A = B$ □

Come conseguenza, **l'insieme vuoto** è unico e può pertanto essere indicato con un simbolo: $\emptyset$.

Definizione 1.5. Siano A e B insiemi. Si definisco i seguenti insiemi:

intersezione: $A \cap B \;=\; \{x \mid x \in A \text{ } e \text{ } x \in B\}$;
unione: $A \cup B \;=\; \{x \mid x \in A \text{ } o \text{ } x \in B\}$;
complementare: fissato un insieme (universale) U, il complementare di A (in U) è $A^c_U \;=\; \{x \in U \mid x \notin A\}$;
differenza insiemistica: $A \setminus B \;=\; \{x \mid x \in A \text{ } e \text{ } x \notin B\}$.

Osserviamo che $A^c_U = U \setminus A$.

Proposition 1.4. *Siano A, B, C insiemi. Valgono le seguenti proprietà dell'unione e dell'intersezione:*

(1) $A \cap B \subseteq A$; $A \cap B \subseteq B$;
(2) $A \cup B \supseteq A$; $A \cup B \supseteq B$;
(3) $A \cap B = A$ *se e solo se* $A \subseteq B$ *se e solo se* $A \cup B = B$;
(4) *se* $C \subseteq A$, $C \subseteq B$ *allora* $C \subseteq A \cap B$;
(5) *se* $C \supseteq A$, $C \supseteq B$ *allora* $C \supseteq A \cup B$;
(6) $A \cap A = A = A \cup A$;
(7) $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$;
(8) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
(9) $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cup \emptyset = A$;
(10) *se* $A \cup B = A \cup C$ *e* $A \cap B = A \cap C$, *allora* $B = C$.

Dimostrazione. Le proprietà (1)–(9) sono lasciate come esercizio.

(10) Dato che i due insiemi B e C compaiono in modo simmetrico nell'ipotesi, se dimostriamo $B \subseteq C$ analogamente si può dimostrare $C \subseteq B$, e quindi si ottiene la tesi.

Sia $b \in B$ un elemento qualsiasi. Si hanno due casi: o $b \in A$ o $b \notin A$.
Se $b \in A$, allora $b \in A \cap B = A \cap C$, quindi $b \in C$.
Se $b \notin A$, allora $b \in A \cup B = A \cup C$. Siccome $b \notin A$, deve essere $b \in C$.
In entrambi i casi abbiamo concluso $B \subseteq C$. □

1.2. **Un po' di logica.** Nella sezione precedente abbiamo utilizzato alcune espressioni molto usate in matematica: "ogni", "esiste". Vediamo di introdurre dei simboli per condensare queste espressioni.

Il simbolo $\forall$ si usa per abbreviare l'espressione "per ogni". È una A rovesciata (dall'inglese "for all").

Il simbolo $\exists$ si usa per abbreviare l'espressione "esiste". È una E rovesciata (dall'inglese "there exists"). Per abbreviare l'espressione "esiste ed è unico" si usa il sibolo $\exists!$ (talvolta $\exists_1$).

I simboli $\forall$ e $\exists$ sono detti quantificatori, precisamente quantificatore universale il primo e quantificatore esistenziale il secondo.

Facciamo qualche esempio, per capire meglio l'uso dei quantificatori.

Esempio 1.1. Consideriamo l'insieme $A = \{2, 4, 6\}$. Tutti gli elementi di A sono numeri pari. Possiamo abbreviare questa frase come $\forall x \in A$, x è pari, o anche

$$\forall x \in A,\ \exists n \in \mathbb{N}\ t.c.\ x = 2n$$

(per ogni x in A esiste un numero naturale n tale che $x = 2n$, cioè x è pari).

Esempio 1.2. Consideriamo l'insieme $B = \{1, 2, 3\}$. Esiste (almeno) un elemento di B che è un numero pari. Possiamo abbreviare questa frase come $\exists x \in B$, x è pari, o anche

$$\exists x \in B,\ \exists n \in \mathbb{N}\ t.c.\ x = 2n$$

(esiste almeno un x in B e un numero naturale n tale che $x = 2n$, cioè x è pari).

Vediamo ora qualche proprietà dei quantificatori.

Quando in un'espressione matematica compaiono due o più quantificatori bisogna sempre prestare molta attenzione. Ad esempio, le espressioni

(1) $\forall x\ \exists y\ P(x, y)$ (per ogni x, esiste un y tale che vale la proprietà $P(x, y)$)
(2) $\exists y\ \forall x\ P(x, y)$ (esiste un y tale che per ogni x vale la proprietà $P(x, y)$)

esprimono concetti diversi. È facile rendersene conto. Consideriamo per esempio le espressioni

(1) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ y > x$ (per ogni numero naturale x, esiste un numero naturale y tale che $y > x$)
(2) $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ y > x$ (esiste un numero naturale y tale che per ogni numero naturale x $y > x$)

La prima proposizione (per ogni numero naturale ne esiste uno più grande) è vera, mentre la seconda (esiste un numero naturale più grande di tutti i numeri naturali) è evidentemente falsa.

Un po' di attenzione occorre anche quando si negano delle frasi con uno o più quantificatori. La negazione di

$$\forall x\ P(x)$$

non è

$$\forall x\ non\ P(x)$$

ma

$$\exists x\ non\ P(x).$$

Analogamente, la negazione di

$$\exists x\ P(x)$$

non è

$$\exists x\ non\ P(x)$$

ma

$$\forall x\ non\ P(x).$$

Due **proposizioni sono equivalenti** se hanno lo stesso valore di verità in tutti i casi possibili, ovvero se sono contemporaneamente vere o contemporaneamente false in ogni caso.

Per verificare se due proposizioni sono equivalenti, è utile introdurre la tabella di verità. Qualche esempio:

Esempio 1.3. Tabella di verità per la negazione

A	V	F
non A	F	V

Il valore di verità della proposizione *non* A dipende solo dal valore di verità della proposizione A.

Esempio 1.4. Tabella di verità per la 'e' ($A \wedge B$)

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
$A \wedge B$	V	F	F	F

Il valore di verità della proposizione $A \wedge B$ dipende dai valore di verità della proposizione A e della proposizione B (la tabella ci dice che $A \wedge B$ è vera quando A è vera e B è vera, mentre è falsa in tutti gli altri casi).

Esempio 1.5. Tabella di verità per la 'e/o' ($A \vee B$)

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
$A \vee B$	V	V	V	F

Il valore di verità della proposizione $A \vee B$ dipende dai valore di verità della proposizione A e della proposizione B (la tabella ci dice che $A \vee B$ è falsa quando A è falsa e B è falsa, mentre è vera in tutti gli altri casi).

Esempio 1.6. Tabella di verità per la 'o disgiuntiva' ($A \veebar B$)

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
$A \veebar B$	F	V	V	F

Il valore di verità della proposizione $A \veebar B$ dipende dai valore di verità della proposizione A e della proposizione B (la tabella ci dice che $A \veebar B$ è falsa quando A e B hanno uguale valore di verità, mentre è vera quando hanno diverso valore di verità).

Esempio 1.7. Tabella di verità per l''implicazione' ($A \Rightarrow B$)

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
$A \Rightarrow B$	V	F	V	V

Il valore di verità della proposizione $A \Rightarrow B$ dipende dai valore di verità della proposizione A e della proposizione B (la tabella ci dice che $A \Rightarrow B$ è falsa solo quando A è vera e B è falsa; nei casi in cui A è falsa infatti la proposizione $A \Rightarrow B$ non fornisce nessuna tesi).

Notiamo che questa tabella di verità non è simmetrica (ovvero $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$ hanno tabelle di verità differenti)

Esempio 1.8. Tabella di verità per la 'doppia implicazione' ($A \Leftrightarrow B$)

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
$A \Leftrightarrow B$	V	F	F	V

Il valore di verità della proposizione $A \Leftrightarrow B$ dipende dai valore di verità della proposizione A e della proposizione B (la tabella ci dice che $A \Leftrightarrow B$ è vera esattamente quando A e B hanno lo stesso valore di verità).

Osserviamo che le tabelle di verità di $A \underline{\vee} B$ e di $A \Leftrightarrow B$ sono una l'opposta dell'altra. Ciò vuol dire che le due proposizioni sono una la negazione dell'altra, ovvero

$$non\ (A \underline{\vee} B) \;\Leftrightarrow\; (A \Leftrightarrow B)$$

$$(A \underline{\vee} B) \;\Leftrightarrow\; non\ (A \Leftrightarrow B)$$

sono tautologie (sono sempre vere).

La **dimostrazione per assurdo** è un metodo di dimostrazione che si basa sull'equivalenza logica dei due enunciati:

(a) $A \;\Rightarrow\; B$ (il fatto che A sia vero implica che B è vero);
(b) non $B \Rightarrow$ non A (il fatto che B sia falso implica che A è falso).

Vediamo perché le due frasi sono equivalenti. Per ognuna dei due enunciati A e B vi sono due possibilità (o l'enunciato è vero, o è falso). Quindi in totale abbiamo quattro possibilità:

(1) A vero, B vero (A e B);
(2) A vero, B falso (A e non B);
(3) A falso, B vero (non A e B);
(4) A falso, B falso (non A e non B).

Se siamo nel caso (1), allora l'implicazione (a) è vera; anche l'implicazione (b) è vera –infatti, dato che l'ipotesi (non B) non è verificata, non si ottengono tesi da verificare.

Se siamo nel caso (2), allora le implicazioni (a) e (b) sono entrambe false (vere le ipotesi, ma false le tesi).

Se siamo nel caso (3), allora le implicazioni (a) e (b) sono entrambe vere (in entrambi i casi non è verificata l'ipotesi).

Se siamo nel caso (4), allora l'implicazione (b) è vera; anche l'implicazione (a) è vera –infatti, dato che l'ipotesi (A) non è verificata, non si ottengono tesi da verificare.

Tutto quanto scritto sopra a parole può essere facilmente condensato in una tabella di verità:

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
$A \Rightarrow B$	V	F	V	V
non A	F	F	V	V
non B	F	V	F	V
non $B \Rightarrow$ *non* A	V	F	V	V

Pertanto, in ogni caso, le due implicazioni (a) e (b) hanno lo stesso valore di verità, cioè sono equivalenti.

Molto spesso questo fatto è usato nelle dimostrazioni per assurdo: anzichè dimostrare (a), dimostriamo (b).

1.3. **Prodotto cartesiano di insiemi.**

Definizione 1.6. Siano a, b due oggetti. Si definisce **coppia ordinata** (a, b) la struttura costituita dagli oggetti a, b e da un ordine sui due oggetti (a è il primo oggetto, b il secondo oggetto).

Più in generale, dati n oggetti $a_1, \dots, a_n$ si definisce **n-upla ordinata** $(a_1, \dots, a_n)$ la struttura costituita dagli oggetti $a_1, \dots, a_n$ e da un ordine sugli n oggetti.

Definizione 1.7. Siano A, B insiemi. Si dice **prodotto cartesiano** di A, B l'insieme

$$A \times B \ = \ \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Più in generale, dati $A_1, \dots, A_n$ insiemi, si dice **prodotto cartesiano** di $A_1, \dots, A_n$ l'insieme

$$\times_{k=1}^{n} A_k \ = \ A_1 \times \cdots \times A_n \ = \ \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_k \in A_k, k = 1, \dots, n\}.$$

Se gli insiemi di cui si fa il prodotto cartesiano sono tutti uguali, si è soliti denotare il prodotto con A^2 (in generale A^n). Questa notazione è probabilmente già nota al lettore per $\mathbb{R}^2$.

Definizione 1.8. Si dice **diagonale** di A^2 l'insieme

$$\Delta \ = \ \{(a, a) \mid a \in A\} \ \subseteq \ A^2.$$

1.4. **Relazioni e funzioni.**

Definizione 1.9. Una **relazione** $\mathcal{R}$ tra due insiemi A, B è il dato dei due insiemi A, B e di un sottoinsieme $R \subseteq A \times B$. A è detto **dominio**, B **codominio** e R grafico della relazione $\mathcal{R}$.

Nel caso $A = B$, si parla di relazione su A.

Esempi:

(1) A insieme qualsiasi. $\mathcal{R} = (A, A, \Delta)$ è una relazione su A.
(2) $A = B = \mathbb{N}$. $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, \mathbb{N}, R)$,
$$R = \{(a, 2a) \in \mathbb{N}^2\}$$
è una relazione su $\mathbb{N}$. Notiamo che R puó anche essere scritto nel seguente modo:
$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = 2x\}$$
$y = 2x$ è detta equazione del grafico della relazione $\mathcal{R}$.
(3) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q}$. $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, \mathbb{Q}, R)$,
$$R = \left\{\left(a, \frac{a}{3}\right) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q}\right\}$$
è una relazione tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$. Notiamo che R puó anche essere scritto nel seguente modo:
$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q} \mid y = \frac{x}{3}\right\}$$
$y = 2x$ è detta equazione del grafico della relazione $\mathcal{R}$.

(4) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q}$. $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, \mathbb{Q}, R)$,
$$R = \left\{ \left(a^2, \frac{a}{10}\right) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}$$
è una relazione tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$. Notiamo che R puó anche essere scritto nel seguente modo:
$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q} \mid x = (10y)^2 \right\}$$
$x = (10y)^2$ è detta equazione del grafico della relazione $\mathcal{R}$.

(5) $A = B = \mathbb{Q}$. $\mathcal{R} = (\mathbb{Q}, \mathbb{Q}, R)$,
$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid xy = 1 \quad \textit{oppure } xy = 0\}$$
è una relazione su $\mathbb{N}$.

Definizione 1.10. Si dice funzione da A a B ($f : A \to B$), A, B insiemi, una relazione (A, B, Γ_f) tale che
$$\forall a \in A \, \exists! b = f(a) \in B \, t.c. \; (a, b) \in \Gamma_f.$$

Esercizio 1.1. Quali delle relazioni (1)–(5) sono funzioni?

Definizione 1.11. Sia $f : A \to B$ una funzione. Per ogni $b \in B$ si definisce la **controimmagine** di b, $f^{-1}(b)$, come il sottoinsieme degli elementi di A mandati in b da f:
$$f^{-1}(b) \;=\; \{a \in A \mid f(a) = b\}\,.$$

Definizione 1.12. Sia $f : A \to B$ una funzione. f si dice

- **iniettiva** (o **ingettiva**) se elementi distinti di a vengono mandati in elementi distinti di B, ovvero se ogni $b \in B$ è immagine di al più un elemento di A:
$$\forall a_1, a_2 \in A, \;\; a_1 \neq a_2 \;\Rightarrow\; f(a_1) \neq f(a_2)\,.$$
- **suriettiva** (o **surgettiva**) se ogni elemento $b \in B$ è immagine di almeno un elemento di A:
$$\forall b \in B, \;\; \exists a \in A \;\; t.c. \;\; f(a) = b\,.$$
- **biiettiva** (o **bigettiva**) se è iniettiva e suriettiva, ovvero se ogni elemento $b \in B$ è immagine di esattamente un elemento di A:
$$\forall b \in B, \;\; \exists! a \in A \;\; t.c. \;\; f(a) = b\,.$$

Osserviamo che le tre definizioni possono essere espresse come informazioni sulla cardinalità (ovvero sul numero di elementi) degli insiemi $f^{-1}(b)$:

- f è iniettiva se e solo se $\forall b \in B \; \sharp f^{-1}(b) \leq 1$;
- f è suriettiva se e solo se $\forall b \in B \; \sharp f^{-1}(b) \geq 1$;
- f è biiettiva se e solo se $\forall b \in B \; \sharp f^{-1}(b) = 1$.

In quest'ultimo caso $f^{-1}(b)$ è costituito dall'unico elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$. In questo caso, è definita una funzione, a sua volta biiettiva, $f^{-1} : B \to A$ definita[2] da $f^{-1}(b) = a$ se e solo se $f(a) = b$.

La funzione $f^{-1} : B \to A$ si chiama **funzione inversa** di $f : A \to B$ e ha le seguenti proprietà $f(f^{-1}(b)) = b$ per ogni $b \in B$ e $f^{-1}(f(a)) = a$ per ogni $a \in A$.

---

[2]Con un piccolo abuso di notazione, indichiamo con $f^{-1}(b)$ due concetti diversi

Definizione 1.13. Si dice **relazione d'equivalenza** su A una relazione (A, A, R) su A che verifica le seguenti proprietà:

(riflessiva) $\forall a \in A \ (a, a) \in R$;
(simmetrica) $\forall a, b \in A \ (a, b) \in R$ se e solo se $(b, a) \in R$;
(transitiva) $\forall a, b, c \in A$ se $(a, b) \in R \ (b, c) \in R$ allora $(a, c) \in R$.

Le relazioni di equivalenza sono usate per classificare vari oggetti in più classi d'equivalenza. Data una relazione d'equivalenza (A, A, R) su un insieme A, si dice **classe d'equivalenza** di un elemento $a \in A$, e si indica con $[a]$, il sottoinsieme di A costituito da tutti gli elementi di A in relazione con a:

$$[a] \ = \ \{b \in A \mid (b, a) \in R\}$$

A titolo di esempio citiamo le seguenti relazioni d'equivalenza:

(triangoli congruenti) $A = \{T \ \textit{triangolo}\}$, R definita da $(T_1, T_2) \in R_{cong}$ se e solo se esiste un moto rigido che porta T_1 su T_2;
(triangoli simili) $A = \{T \ \textit{triangolo}\}$, R definita da $(T_1, T_2) \in R_{sim}$ se e solo se gli angoli di T_1 e T_2 sono a due a due uguali.

Notiamo che se due triangoli sono congruenti, sono anche simili, ovvero le classi di equivalenza di R_{sim} contengono le classi di equivalenza di R_{cong}.

Quando, come in questo caso, avviene che due relazioni d'equivalenza su un insieme A sono tali che le classi di equivalenza di R_1 contengono le classi di equivalenza di R_2 si dice che R_2 è **più fine** di R_1 (o R_1 è **meno fine** di R_2), ovvero R_1 produce una classificazione che dà più informazioni.

Dato un qualunque insieme (non vuoto) A, la relazione d'equivalenza più fine di tutte è quella che ha per grafico la diagonale Δ, quella meno di tutte è quella che ha per grafico tutto A^2.

Esercizio 1.2. Quali tra le relazioni (1)–(5) sono d'equivalenza? Per quali ha senso porsi questa domanda?

Esercizio 1.3. Si consideri $\mathbb{Z}$ e la relazione $\mathcal{P} = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, P)$ data da $(a, b) \in P$ se e solo se $a - b$ è un numero pari. $\mathcal{P}$ è una relazione d'equivalenza?

Esercizio 1.4. Si consideri $\mathbb{Z}$ e la relazione $\mathcal{D} = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, P)$ data da $(a, b) \in D$ se e solo se $a - b$ è un numero dispari. $\mathcal{D}$ è una relazione d'equivalenza?

Definizione 1.14. Si dice **relazione d'ordine (parziale)** su A una relazione $(A, A, \leq)$ su A che verifica le seguenti proprietà (per le relazioni d'ordine useremo la notazione $a \leq b$ per indicare $(a, b) \in \leq$):

(riflessiva) $\forall a \in A \ a \leq a$;
(antisimmetrica) $\forall a, b \in A$, $a \neq b$, $a \leq b$ implica $b \not\leq a$;
(transitiva) $\forall a, b, c \in A$ se $(a, b) \in R \ (b, c) \in R$ allora $(a, c) \in R$.

Esercizio 1.5. Dimostra che $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \leq)$, dove $\leq$ è il minore o uguale tra numeri naturali, ovvero

$$a \leq b \iff \exists n \in \mathbb{N} \ t.c. \ n + a = b,$$

è una relazione d'ordine (parziale).

Esercizio 1.6. Dimostra che $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, |)$, dove $a|b$ se e solo se a è un divisore di b, ovvero

$$a|b \iff \exists n \in \mathbb{N} \ t.c. \ na = b,$$

è una relazione d'ordine (parziale).

Se $\leq$ è una relazione d'ordine, solitamente scriveremo $a < b$ per indicare $a \leq b$ e $a \neq b$.

Definizione 1.15. Si dice **relazione d'ordine (totale)** su A una relazione d'ordine parziale $(A, A, \leq)$ su A che verifica le seguente proprietà aggiuntiva:

(tricotomia) $\forall a, b \in A$ vale una delle seguenti: $a = b$, oppure $a < b$, oppure $b < a$.

Esercizio 1.7. Le relazioni d'ordine parziali degli esercizi precedenti sono relazioni d'ordine totali?

Esercizio 1.8. Considera l'insieme $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ e la relazione $(A, A, |)$ data da $a|b$ se e solo se a è un divisore di b, ovvero

$$a|b \iff \frac{b}{a} \in \mathbb{N}.$$

È una relazione d'ordine (parziale/totale)?

2. Il piano $\mathbb{R}^2$ e lo spazio $\mathbb{R}^3$ (parte I)

2.1. **Retta, piano e spazio.** Dovrebbe esssere noto al lettore che i punti di una retta (oggetto geometrico) possono essere messi in corrispondenza biunivoca continua con i numeri reali (l'insieme $\mathbb{R}$) in modo naturale: si sceglie un punto della retta a cui si associa il numero 0 e un secondo punto (distinto dal primo) a cui si associa il numero 1. Solitamente si orienta la retta geometrica in modo orizzontale, in modo tale che il punto cui corrisponde il numero 1 sia a destra del punto cui corrisponde il numero 0. In tale modo, al numero reale $x > 0$ si associa il punto della retta a destra dello 0 che dista x volte la distanza tra lo 0 e l'1; al numero reale $x < 0$ si associa il punto della retta a sinistra dello 0 che dista $-x$ volte la distanza tra lo 0 e l'1.

Grazie alla corrispondenza naturale tra la retta e l'insieme dei numeri naturali appena illustrata, spesso si confondono i due concetti, parlando di **retta dei numeri reali**, $\mathbb{R}$.

In modo similare si costruiscono corrispondenze biunivoche naturali tra il prodotto cartesiano $\mathbb{R}^2$ e il piano; e tra il prodotto cartesiano $\mathbb{R}^3$ e lo spazio.

Illustriamo brevemente la prima corrispondenza, lasciando la seconda per esercizio al lettore. Fissiamo nel piano due rette incidenti r_1 ed r_2 in un punto, che chiamiamo origine O e facciamo coincidere con la coppia ordinata $(0, 0)$. Scegliamo un punto su ogni retta (distinto da O), facendo loro corrispondere rispettivamente $(1, 0)$ (su r_1) e $(0, 1)$ (su r_2). Le rette saranno così messe in corrispondenza r_1 con $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, e r_2 con $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Ora, dato un punto qualsiasi P del piano (non appartenente alle rette r_1 o r_2), tracciamo per P le parallele s_1 ed s_2 a r_1 ed r_2 rispettivamente. Se $r_1 \cap s_2 = \{(x, 0)\}$ e $r_2 \cap s_1 = \{(0, y)\}$, allora facciamo corrispondere il punto P con la coppia ordinata $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Tali coordinate (x, y) si dicono coordinate cartesiane del piano[3].

Esercizio 2.1. Trova, come esercizio, una corrispondenza biunivoca naturale tra lo spazio e $\mathbb{R}^3$. Cosa occorre fissare affinché la corrispondenza sia ben definita?

[3]Nota bene: le coordinate dipendono dalla scelta delle rette e dei due punti. Solitamente si scelgono le rette ortogonali tra loro e i due punti a uguale distanza dall'origine

2.2. **Vettori del piano e dello spazio.**

Definizione 2.1. Si chiama **vettore applicato**, e si indica con $\vec{AB}$ una coppia ordinata di punti A, B del piano (o dello spazio). A viene detto punto di applicazione del vettore e B punto finale.

Un vettore applicato è quindi un segmento orientato di estremi A e B, con verso che va da A a B. Il verso da A a B è detto **verso** del vettore, la direzione individuata dalla retta su cui giacciono A e B è detta **direzione** del vettore e la lunghezza del segmento AB è detto **modulo** del vettore. Osserviamo che direzione e verso si possono definire se e solo se $A \neq B$, ovvero se e solo se il modulo del vettore è diverso da zero.

Definizione 2.2. Due vettori $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ si dicono **equivalenti** se e solo se A, C, D, B sono (ordinatamente) i vertici di un parallelogramma (ovvero se e solo se hanno stesso modulo, direzione e verso).

Quindi ogni vettore applicato $\vec{AB}$ ha un vettore ad esso equivalente $\vec{OP}$ con punto di applicazione l'origine degli assi O.

Possiamo definire alcune operazioni tra (classi di equivalenza di) vettori.

Definizione 2.3. (somma tra vettori) Dati due vettori $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$, definiamo la loro somma

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD'}$$

dove D' è il punto del piano (o dello spazio) tale che $\vec{BD'}$ sia equivalente a $\vec{CD}$[4].

Definizione 2.4. (prodotto per scalare) Dato un vettore $\vec{AB}$ e un numero $k \in \mathbb{R}$, si definisce il vettore $k\cdot \vec{AB}$:

- se $k \geq 0$, come (la classe d'equivalenza de) il vettore con uguale direzione e verso del vettore $\vec{AB}$ e con modulo k volte il modulo del vettore $\vec{AB}$;
- se $k < 0$, come (la classe d'equivalenza de) il vettore con uguale direzione e verso opposto del vettore $\vec{AB}$ e con modulo $-k$ volte il modulo del vettore $\vec{AB}$

Con queste definizioni, $\vec{AB} - \vec{AB} = \vec{AA}$, ovvero un (il, se pensiamo in termini di classi d'equivalenza) vettore di modulo zero.

Le operazioni definite sopra hanno in realtà senso solo per le classi di equivalenza di vettori. Siccome, come già osservato, ogni vettore applicato $\vec{AB}$ ha un vettore ad esso equivalente $\vec{OP}$ con punto di applicazione l'origine degli assi O, le classi di equivalenza dei vettori sono in corrispondenza biunivoca naturale con i punti del piano (o dello spazio): ad ogni vettore associo il punto terminale del vettore applicato nell'origine ad esso equivalente.

---

[4]Ovvero si trasla parallelamente a sè stesso il secondo vettore ($\vec{CD}$) in modo da far coincidere il suo punto di applicazione con il punto finale del primo vettore. Il vettore somma ha come punto di applicazione il punto di applicazione del primo vettore e come punto finale il punto finale del secondo vettore traslato

Pertanto le operazioni di somma tra vettori e di prodotto per scalare passano ai punti di $\mathbb{R}^2$ (o di $\mathbb{R}^3$). Siano $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{R}$. Allora si ha:

$$A + B \ = \ (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \qquad k \cdot A \ = \ (ka_1, ka_2) \ .$$

Esercizio 2.2. Prova a ricavare le formule precedenti dalle definizioni 2.3 e 2.4.

Analogamente si possono definire somma tra punti di $\mathbb{R}^3$ e prodotto per scalare.

D'ora in avanti useremo sempre la corrispondenza tra (classi di equivalenza di) vettori e $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$), e quindi indicheremo un vettore tramite le coordinate cartesiane: $\mathbf{v} \ = \ \overrightarrow{v} \ = \ (x_v, y_v)$ (o (x_v, y_v, z_v) se si tratta di un vettore dello spazio).

Diamo un nome ad alcuni vettori particolari. Nel piano

$$\hat{\imath} \ = \ \mathbf{i} \ = \ (1, 0), \quad \hat{\jmath} \ = \ \mathbf{j} \ = \ (0, 1)\,,$$

nello spazio

$$\hat{\imath} \ = \ \mathbf{i} \ = \ (1, 0, 0), \quad \hat{\jmath} \ = \ \mathbf{j} \ = \ (0, 1, 0), \quad \hat{k} \ = \ \mathbf{k} \ = \ (0, 0, 1)\,.$$

Un qualsiasi vettore può essere espresso come combinazione (lineare) di questi vettori (anche detti **versori**, poichè individuano direzione e verso, e hanno modulo unitario):

$$\mathbf{v} \ = \ x_v\mathbf{i} + y_v\mathbf{j}\,,$$

$$\mathbf{v} \ = \ x_v\mathbf{i} + y_v\mathbf{j} + z_v\mathbf{k}\,,$$

rispettivamente nel piano e nello spazio.

2.3. **Spazi vettoriali. $\mathbb{R}^n$.** Tutta la discussione e le definizioni della precedente sezione possono essere generalizzate ad iperspazi di dimensione qualsiasi $n \in \mathbb{N}_+$, che sono in corrispondenza naturale con $\mathbb{R}^n$. Quindi vettori, loro classi di equivalenza e rappresentazione cartesiana, così come le operazioni di somma e di prodotto per scalare, passano senza nessuna modifica a dimensione diversa da 2 o 3.

In generale tutto quanto trattato nella precedente sezione si può generalizzare con il concetto matematico di **spazio vettoriale**, che può anche avere dimensione infinita e/o avere un insieme degli scalari diverso dai numeri reali. Ma in questo corso non ci occuperemo degli spazi vettoriali nella loro generalità.

Per $\mathbb{R}^n$, come equivalenti dei vettori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ definiti prima, useremo i vettori $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$, dove $\mathbf{e}_i$ è il versore che ha tutte le componenti nulle, tranne la i-esima, uguale a 1. Anche in questo caso ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ può essere espresso come combinazione lineare di questi vettori: se $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ allora

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} v_i\mathbf{e}_i\,,$$

dove l'ultima espressione è semplicemente la forma abbreviata della penultima (si legge "sommatoria per i da 1 a n di $v_i\mathbf{e}_i$", e significa che vanno sommate tra loro le varie quantità $v_i\mathbf{e}_i$ al variare dell'indice i tra 1 e n).

Nota bene. È possibile utilizzare coordinate non ortogonali, nel piano, nello spazio o in un iperspazio. Se non esplicitamente dichiarato, useremo sempre coordinate ortogonali.

2.4. **Funzioni lineari tra spazi vettoriali.** Abbiamo introdotto gli spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ di dimensione n, $\mathbb{R}^n$. Siamo ora interessati a studiare le funzioni più semplici (dopo le costanti) che si possono avere tra due spazi vettoriali, le funzioni lineari.

Definizione 2.5. Una funzione $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ si dice una **funzione lineare** se per ogni scelta di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$f(\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) \;=\; \lambda f(\mathbf{v}) + \mu f(\mathbf{w})\,. \tag{1}$$

Esercizio 2.3. Dimostra che se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è una funzione lineare valgono le seguenti proprietà:

(1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $f(\lambda \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v})$;
(2) $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \;=\; f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$.

Suggerimento : prova a utilizzare l'equazione (1), scegliendo in modo adeguato $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Osservazione 2.1. In realtà le proprietà (1), (2) dell'esercizio sono equivalenti alla proprietà (1) della definizione 2.5.

Vediamo ora alcune proprietà delle funzioni lineari.

Proposition 2.1. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione lineare. Allora $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, ovvero l'origine di $\mathbb{R}^n$ viene mandata nell'origine di $\mathbb{R}^m$.*

Proof. Sia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un vettore qualsiasi. Osserviamo che $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{x}$. Applicando la proprietà (1) otteniamo

$$f(\mathbf{0}) = 0 \cdot f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\,.$$

□

Osserviamo che le funzioni lineari da $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R}$ sono piuttosto semplici. Infatti, se $f(1) = a$, allora, siccome per ogni $x \in \mathbb{R}$ $x = x \cdot 1$, si ha (proprietà (1) delle funzioni lineari)

$$f(x) = x \cdot f(1) = ax\,.$$

Se di una funzione lineare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ conosciamo $f(y) = b$ (per $y \neq 0$), conosciamo la funzione. Infatti, siccome $1 = \frac{1}{y} \cdot y$, per la proprietà (1) e per quanto visto prima, si ha

$$f(1) = f\left(\frac{1}{y} \cdot y\right) = \frac{1}{y} \cdot f(y) = \frac{b}{y}\,; \qquad f(x) = \frac{b}{y} x\,.$$

Quindi una funzione lineare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è individuata da un singolo numero $f(1) = a \in \mathbb{R}$.

Se trattiamo funzioni lineari $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ allora è ragionevole[5] che il valore di f sia univocamente determinato dal valore di f sugli elementi $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$, al variare di i tra 1 e n. Supponiamo infatti

$$f(\mathbf{e}_i) = a_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\}\,.$$

Allora, se $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ è un qualsiasi vettore, si ha grazie alla proprietà di linearità di f:

$$f(\mathbf{v}) = f\left(\sum_{i=1}^n v_i\mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n v_i f(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n v_i a_i\,.$$

Problema 2.1. Nel caso delle funzioni lineari da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ abbiamo visto che un qualsiasi valore assunto della funzione (oltre a quello assunto in 0) determina univocamente la funzione. È lecito domandarsi se in modo analogo n valori assunti in n punti diversi del dominio della funzione determinino univocamente una funzione $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Esempio 2.1. Supponiamo di avere una funzione lineare $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se sappiamo

$$f((1,2)) = 10, \qquad f((2,-1)) = 15$$

allora, grazie alle proprietà (1) e (2), osservando che

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{5}(1,2) + \frac{2}{5}(2,-1) \quad \mathbf{e}_2 = \frac{2}{5}(1,2) - \frac{1}{5}(2,-1)\,,$$

si ha

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= \frac{1}{5}f((1,2)) + \frac{2}{5}f((2,-1)) = \frac{1}{5}\cdot 10 + \frac{2}{5}\cdot 15 = 8\,,\\ f(\mathbf{e}_2) &= \frac{2}{5}f((1,2)) - \frac{1}{5}f((2,-1)) = \frac{2}{5}\cdot 10 - \frac{1}{5}\cdot 15 = 1\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$f((v_1,v_2)) = 8v_1 + v_2\,.$$

In questo caso, la conoscenza di due valori della funzione ha determinato la funzione.

Esercizio 2.4. Supponiamo di avere una funzione lineare $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se sappiamo

$$f((1,-1)) = 3, \qquad f((1,1)) = 5\,.$$

riesci a determinare $f(\mathbf{e}_1)$ e $f(\mathbf{e}_2)$? E il valore della funzione f su un generico vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$?

Esempio 2.2. Supponiamo di avere una funzione lineare $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se sappiamo

$$f((1,1)) = 3, \qquad f((2,2)) = 6\,.$$

In questo caso non riesco a trovare il valore di f su $\mathbf{e}_1$ e su $\mathbf{e}_2$. Infatti la seconda informazione non aggiunge niente alla prima, dato che abbiamo $(2,2) = 2\cdot(1,1)$...

[5] *Interpretazione del supermercato*: può forse essere utile alla comprensione interpretare una funzione lineare $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nel seguente modo. In un supermercato sono disponibili n articoli diversi. Un vettore $\mathbf{v} = (v_1,\ldots,v_n) \in \mathbb{R}^n$ dice quanti articoli di ogni tipo acquisto (v_1 articoli del primo tipo, v_2 del secondo, ..., v_n dell'n-esimo). $f(\mathbf{v})$ dice quanto spendo per fare la spesa individuata dal vettore $\mathbf{v}$. Risulta sensato pensare che il prezzo degli n articoli, $f(\mathbf{e}_i)$, $i = 1,\ldots,n$, determini il prezzo totale della spesa $f(\mathbf{v})$.

Ci servirà un metodo generale per distinguere la situazione dell'esempio precedente da questo.

Per terminare la discussione sulle funzioni lineari, ci resta un'ultima generalizzazione da fare. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Anche in questo caso la funzione risulta determinata dai valori assunti dalla funzione sui vettori $\mathbf{e}_i$, facendo attenzione al fatto che questa volta i valori assunti sono a loro volta vettori, e non numeri.

Infatti, se abbiamo

$$f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{im}) \in \mathbb{R}^m, \quad i \in \{1, \dots, n\} ,$$

allora in modo del tutto analogo a prima possiamo scrivere, per un vettore $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ qualsiasi, grazie alla proprietà di linearità di f:

$$f(\mathbf{v}) = f\left(\sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n v_i f(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{a}_i ,$$

esattamente come prima, solo che in questo caso gli $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^m$ sono vettori e non più numeri.

Quindi in questo caso, la funzione lineare è determinata dagli n vettori $\mathbf{a}_i$, o –se vogliamo– dagli $n \cdot m$ numeri a_{ij}.

3. Matrici

Per trattare al meglio l'argomento delle funzioni lineari conviene introdurre un nuovo oggetto matematico: le matrici.

Definizione 3.1. Siano $m, n \in \mathbb{N}_+$. Una **matrice** A $m \times n$ (a valori in $\mathbb{R}$) è una tabella di $n \cdot m$ numeri $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, disposti lungo m righe e n colonne:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si può brevemente indicare una matrice anche con la scrittura

$$A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m,\, j=1,\dots,m} = (a_{ij})_{m \times n}$$

o più semplicemente come $A = (a_{ij})$ quando non sarà necessario specificare l'insieme su cui variano gli indici i e j.

I numeri reali a_{ij} sono retti **elementi della matrice**, i e j sono detti indici: il primo si riferisce alla riga in cui si trova l'elemento, il secondo alla colonna.

Considerando una matrice $A = (a_{ij})$ $m \times n$ indichiamo con

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$$

l'i-esima riga della matrice (che è un vettore di $\mathbb{R}^n$) e con

$$A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

la j-esima colonna (che è un vettore di $\mathbb{R}^m$).

Definizione 3.2. Se $n = m$, la matrice $A = (a_{ij})$ viene detta **matrice quadrata di ordine** n. Gli elementi $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ sono detti **elementti diagonali** e il loro insieme costituisce la **diagonale (principale)** della matrice quadrata A.

Una matrice quadrata è detta **matrice diagonale** se tutti i suoi elementi non appartenenti alla diagonale sono nulli, ovvero se $\forall i \neq j$ $a_{ij} = 0$.

Definizione 3.3. Due matrici $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{p\times q}$ sono **uguali** se $m = p$, $n = q$ e $\forall i, j$ $a_{ij} = b_{ij}$.

Una matrice i cui elementi sono tutti nulli è detta matrice **nulla**, e si indica con (0) o (0_{ij}).

Esempio 3.1. Attenzione! Non tutte le matrici nulle sono uguali, ad esempio

$$\mathbf{0}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{3\times 3}\,.$$

Ricorda infatti che affinchè due matrici $m\times n$ e $p\times q$ siano uguali è condizione necessaria che $m = p$ e $n = q$.

Definizione 3.4. Data una matrice $A = (a_ij)_{m\times n}$ chiamiamo **(matrice) trasposta** di A la matrice $A^t = (a_{ji})_{n\times m}$ ovvero la matrice con n righe e m colonne le cui righe sono (ordinatamente) le colonne di A.

Osserviamo che $(A^t)^t = A$. Infatti, trasponendo due volte, scambio tra loro due volte le righe con le colonne, tornando così alla matrice di partenza.

Quando la matrice A è quadrata può accadere che $A^t = A$. In tal caso, diciamo che A è una **matrice simmetrica**. Questo accade se e solo se $\forall i, j$ $a_{ij} = a_{ji}$.

Esempio 3.2. (1) La matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

è simmetrica (è una matrice quadrata di ordine 2 per cui $a_{12} = a_{21}$).

(2) La matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

non è simmetrica. È una matrice quadrata di ordine 2 per cui $a_{12} \neq a_{21}$. Osserviamo che $a_{11} = a_{22}$, ma ciò non c'entra nulla con la definizione di matrice simmetrica.

(3) Per la matrice

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

non è simmetrica, dato che non è una matrice quadrata.

(4) La matrice

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & \pi \end{pmatrix}$$

è una matrice quadrata di ordine 3 simmetrica (infatti $a_{12} = a_{21} = -1$, $a_{13} = a_{31} = 4$ e $a_{23} = a_{32} = 4$).

Osserviamo che la definizione di matrice simmetrica non dipende dagli elementi della diagonale, ma solo da quelli fuori dalla diagonale, e quindi ogni matrice diagonale è simmetrica (dato che tutti gli elementi fuori dalla diagonale sono nulli).

3.1. **Somma e prodotto tra matrici. Cenni sull'inversa.** Abbiamo introdotto le matrici a partire dalle funzioni lineari.

Sulle funzioni siamo in grado di effettuare alcune operazioni, ad esempio sappiamo sommare due funzioni che hanno stesso dominio e codominio: se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, allora $f + g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è definita da $(f + g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$. Questa operazione si potrà rileggere in termini di matrici come operazione di **addizione** tra matrici.

Date due funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, allora sappiamo anche definire il prodotto $f \cdot g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ come $(f \cdot g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})$. Attenzione, però: se f e g erano lineari non è affatto detto che $f \cdot g$ lo sia a sua volta. Infatti:

Esempio 3.3. Sia $f = g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$. f è una funzione lineare. La funzione $(f \cdot f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) = x^2$ e pertanto non è lineare.

Un'altra operazione che possiamo definire tra funzioni è quella di composizione, che si può definire tutte le volte che il codominio della prima è contenuto nel dominio della seconda. Nel caso delle funzioni lineari, date $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ si può definire $g \circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ come $(g \circ f)(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$, ovvero si calcola su $\mathbf{x}$ la funzione f e sul risultato si calcola la funzione g. La composizione di funzioni lineari è anch'essa lineare, quindi anche questa operazione si potrà rileggere in termini di matrici come operazione di **prodotto (righe per colonne)** tra matrici.

Dopo questa lunga introduzione, vediamo di definire le due operazioni tra matrici.

Definizione 3.5. Siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ due matrici $m \times n$. Allora si definisce **matrice somma** la matrice

$$C = (c_{ij}) = A + B = (a_{ij} + b_{ij}),$$

ovvero la matrice $m \times n$ i cui elementi sono la somma dei corrispondenti elementi di A e B.

Due matrici si possono sommare se e solo se hanno lo stesso numero di righe e di colonne (come dovrebbe risultare ovvio dalla discussione fatta nell'introduzione). In questo caso si dicono **conformi per la somma**.

Esempio 3.4. (1) Consideriamo le matrici 2×3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \pi & 2\pi \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -\pi & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

La matrice somma è

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & \pi-\pi & 2\pi+0 \\ -1-2 & 2+0 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2\pi \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Consideriamo le matrici 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \pi & 2\pi \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -\pi & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice somma è

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & \pi-\pi & 2\pi+0 \\ -1-2 & 2+0 & 4-3 \\ 0+3 & 3+0 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2\pi \\ -3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.1. *Per l'addizione tra matrici $m \times n$ valgono le seguenti proprietà:*

(1) *$A + (B + C) = (A + B) + C$ (proprietà associativa);*
(2) *$A + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + A = A$ (esistenza dell'elemento neutro);*
(3) *$\forall A$ matrice $m\times n$ $\exists(-A)$ matrice $m\times n$ tale che $A+(-A) = -A+A = \boldsymbol{0}$ (esistenza dell'opposto) $-A$ si chiama **(matrice) opposta** di A;*
(4) *$A + B = B + A$ (proprietà commutativa).*

Curiosità. Le proprietà (1)–(3) dicono che le matrici $m \times n$ sono un **gruppo**. Grazie alla proprietà (4) sono un **gruppo commutativo**.

Dimostrazione. Sia $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$.

(1) Per definizione, $B + C = (b_{ij} + c_{ij})$ e $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. Quindi

$$A + (B + C) = (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})) = ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}) = (A + B) + C.$$

L'uguaglianza centrale è dovuta alla proprietà associativa per numeri reali.

(2) $\mathbf{0}$ è la matrice che ha tutti gli elementi nulli. Pertanto

$$A + \mathbf{0} = (a_{ij} + 0) = (a_{ij}) = A,$$

dato che 0 è l'elemento neutro per la somma fra numeri reali. Analogamente $(0) + A = A$.

(3) Definiamo la matrice $-A$ come la matrice che ha ogni elemento opposto al corrispondente elemento di A, ovvero $-A = (-a_{ij})$. Quindi

$$A + (-A) = (a_ij + (-a_{ij})) = (0) = \mathbf{0},$$

sempre grazie alle proprietà di somma fra numeri reali. Analogamente si ha $-A + A = \mathbf{0}$.

(4) Analogamente a prima, grazie alla commutatività della somma tra numeri reali si ha

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = B + A.$$

□

Dato un numero $k \in \mathbb{R}$ e una matrice $A = (a_{ij})$ $m \times n$, si definisce il prodotto di A per lo scalare k come la matrice $m \times n$ che ha ogni elemento k volte il corrispondente elemento di A: $kA = (ka_{ij})$.

Proposition 3.2. *La moltiplicazione di una matrice per uno scalare gode delle seguenti proprietà: per ogni $k, h \in \mathbb{R}$, e per ogni A, B matrici $m \times n$*

(1) *$k(hA) = (kh)A$;*
(2) *$(k + h)A = kA + hA$;*
(3) *$k(A + B) = kA + kB$;*

(4) $1A = A$;
(5) $-1A = -A$ *(conseguenza delle precedenti).*

Dimostrazione. Lasciata per esercizio al lettore. □

Curiosità. La moltiplicazione per scalare, insieme a queste ulteriori proprietà, fanno sì che il gruppo commutativo delle matrici $m \times n$ sia uno **spazio vettoriale**. In effetti è equivalente allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{nm}$.

La particolare struttura in righe e colonne infatti per ora non ha avuto alcun rilievo. L'avrà solo nella definizione del prodotto (righe per colonne) tra matrici.

Definizione 3.6. Sia $A = (a_{ik})$ una matrice $m \times p$ e $B = (b_{kj})$ una matrice $p \times n$. Si definisce **prodotto righe per colonne** della matrice A per la matrice B la matrice $AB = C = (c_{ij})$ i cui elementi sono dati da

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p}(a_{ik}b_{kj})\,.$$

La definizione ci dice che si può fare il prodotto tra due matrici tali che la seconda ha tante righe quante colonne ha la prima. Questo è esattamente quello che ci aspettavamo dal discorso fatto nella parte introduttiva, in cui vedevamo le matrici come rappresentanti di funzioni lineari e il prodotto come corrispondente della composizione tra funzioni lineari. Sapresti spiegare il perché?

Esempio 3.5. (1) Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sono entrambe matrici 2×2 quindi ha senso calcolare AB e BA. Facciamolo:

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + (-1)\cdot(-2) & 1\cdot 4 + (-1)\cdot 1 \\ 0\cdot 2 + 3\cdot(-2) & 0\cdot 4 + 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 4\cdot 0 & 2\cdot(-1) + 4\cdot 3 \\ (-2)\cdot 1 + 1\cdot 0 & (-2)\cdot(-1) + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(2) Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice A è 2×1, la matrice B 1×2 quindi ha senso calcolare AB e BA. Facciamolo:

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 \\ 0\cdot 2 & 0\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 4\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}.$$

(3) Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A è una matrice 1×2, B una matrice 2×3. Ha senso solo calcolare AB che è la seguente matrice 1×3

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + (-1)\cdot(-2) & 1\cdot 4 + (-1)\cdot 1 & 1\cdot 6 + (-1)\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(4) Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A è una matrice 3×1, B una matrice 3×3. Ha senso solo calcolare BA che è la seguente matrice 3×1

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \\ (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(5) Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sono entrambe matrici 2×3. Non si può calcolare nè AB nè BA. Si possono invece sommare tra loro...

(6) Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sono entrambi matrici quadrate 2×2 quindi posso calcolare sia AB sia BA.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo visto che date due matrici A e B possono succedere vari casi: non si può fare nessun prodotto (5), si può calcolare AB ma non BA (3), si può calcolare BA ma non AB (4), si possono calcolare sia AB sia BA (1), (2) e (6). In quest'ultimo caso, AB e BA sono matrici quadrate (perché?); possono essere di ordini diversi (2) oppure dello stesso ordine e quindi confrontabili tra loro, (1) e (6). Anche se sono confrontabili tra loro può essere $AB = BA$ (6) o $AB \neq BA$ (1).

A differenza di quanto accade per la somma, per il prodotto di matrici non vale la proprietà commutativa. C'è anche un'altra particolarità:

Esempio 3.6. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha (svolgi i calcoli per esercizio):

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = AC.$$

Quindi può accadere $AB = AC$ anche se A non è la matrice nulla e $B \neq C$.

Definizione 3.7. La matrice $n \times n$ diagonale con tutti gli elementi sulla diagonale uguali a 1 è detta **(matrice) unità**. Si indica generalmente con una delle seguenti notazioni: $\mathbb{I}$, $\mathbb{I}_n$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}_n$.

$$\mathbb{I} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 3.3. *Per il prodotto righe per colonne tra matrici valgono le seguenti proprietà (tutte le volte che ha senso effettuare le operazioni indicate):*

(1) $(AB)C = A(BC)$ *(proprietà associativa);*
(2) $A(B + C) = AB + AC$ *(proprietà distributiva a destra);*
(3) $(A + B)C = AC + BC$ *(proprietà distributiva a sinistra);*
(4) $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$; $\mathbf{0}A = \mathbf{0}$;
(5) $A(kB) = (kA)B = k(AB)$, *per ogni* $k \in \mathbb{R}$;
(6) *se* A *è una matrice quadrata,* $A\mathbf{1} = \mathbf{1}A = A$ *(la matrice unità è l'elemento neutro per il prodotto).*

Dimostrazione. Lasciata per esercizio al lettore. □

Abbiamo visto che –per la somma– (vedi la proprietà (3) della proposizione 3.1) data una qualsiasi matrice A $m \times n$ esiste (unica) la matrice opposta $-A$, ovvero tale che

$$A + (-A) \;=\; -A + A \;=\; \mathbf{0}\,.$$

Viene naturale chiedersi se, analogamente, data una qualsiasi matrice quadrata $A \neq \mathbf{0}$ $n \times n$ esista una matrice A^{-1} $n \times n$ tale che

$$A^{-1}A \;=\; AA^{-1} \;=\; \mathbf{1}\,.$$

Tale matrice, se esiste, sarà detta **(matrice) inversa** di A, e A sarà detta invertibile. Ovviamente A è l'inversa di A^{-1}.

Esempio 3.7. (1) Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'inversa di A è la matrice

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Infatti (verificalo per esercizio)

$$AA^{-1} \;=\; A^{-1}A \;=\; \mathbb{I}\,.$$

(2) Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se la matrice A fosse invertibile, vorrebbe dire che esisterebbe una matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tale che $AA^{-1} = \mathbb{I}$. Ovvero:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x+3y & 3z+3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

il che è chiaramente impossibile dato che (confronto gli elementi della seconda riga, seconda colonna) $0 \neq 1$.

Abbiamo pertanto visto che non tutte le matrici diverse dalla matrice nulla sono invertibili e che esistono matrici invertibili. Per riuscire a capire quando una matrice è invertibile, ci serve introdurre una nuova definizione. Riprenderemo il problema dell'invertibilità di una matrice solo in seguito.

Esercizio 3.1. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

dell'esercizio 3.6 non è invertibile. Infatti supponiamo per assurdo che sia invertibile, ovvero che esista A^{-1}. Allora

$$AB = AC \;\Rightarrow\; A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \;\Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C$$

e quindi

$$B = \mathbb{I}B = \mathbb{I}C = C\,,$$

assurdo, dato che $B \neq C$.

Prova a dimostrare facendo esplicitamente i conti che A non è invertibile usando gli argomenti dell'esercizio 3.7 (2).

3.2. **Determinanti.** La teoria dei determinanti ci permetterà di rispondere a molte domande lasciate in sospeso. Non diamo una definizione rigorosa di determinante, ma solo un metodo di calcolo deldeterminante stesso.

Definizione 3.8. Il **determinante** di una matrice quadrata A è un numero $\det A = |A| \in \mathbb{R}$, che si associa alla matrice A nel seguente modo (induzione sull'ordine della matrice):

(1) Se $A = (a_{11})$ è una matrice 1×1, allora $|A| = a_{11}$;
(2) Se $A = (a_{ij})$ è una matrice $n \times n$, indicando con A_{ij} la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta dalla matrice A eliminando la riga i e la colonna j, allora

$$|A| \;=\; (-1)^{i+1} a_{i1}|A_{i1}| + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in}|A_{in}| \;=\; \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} |A_{ij}|\,.$$

Tale procedura si chiama calcolo del determinante sviluppando secondo la i-esima riga di A.

Esempio 3.8. Calcoliamo il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

sviluppando il determinante secondo la prima riga:

$$|A| \;=\; 1\cdot|(4)| + (-1)2\cdot|(3)| = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2\,.$$

Osservazione 3.1. In generale, possiamo calcolare il determinante di una generica matrice 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

sviluppando il determinante secondo la prima riga:

$$|A| \;=\; a_{11}\cdot|(a_{22})| + (-1)a_{12}\cdot|(a_{21})| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,,$$

ovvero il determinante di una matrice 2×2 è data dal prodotto degli elementi sulla diagonale (principale) meno il prodotto degli altri due elementi.

Osservazione 3.2. Proviamo analogamente a sviluppare il determinante di una generica matrice 3×3:

$$A \;=\; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Sviluppando secondo la prima riga (e ricordando quanto osservato sui determinanti delle matrici 2×2 nella precedente osservazione), si ha:

$$\begin{aligned} |A| \;&=\; a_{11}\left|\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right| \;-\; a_{12}\left|\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}\right| \;+\; a_{13}\left|\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\right| \\ &=\; a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &=\; a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{aligned}$$

Quest'ultima riga si può facilmente ricordare nel seguente modo (noto come **regola di Sarrus**): consideriamo la matrice 3×5 che ha come colonne le colonne A^1, A^2, A^3, A^1, A^2:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Il determinante di A si ottiene sommando i prodotti degli elementi sulle tre "diagonali principali" (ovvero le diagonali che partono in alto a sinistra e terminano in basso a destra) e sottraendo la somma dei prodotti degli elementi sulle tre "diagonali secondarie" (ovvero le diagonali che partono in alto a destra e terminano in basso a sinistra).

Esempio 3.9. Calcoliamo il determinante della matrice 3×3:

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

utilizzando la regola di Sarrus. Abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi

$$|A| = 1\cdot 5\cdot 1 + 2\cdot 6\cdot 1 + 3\cdot 4\cdot 0 - (2\cdot 4\cdot 1 + 1\cdot 6\cdot 0 + 3\cdot 5\cdot 1) = -6\,.$$

Proposition 3.4. *Valgono le seguenti proprietà del determinante:*

(1) $det(A) = det(A^t)$. *Pertanto possiamo sviluppare un determinante secondo le colonne anzichè secondo le righe;*
(2) *se una matrice ha una colonna (o una riga) nulla, allora* $det(A) = 0$*;*
(3) *se ad una colonna* A^i *(a una riga* A_i*) di una matrice* A *si somma un'altra colonna* A^j *(un'altra riga* A_j*) eventualmente moltiplicata per un numero* $k \in \mathbb{R}$*, il determinante non cambia:*

$$det(A^1, \ldots, A^{i-1}, A^i, A^{i+1}, \ldots, A^n) = det(A^1, \ldots, A^{i-1}, A^i + kA^j, A^{i+1}, \ldots, A^n)\,;$$

(4) *se una matrice* A *ha due colonne (due righe) uguali o proporzionali,* $det(A) = 0$*;*
(5) *moltiplicando per* $k \in \mathbb{R}$ *una riga (o una colonna) il deteerminante viene moltiplicato per* k*:*

$$det(A^1, \ldots, A^{i-1}, kA^i, A^{i+1}, \ldots, A^n) = k\,det(A^1, \ldots, A^{i-1}, A^i, A^{i+1}, \ldots, A^n)\,;$$

(6) *se* A *è una matrice diagonale il suo determinante è il prodotto degli elementi diagonali. In particolare* $det(\mathbf{1}) = 1$*;*
(7) *scambiando tra loro due righe (due colonne) di una matrice il determinante cambia segno;*
(8) *sia* $A = (A^1, \ldots, A^{i-1}, A^i, A^{i+1}, \ldots, A^n)$ *una matrice e* B *un vettore colonna. Si ha:*

$$\begin{aligned} det(A^1, \ldots, A^{i-1}, A^i + B, A^{i+1}, \ldots, A^n) &= det(A^1, \ldots, A^{i-1}, A^i, A^{i+1}, \ldots, A^n) \\ &+ det(A^1, \ldots, A^{i-1}, B, A^{i+1}, \ldots, A^n) \end{aligned}$$

(9) *il determinante della matrice prodotto è il prodotto dei determinanti* ***(teorema di Binet)****:*

$$det(AB) = det(A)\,det(B)\,.$$

(10) *se* A *è una matrice invertibile allora* $det(A) \neq 0$ *e*

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}\,.$$

3.3. **Combinazioni lineari e (in)dipendenza lineare.**

Definizione 3.9. Sia A una matrice $m \times n$. Le sue righe $A_1, \ldots, A_m$ si dicono **linearmente dipendenti** se esistono $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che

$$\sum_{j=1}^{m} k_j A_j = k_1 A_1 + \cdots + k_m A_m = (0, \ldots, 0)\,.$$

Se le righe di una matrice non sono linearmente dipendenti si dicono **linearmente indipendenti**.

Analoghe definizioni si danno anche per le colonne di una matrice. Inoltre si possono dare le stesse definizioni per un numero qualunque di righe (o di colonne) di una matrice.

Esempio 3.10. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Le righe di A sono linearmente dipendenti. Infatti, scegliendo $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ e $k_3 = -3$ si ha

$$A_1 + A_2 - 3A_3 \;=\; (0,1,2) + (3,2,1) - 3(1,1,1) \;=\; (0,0,0)\,.$$

Nell'esempio precedente ho "indovinato" quale fosse una particolare tripla di numeri reali k_1, k_2, k_3 che desse il risulttato voluto. Ma come fare per trovarla se non si riesce a "vederla ad occhio"? E come fare a dimostrare che non esiste, e che quindi le righe della matrice sono linearmente indipendenti? Vediamo un esempioche chiarifichi il metodo da usare:

Esempio 3.11. Sia

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo che esistano $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ tali che $k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3 = (0,0,0)$, ovvero

$$k_1(1,1,2) + k_2(3,2,1) + k_3(1,1,1) = (0,0,0)\,.$$

Due vettori sono uguali se e solo se sono uguali a due a due le rispettive componenti. Pertanto l'uguaglianza precedente è equivalente al sistema

$$\begin{cases} k_1 + 3k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \\ 2k_1 + k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

da cui segue (svolgi i conti per esercizio) $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Pertanto le righe di A sono linearmente indipendenti.

Se col metodo dell'esempio 3.11 avessimo ottenuto una tripla di numeri diversa da quella nulla, allora avrebbe voluto dire che le righe di A erano linearmente dipendenti. Il metodo insomma fornisce esplicitamente la terna (in generale la n-upla) di numeri presenti nella definizione di lineare dipendenza, qualora questa sia verificata.

Esercizio 3.2. Applica il metodo spiegato nell'esempio 3.11 alla matrice dell'esempio 3.10.

Esempio 3.12. Sia

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le righe di A sono linearmente dipendenti: $A_1 - A_3 = (0,0)$. Per le colonne di A invece, supponendo che esistano $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tali che $k_1A^1 + k_2A^2$ sia il vettore nullo, ovvero che

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} k_1 + k_2 \\ 3k_1 + 2k_2 \\ k_1 + k_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

si ottiene $k_1 = k_2 = 0$, ovvero le colonne di A sono linearmente indipendenti.

L'esempio precedente ci mostra chiaramente che la lineare dipendenza delle righe e la lineare dipendenza delle colonne sono due concetti diversi, in generale. Però coincidono nel caso delle matrici quadrate. Infatti vale il seguente

Theorem 3.5. *Sia A una matrice quadrata $n \times n$. Allora le righe di A sono linearmente dipendenti se e solo se $det(A) = 0$ se e solo se le colonne di A sono linearmente dipendenti.*

Definizione 3.10. Si dice che una riga A_i è **combinazione lineare** delle altre righe se esistono $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$A_i = a_1 A_1 + \cdots + a_{i-1} A_{i-1} + a_{i+1} A_{i+1} + \cdots + a_n A_n \,,$$

dove n è il numero delle righe di A.

Un'analoga definizione vale per le colonne.

Esempio 3.13. Sia

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,.$$

La riga A_4 è combinazione lineare delle altre righe. Infatti si ha che $A_4 = A_1 + A_2 - 3A_3$.

Theorem 3.6. *Sia A una mtrice $m \times n$. Allora le righe di A sono linearmente dipendenti se e solo se almeno una riga è combinazione lineare delle altre righe.*

Ovviamente il teorema vale anche per le colonne.

Dimostrazione. Dimostriamo separatamente le due implicazioni.

($\Leftarrow$) Per ipotesi esiste (almeno) una riga A_i combinazione lineare delle altre righe, ovvero esistono $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m$ tali che

$$A_i \;=\; a_1 A_1 + \cdots + a_{i-1} A_{i-1} + a_{i+1} A_{i+1} + \cdots + a_n A_n \,.$$

Di conseguenza

$$(0, \dots, 0) \;=\; a_1 A_1 + \cdots + a_{i-1} A_{i-1} - A_i + a_{i+1} A_{i+1} + \cdots + a_n A_n \,,$$

ovvero le righe di A sono linearmente dipendenti (c'è una combinazione lineare nulla con coefficienti non tutti nulli: il coefficiente davanti ad A_i è -1).

($\Rightarrow$) Supponiamo ora che le righe di A siano linearmente dipendenti, ovvero che esistano $k_1, \dots, k_n$ tali che

$$(0, \dots, 0) \;=\; k_1 A_1 + \cdots + k_n A_n \,.$$

Siccome i coefficienti non sono tutti nulli, vuol dire che almeno uno è diverso da 0. Sia $k_i \neq 0$. Allora possiamo dividere per k_i l'uguaglianza precedente e ottenere

$$(0, \dots, 0) \;=\; \frac{k_1}{k_i} A_1 + \cdots + \frac{k_n}{k_i} A_n \,.$$

A questo punto il coefficiente davanti a A_i è 1. Portando tutto il resto dall'altra parte dell'uguale otteniamo

$$A_i \;=\; -\frac{k_1}{k_i} A_1 + \cdots - \frac{k_{i-1}}{k_i} A_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i} A_{i+1} + \cdots - \frac{k_n}{k_i} A_n \,,$$

ovvero che la riga A_i è combinazione lineare delle altre righe. □

FINE PARTE PRIMO COMPITINO

3.4. **Caratteristica e rango.**

Definizione 3.11. Sia A una matrice $m \times n$. Sia $r \leq \min\{m,n\}$. Si chiama **minore di ordine** r una qualunque matrice quadrata $r \times r$ ottenuta nel seguente modo: si scelgono r righe ed r colonne di A e si considera la matrice data dall'intersezione di quelle righe e di quelle colonne.

Esempio 3.14. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A è una matrice 3×3. L'unico minore di ordine 3 di A è la matrice A stessa.

Ci sono 9 diversi minori di ordine 2, dati dalle possibili scelte di 2 righe e 2 colonne della matrice A. Ad esempio due minori di ordine 2 sono:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

ottenuti rispettivamente scegliendo le righe A_1 e A_2 e le colonne A^1 e A^2 per il primo minore; le righe A_1 e A_2 e le colonne A^1 e A^3 per il secondo minore.

Per esercizio prova a scrivere gli altri sette minori di ordine 2 della matrice A.

Ci sono 9 diversi[6] minori di ordine 1, dati dalle possibili scelte di 1 riga e 1 colonna della matrice A. Ad esempio due minori di ordine 1 sono:

$$(0) \quad (2).$$

Il primo lo si ottiene scegliendo la prima riga e la prima colonna di A; il secondo o scegliendo prima riga e terza colonna o scegliendo seconda riga e seconda colonna.

Definizione 3.12. Si dice **caratteristica** di una matrice A $m \times n$, e si indica con $car(A)$, il più grande fra gli ordini dei minori con determinante diverso da 0. Nel caso tutti i minori abbiano determinante 0 (matrice nulla), si dice che la caratteristica è 0.

Equivalentemente si può dire che la caratteristica di una matrice è $p \neq 0$ se e solo se tutti i determinanti dei minori di ordine maggiore di p sono nulli, ed esiste almeno un minore di ordine p con determinante diverso da 0.

Esempio 3.15. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

è una matrice 3×4, quindi $car(A) \leq 3$. Osserviamo che

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = -1,$$

[6] Inteso come "si possono ottenere minori di ordine 1 in 9 modi diversi"... ovviamente alcune differenti scelte possono portare a minori uguali tra loro come matrici.

quindi la caratteristica di A è 3.

Per esercizio, spiega i passaggi del calcolo del determinante.

Esempio 3.16. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

è una matrice 3×3, quindi $car(A) \leq 3$. Osserviamo che $det(A) = 0$ e che il minore di ordine 2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante -1. Pertanto $car(A) = 2$.

Ovviamente il calcolo della caratteristica di una matrice può essere molto lungo. Vi sono tuttavia alcuni metodi che permettono di semplificare il calcolo. Vediamo nei dettagli uno di questi, la riduzione a scala.

Definizione 3.13. Una matrice si dice **a scala** se il numero di zeri che precede il primo elemento non nullo di ogni riga aumenta procedendo dalla prima riga verso l'ultima fino a che non restano (eventualmente) solo righe nulle.

Esempio 3.17. La matrice nulla è a scala, così come le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Le seguenti, invece, non sono matrici a scala:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Proposition 3.7. *Sia A una matrice a scala. Allora La caratteristica di A è uguale al numero di righe non nulle della matrice A.*

Dimostrazione. Sia l il numero di righe non nulle di A. Per dimostrare l'uguaglianza $car(A) = l$ proveremo le due disguaguaglianze.

$car(A) \leq l$. Per tutti gli $r > l$, ogni volta che scelgo un minore di ordine r della matrice A questo contiene almeno una riga nulla. Pertanto il suo determinante è 0. Quindi $car(A) < r$ per ogni $r > l$. Ovvero $car(A) \leq l$.

$car(A) \geq l$. Scegliamo le prime l righe di A (cioè quelle non nulle) e le l colonne a cui appartengono i primi elementi non nulli di ogni riga (poiché la matrice è a scala sono tutte diverse). Poiché la matrice è a scala, questo minore è una matrice triangolare superiore (ovvero tutti gli elementi sotto la diagonale sono nulli) e il suo determinante è il prodotto degli elementi sulla diagonale. Questi sono tutti non nulli e pertanto il determinante di questo minore è diverso da 0. Ovvero $car(A) \geq l$. □

Vediamo un metodo, chiamato **riduzione a scala di una matrice**, che permette, con alcuni semplici passaggi di ottenere da una matrice A una matrice a scala con la stessa caratteristica. Così facendo, il calcolo della caratteristica di A si semplifica molto.

Il metodo è basato sull'applicazione ripetuta di alcune operazioni, dette **operazioni elementari sulle righe** che non cambiano la caratteristica della matrice. Queste sono:

(1) scambiare due righe della matrice;
(2) sommare ad una riga un'altra riga eventualmente moltiplicata per un numero $k \in \mathbb{R}$;
(3) moltiplicare una riga della matrice per un numero reale diverso da 0.

Infatti l'operazione (1) può cambiare il segno del determinante del minore preso in considerazione, mentre l'operazione (2) non cambia il determinante, e l'operazione (3) moltiplica il determinante per un numero diverso da 0. Quindi applicando più volte queste operazioni otteniamo matrici con la stessa caratteristica della matrice di partenza.

Esponiamo ora il **metodo di riduzione a scala**.

(a) A è la matrice nulla? Se sì, vai alpunto (b), altrimenti al punto (c).
(b) Se A è la matrice nulla, allora è già a scala. FINE
(c.1) Altrimenti A ha almeno un elemento diverso da 0. Scambiando eventualmente due righe tra loro (1), mettiamo come prima riga della matrice la (o una delle) riga con meno zeri all'inizio della riga.
(c.2) Sia a_{1l} il primo elemento non nullo della prima riga. Sostituiamo alla riga A_s, $s \neq 1$ la somma $A_s - \frac{a_{1s}}{a_{1l}} A_1$. In tal modo tutte le righe oltre alla prima hanno almeno l elementi nulli all'inizio della riga (cioè più di quanti ne ha la prima riga.
(c.3) D'ora in avanti la prima riga della matrice resta fissa e modificheremo solo le righe della matrice che otteniamo togliendo la prima riga. Se non ci sono più righe, la matrice è a scala (FINE), altrimenti, torniamo al punto (a).

Vediamo l'applicazione del metodo in qualche esempio.

Esempio 3.18. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La seconda e la terza riga sono quelle che hanno meno zeri all'inizio. Scegliamo una di queste (la terza) e portiamola in prima posizione, quindi applichiamo il passo (c.2).

$$\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&1&2&1\\3&2&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{A_3-3A_1}\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&1&2&1\\0&-1&-2&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{A_3+A_2}\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&1&2&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi ottenuto una matrice a scala, le cui tre righe non sono nulle. Quindi $car(A) = 3$.

Esempio 3.19. Sia

$$A = \begin{pmatrix}0&2&1\\2&1&3\\1&1&1\\3&-1&7\end{pmatrix}.$$

La seconda, la terza e la quarta riga sono quelle che hanno meno zeri all'inizio. Scegliamo una di queste (la terza) e portiamola in prima posizione, quindi applichiamo il passo (c.2).

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&3\\0&2&1\\3&-1&7\end{pmatrix}\xrightarrow{A_2-2A_1,A_4-3A_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\0&2&1\\0&-4&4\end{pmatrix}\xrightarrow{A_3+2A_2,A_4-4A_2}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi ottenuto una matrice a scala, le cui prime tre righe non sono nulle. Quindi $car(A) = 3$.

Definizione 3.14. Si dice che una matrice ha **rango per righe** $rk_r = r$ se esistono r righe di A linearmente indipendenti, ma ogni insieme di almeno $r + 1$ righe di A è costituito da righe linearmente dipendenti.

Analogamente si definisce il **rango per colonne**, rk_c.

Theorem 3.8. *Sia A una matrice $m \times n$. Si ha*

$$\mathrm{rk}_r = \mathrm{car}(A) = \mathrm{rk}_c$$

Osservazione 3.3. Siccome rango per righe e per colonne sono uguali, d'ora in avanti lo chiameremo semplicemente rango e lo indicheremo con $rk(A)$.

Dimostrazione. Siccome dalla proprietà (1) del determinante segue che $car(A) = car({}^tA)$ e nella matrice trasposta le colonne diventano righe, basta dimostrare che $rk_r(A) = car(A)$.

Osserviamo che tale identità è ovvia per le matrici a scala (caratteristica e rango per righe sono entrambe uguali al numero di righe non nulle). Inoltre le operazioni per ridurre a scala una matrice che lasciano invariata la caratteristica, lasciano invariato anche il numero di righe linearmente indipendenti, ovvero il rango per righe. Pertanto $rk_r(A) = car(A)$ per ogni matrice A. $\square$

Esempio 3.20. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix}0&2&1\\2&1&3\\1&1&1\\3&-1&7\end{pmatrix},$$

calcola il rango di A.

Siccome $rk(A) = car(A)$, ricordando l'esercizio 3.19 otteniamo $rk(A) = 3$.

Esempio 3.21. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il rango di A procediamo come per il calcolo della caratteristica applicando la riduzione a scala. La seconda, la terza e la quarta riga sono quelle che hanno meno zeri all'inizio. Scegliamo una di queste (la terza) e portiamola in prima posizione, quindi applichiamo il passo (c.2).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_2-2A_1, A_4-3A_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_4+\frac{1}{3}A_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{A_4+\frac{5}{3}A_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tutte le righe sono non nulle, pertanto $rk(A) = 4$.

3.5. **Sistemi lineari.** Vediamo ora un'applicazione di quanto fatto fin'ora sulle matrici: i sistemi di equazioni lineari.

Definizione 3.15. Si chiama **equazione lineare** su $\mathbb{R}$ ogni equazione del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \; = \; b, \tag{2}$$

con $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$.

$a_1, \ldots, a_n$ sono detti **coefficienti** delle incognite e b **termine noto** dell'equazione.

Una n-upla ordinata di numeri reali $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ è detta **soluzione (particolare)** dell'equazione (2) se

$$a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n \; = \; b\,.$$

Osserviamo che un'equazione lineare può ammettere una soluzione, nessuna soluzione o infinite soluzioni, come banalmente mostrato dalle equazioni:

(1) $1x = 1$, che ammette come unica soluzione 1;
(2) $0x = 1$, che non ammette soluzioni;
(3) $0x = 0$, che ammette come soluzioni tutti i numeri reali.

Ovviamente gli esempi precedenti sono piuttosto banali. Vediamo qualche altro esmpio

Esercizio 3.3. Sia data l'equazione lineare

$$3x + 5y = 8.$$

Risulta evidente che una soluzione è data da $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Questa però non è l'unica soluzione. Scelto un qualsiasi valore reale per la x, $x = k$, allora ponendo $y = \frac{8}{5} - \frac{3}{5}k$ si verifica l'equazione. Pertanto le soluzioni dell'equazione sono

$$\left(k, \frac{8}{5} - \frac{3}{5}k\right) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall k \in \mathbb{R}\,.$$

La soluzione $(1, 1)$ si trova per $k = 1$.

Esercizio 3.4. Sia data l'equazione lineare

$$x + y + z = 30.$$

Risulta evidente che una soluzione è data da $(10, 10, 10) \in \mathbb{R}^2$. Questa però non è l'unica soluzione. Scelto un qualsiasi valore reale per la x, $x = k$, e un qualsiasi valore reale per le y, $y = h$, allora ponendo $z = 30 - k - h$ si verifica l'equazione. Pertanto le soluzioni dell'equazione sono

$$(k, h, 30 - h - k) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall (k, h) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Abbiamo pertanto visto che possono non esistere soluzioni, può esserci un'unica soluzione o infinite soluzioni, dipendenti da uno o più parametri reali.

È abbastanza evidente che la teoria delle equazioni lineari non è molto ricca. Molto più interessante studiare sistemi di equazioni lineari.

Definizione 3.16. Un **sistema lineare di m equazioni in n incognite** è

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & = & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{3}$$

Se tutti i termini noti $b_1, \ldots, b_m$ sono nulli, il sistema si dice **omogeneo**.

Definizione 3.17. Una n-upla ordinata di numeri reali $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ è detta **soluzione (particolare)** del sistema se essa è soluzione (particolare) di tutte le m equazioni del sistema.

L'insieme di tutte le soluzioni particolari si chiama **soluzione generale**. Se la soluzione generale di un sistema è non vuota, il sistema si dice **risolubile**.

Dato che una singola equazione lineare può non aver soluzioni, averne una sola o averne infinite, risulta immediato che anche un sistema (basta ad esempio prendere la stessa equazione ripetuta più volte) può non averne, averne una sola o averne infinite.

Esercizio 3.5. Il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \tag{4}$$

ha come unica soluzione $x = 1$, $y = 0$. Infatti, ricavando la x dalla prima equazione, si ottiene $x = 1 - 2y$. Sostituendo nella seconda, si ottiene $1 - 3y = 1$ da cui $-3y = 0$, ovvero $y = 0$. A questo punto segue che $x = 1$.

Osserviamo che l'origine di $\mathbb{R}^n$ è sempre soluzione (detta **soluzione nulla** o **soluzione banale**) di ogni sistema omogeneo. Pertanto un sistema omogeneo è sempre (banalmente) risolubile. Inoltre se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sono due soluzioni del sistema omogeneo, anche $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è una soluzione del sistema omogeneo.

Saremo ovviamente interessati ai sistemi omogenei non banalmente risolubili, ovvero ai sistemi omogenei che ammettono anche altre soluzioni oltre a quella banale.

Dato un sistema lineare non omogeneo, si chiama **sistema lineare omogeneo associato** (al sistema dato) il sistema che si ottiene da quello dato ponendo tutti i termini noti uguali a zero.

Enunciamo senza dimostrazione un teorema che collega le soluzioni generali di un sistema lineare e del sistema omogeneo associato.

Theorem 3.9. *Sia $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ una soluzione particolare di un sistema lineare e V la soluzione generale del sistema lineare omogeneo associato. Allora la soluzione generale del sistema lineare dato è*

$$\boldsymbol{u} + V \; = \; \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{v} \in V\}\,.$$

Definizione 3.18. Due sistemi lineari si dicono **equivalenti** se hanno la stessa soluzione generale.

Per trovare la soluzione generale di un dato sistema lineare quindi la strategia sarà quella di ridurlo, tramite alcune semplici mosse, ad un sistema lineare più semplice ad esso equivalente la cui soluzione generale sia evidente.

È evidente che le seguenti operazioni sulle equazioni di un sistema trasformano un sistema in uno ad esso equivalente:

(1) scambiare due equazioni del sistema;
(2) sommare ad un'equazione un'altra equazione eventualmente moltiplicata per un numero $k \in \mathbb{R}$;
(3) moltiplicare un'equazione del sistema per un numero reale diverso da 0.

Queste operazioni sono esattamente le operazioni elementari sulle righe di una matrice. Possiamo interpretare questo come un indizio di un collegamento tra caratteristica di una matrice e risoluzione di sistemi lineari.

Proviamo ora ad esprimere un sistema lineare nel linguaggio delle matrici.

Al sistema lineare (3) è naturalmente associata la matrice

$$A \; = \; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

detta **matrice incompleta** del sistema, e il vettore

$$B \; = \; \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

detto **il vettore dei termini noti**. Indicando con X il vettore delle incognite

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

il sistema lineare (3) si può scrivere nella seguente notazione matriciale:

$$AX = B,$$

dove il prodotto tra A e X è il prodotto righe per colonne tra matrici.

La matrice ottenuta accostando alla matrice A la colonna dei termini noti, si ottiene un'altra matrice, che contiene tutte le informazioni del sistema, detta **matrice completa** del sistema lineare:

$$(A, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

Esercizio 3.6. Consideriamo il sistema (4). La matrice incompleta del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

il vettore colonna dei termini noti è

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e la matrice completa è

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo infine un'altra possibilità di scrittura per le matrici. La matrice completa si può scrivere evidenziando quali sono le sue colonne:

$$A = (A^1, \ldots, A^n).$$

Con questa notazione il sistema si riscrive facilmente come

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + \cdots + x_n A^n = B.$$

3.6. **Risoluzione di sistemi lineari.** Possiamo finalmente enunciare e dimostrare alcuni interessanti risultati sulla risoluzione di sistemi lineari.

3.6.1. *Il teorema di Rouché-Capelli.* Iniziamo con un risultato che ci permette di capire se un sistema lineare ammette o no soluzioni senza risolverlo. Purtroppo il teorema non fornisce anche un metodo per risolvere effettivamente un sistema lineare, ma solo per capire se soluzioni ce ne sono.

Theorem 3.10 (Rouché-Capelli)**.** *Un sistema lineare ha soluzioni se e solo se la caratteristica della matrice incompleta A e della matrice completa (A, B) sono uguali.*

Dimostrazione. Sia $r = car(A)$. Osserviamo innanzitutto che la matrice (A, B) si ottiene dalla matrice A aggiungendo la colonna B dei termini noti. Pertanto possono accadere due casi:

(1) se la colonna B dipende linearmente dalle colonne $A^1, \ldots, A^n$ di A, allora anche la caratteristica di (A, B) è r;
(2) se la colonna B non dipende linearmente dalle colonne $A^1, \ldots, A^n$ di A, allora la caratteristica di (A, B) è $r + 1$.

Supponiamo che il sistema abbia soluzioni. Ciò vuol dire che esiste (almeno) una n-upla ordinata di numeri reali $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$k_1 A^1 + \cdots + k_n A^n \;=\; B\,.$$

Questo vuole esattamente dire che la colonna B è combinazione lineare delle colonne della matrice A. Per quanto osservato, in questo caso la caratteristica di (A, B) è r.

Viceversa, supponiamo che la caratteristica della atrice completa sia r. Anche A ha caratteristica r, quindi r colonne di A (a meno di rinumerarle, possiamo supporre che siano le prime r) sono linearmente indipendenti. Tutte le altre colonne di A (e di (A, B)) sono combinazione lineare delle colonne $A^1, \ldots, A^r$. In particolare, lo è B, ovvero esistono r numeri reali $h_1, \ldots, h_r \in \mathbb{R}$ tali che

$$B \;=\; h_1 A^1 + \cdots + h_r A^r \;=\; h_1 A^1 + \cdots + h_r A^r + 0A^{r+1} + \cdots + 0A^n\,,$$

il che vuol dire che la n-upla $(h_1, \ldots, h_r, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ è una soluzione del sistema lineare. $\square$

Esercizio 3.7. Consideriamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ \quad x + z = 0 \end{cases}$$

Le matrici del sistema sono

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \quad (A, B) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Calcoliamo le caratteristiche delle due matrici riducendole a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_2 - A_1, A_3 - A_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_3 - \frac{1}{2}A_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui $car(A) = 2$. Per (A, B) si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_2 - A_1, A_3 - A_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_3 - \frac{1}{2}A_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui $car(A, B) = 3$. Pertanto il sistema non ammette soluzioni.

Esercizio 3.8. Consideriamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ x - y + z - t = 0 \\ \quad 2x + t = 1 \end{cases}$$

Le matrici del sistema sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo le caratteristiche delle due matrici riducendole a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_2 - A_1, A_3 - 2A_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{A_3 - A_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui $car(A) = 3$. Per (A,B) si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_2 - A_1, A_3 - 2A_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{A_3 - A_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

da cui $car(A,B) = 3$. Pertanto il sistema ammette soluzioni. Vedremo a breve come trovarle.

Vale la pena di notare che il metodo di riduzione a scala, applicato alle matrici A e (A,B), consta degli stessi passaggi. Pertanto è sufficiente ridurre a scala la matrice completa (A,B) e vedere se c'è una riga con tutti zeri tranne l'ultimo (allora le due caratteristiche sono diverse, e il sistema non ammette soluuzioni) o no (allora le due caratteristiche sono uguali, e il sistema ammette soluzioni).

3.6.2. *Il metodo di Gauss.* Consideriamo il sistema lineare (3) e la sua matrice completa

$$(A,B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

Per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ammette soluzione se e solo se $car\, A = car(A,B) = r$. Supponiamo pertanto sia questo il caso. A meno di scambiare tra loro alcune colonne di A in modo che le prime r colonne siano linearmente indipendenti, dopo la riduzione a scala della matrice (A,B), arriviamo alla seguente matrice

$$\begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \overline{a}_{1n} & \overline{b}_1 \\ 0 & \overline{a}_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \overline{a}_{2n} & \overline{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{a}_{rr} & \cdots & \overline{a}_{rn} & \overline{b}_r \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dove gli elementi $\overline{a}_{11}, \dots, \overline{a}_{rr}$ sono diversi da 0, che rappresenta il seguente sistema equivalente a quello da cui siamo partiti

$$\begin{cases} \overline{a}_{11}x_1 + \overline{a}_{12}x_2 + \cdots + \overline{a}_{1n}x_n & = & \overline{b}_1 \\ \quad \overline{a}_{22}x_2 + \cdots + \overline{a}_{2n}x_n & = & \overline{b}_2 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & = & \cdots \\ \quad \overline{a}_{rr}x_r + \cdots + \overline{a}_{rn}x_n & = & \overline{b}_r \\ \qquad 0 & = & 0 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & = & \cdots \\ \qquad 0 & = & 0 \end{cases}$$

Quest'ultimo sistema lineare è di facile soluzione. Possiamo infatti procedere così: prendiamo come parametri reali le variabili $x_{r+1}, \dots, x_n$, ricaviamo x_r dall'ultima equazione non banale del sistema in funzione di $x_{r+1}, \dots, x_n$, quindi ricaviamo x_{r-1} dalla penultima equazione, e così via. Pertanto il sistema ammette uno spazio delle soluzioni dipendente da $n - r$ parametri reali. In tal ccaso si è soliti dire che il sistema ammette ∞^{n-r} soluzioni (dove si intende, se $n = r$ che $\infty^0 = 1$, ovvero che la soluzione è una sola). Il metodo di risoluzione dei sistemi di equazioni lineari appena enunciato si chiama **metodo di Gauss**.

Esercizio 3.9. Risolviamo ora il sistema lineare dell'esempio 3.8. Come visto dalla riduzione a scala il sistema è equivalente al seguente

$$\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ -2y - 2t = -4 \\ -2z + t = -3 \end{cases}$$

Utilizziamo ora il metodo di Gauss: usando t come parametro reale, dall'ultima equazione ricaviamo

$$z = \frac{t}{2} + \frac{3}{2},$$

dalla seconda

$$y = 2 - t,$$

e finalmente la prima diventa

$$x + (2 - t) + \left(\frac{t}{2} + \frac{3}{2}\right) + t = 4,$$

da cui ricaviamo anche x in funzione del parametro t:

$$x = \frac{1}{2} - \frac{t}{2}.$$

Quindi la soluzione generale del sistema è
$$\left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2},\ 2 - t,\ \frac{t}{2} + \frac{3}{2},\ t \right) \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

3.6.3. *La regola di Cramer.* Passiamo ora ad analizzare il caso di un sistema di n equazioni lineari in n incognite:
$$(5) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & = & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Se il determinante della matrice incompleta associata A è diverso da zero allora la caratteristica di A è n, e pertanto anche la caratteristica della matrice completa $n \times (n+1)$, (A, B), è n. Quindi per il teorema di Rouchè-Capelli ammette soluzioni. Il metodo di Gauss ci dice che la soluzione è unica e ci fornisce un modo di trovarla. Più precisamente vale il seguente risultato

Theorem 3.11 (Cramer)**.** *Il sistema lineare (5) ammette una e una sola soluzione se e solo se il determinante della matrice incompleta A è diverso da zero.*

Dimostrazione. È un'immediata conseguenza del teorema di Rouché-Capelli e del metodo di Gauss. □

Enunciamo e dimostriamo un risultato che fornisce direttamente l'unica soluzione di un sistema lineare $n \times n$.

Theorem 3.12 (Regola di Cramer)**.** *Supponiamo che il sistema lineare (5) sia tale che la matrice associata A abbia determinante diverso da zero, ovvero che abbia una e una sola soluzione. Allora la soluzione $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ è data da*
$$(6) \qquad k_i = \frac{\det(A^1, A^2, \ldots, A^{i-1}, B, A^{i+1}, \ldots, A^n)}{\det A}, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Dimostrazione. Sia $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ l'unica soluzione del sistema (5). Allora
$$B = k_1 A^1 + k_2 A^2 + \cdots + k_n A^n.$$
Fissiamo un indice qualsiasi $i = 1, \ldots, n$. Calcolando il determinante della matrice ottenuta dalla matrice A sostituendo alla i-esima colonna la colonna dei termini noti B si ottiene
$$\begin{aligned} &det(A^1, A^2, \ldots, A^{i-1}, B, A^{i+1}, \ldots, A^n) \\ &\quad = det(A^1, A^2, \ldots, A^{i-1}, k_1A^1 + k_2A^2 + \cdots + k_nA^n, A^{i+1}, \ldots, A^n) \\ &\quad = \sum_{h=1}^{n} k_h\, det(A^1, A^2, \ldots, A^{i-1}, A^h, A^{i+1}, \ldots, A^n) \\ &\quad = k_i\, det(A^1, A^2, \ldots, A^{i-1}, A^i, A^{i+1}, \ldots, A^n), \end{aligned}$$
dove la prima uguaglianza è una semplice riscrittura del vettore B, la seconda è dovuta alla proprietà di multilinearità del determinante e l'ultima al fatto che i determinanti di matrici con colonne uguali sono nulli. Da

quest'uguaglianza si ricava k_i, la cui espressione è esattamente quella data da (6). $\square$

Esercizio 3.10. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x+y \quad\;\; = 2 \\ x-y+z = 3 \\ x+y-z = 4 \end{cases}$$

La matrice associata al sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha determinante $det\, A = 1+1+0-(0-1+1) = 2$ (calcolato usando il metodo di Sarrus[7]). Pertanto il sistema ammette una e una sola soluzione. Troviamola con la regola di Cramer:

$$x = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right|}{2} = \frac{2+4+0-(0-3+2)}{2} = \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}\right|}{2} = \frac{-3+2+0-(0-2+4)}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$z = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right|}{2} = \frac{-4+3+2-(-2+4+3)}{2} = -2$$

Ovvero l'unica soluzione del sistema è $\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, -2\right)$. Infatti:

$$\begin{cases} \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 2 \\ \frac{7}{2} + \frac{3}{2} - 2 = 3 \\ \frac{7}{2} - \frac{3}{2} + 2 = 4 \end{cases}$$

3.7. **Inversa di una matrice.** Possiamo ora ritornare sul problema, lasciato in sospeso, dell'esistenza dell'inversa per una matrice quadrata.

Abbiamo già visto, nella proprietà (10) della proposizione 3.4, che se A è una matrice $n \times n$ invertibile, allora $det\, A \neq 0$.

Ora i tempi sono maturi per stabilire che vale anche il viceversa.

Theorem 3.13. *Sia A una matrice $n \times n$. Se $\det A \neq 0$, allora esiste l'inversa di A: $A^{-1} = (x_{ij})$. I suoi elementi sono dati da*

$$x_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A}$$

dove con A_{ji} indichiamo il minore $(n-1) \times (n-1)$ di A ottenuto cancellando dalla matrice A la riga j e la colonna i.

[7]che si può usare solo per matrici 3×3

Attenzione. Per calcolare l'elemento x_{ij} di A^{-1} alla i-esima riga e j-esima colonna, considero il minore A_{ji} che si ottiene cancellando la j-esima riga e l'i-esima colonna.

Dimostrazione. [8] Siano $A = (a_{ij})$ e $X = (x_{ij})$ la matrice con determinante diverso da zero e la sua "candidata" inversa. Affinché X sia l'inversa di A devono essere verificate le condizioni

(1) $AX = \mathbb{I}$;
(2) $XA = \mathbb{I}$.

Utilizziamo le condizioni date da (1) (sono n^2, tante quante gli elementi di una matrice $n \times n$; infatti due matrici, per essere uguali, devono avere tutti gli elementi corrispondenti uguali).

Moltiplicando A e X righe per colonne, otteniamo la matrice $C = (c_{ij})$, dove

$$c_{ij} \ = \ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj} \, .$$

Siccome vogliamo che $C = \mathbb{I}$, dobbiamo imporre $c_{ii} = 1$ e $c_{ij} = 1$ se $i \neq j$.

Osserviamo che le condizioni lineari che otteniamo formano un sistema lineare di n^2 equazioni in n^2 incognite (le x_{ij}), ma anche che ogni incognita compare solo in n equazioni: più precisamente le incognite $x_{1j}, \ldots, x_{nj}$ compaiono solo nelle condizioni che derivano dalla j-esima colonna delle matrici C e $\mathbb{I}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + \cdots + a_{1n}x_{nj} & = \ 0 \\ \cdots\cdots\cdots & = \ 0 \\ a_{(j-1)1}x_{1j} + a_{(j-1)2}x_{2j} + \cdots + a_{(j-1)n}x_{nj} & = \ 0 \\ a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + \cdots + a_{jn}x_{nj} & = \ 1 \\ a_{(j+1)1}x_{1j} + a_{(j+1)2}x_{2j} + \cdots + a_{(j+1)n}x_{nj} & = \ 0 \\ \cdots\cdots\cdots & = \ 0 \\ a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + \cdots + a_{nn}x_{nj} & = \ 0 \end{cases} \tag{7}$$

La matrice (incompleta) che rappresenta questo sistema lineare è proprio la matrice A, che ha per ipotesi determinante non nullo. Pertanto il sistema (7) ammette una e una sola soluzione, data (per la regola di Cramer) da

$$x_{ij} \ = \ \frac{det(A^1, A^2, \ldots, A^{i-1}, \mathbf{e}^j, A^{j+1}, \ldots, A^n)}{det\, A} \, ,$$

dove $\mathbf{e}^j$ è il vettore che ha tutti zeri tranne al posto i dove c'è un 1. Sviluppaando il determinante di $(A^1, A^2, \ldots, A^{i-1}, \mathbf{e}^j, A^{j+1}, \ldots, A^n)$ rispetto alla i-esima colonna, si ottiene

$$x_{ij} \ = \ (-1)^{i+j} \frac{det\, A_{ji}}{det\, A} \, ,$$

cioè la tesi.

Utilizzando la condizione (2) anzichè la (1) si giunge alla medesima conclusione. □

[8] In queste dispense diamo la dimostrazione generale, mentre a lezione, così come in [1], ci siamo limitati ad esporre il caso $n = 3$.

Esercizio 3.11. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante $det A = 9$ (perchè? prova a calcolarlo). Calcolando i determinanti dei suoi 9 minori 2×2, utilizzando il teorema 3.13, si ricava che l'inversa di A è la matrice (x_{ij}), dove

$$x_{11} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right|}{9} = \frac{1}{9}$$

$$x_{21} = -\frac{\left|\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right|}{9} = \frac{4}{9}$$

$$x_{31} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right|}{9} = -\frac{2}{9}$$

$$x_{12} = -\frac{\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right|}{9} = -\frac{2}{9}$$

$$x_{22} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right|}{9} = \frac{1}{9}$$

$$x_{32} = -\frac{\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right|}{9} = \frac{4}{9}$$

$$x_{13} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right|}{9} = \frac{4}{9}$$

$$x_{23} = -\frac{\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right|}{9} = -\frac{2}{9}$$

$$x_{33} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right|}{9} = \frac{1}{9}$$

Pertanto l'inversa di A è

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

3.8. **Sistemi lineari omogenei.** Concludiamo il capitolo sulle matrici con alcune osservazioni sui sistemi lineari omogenei. Consideriamo pertanto il seguente sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & = & 0 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases} \tag{8}$$

Abbiamo già visto che la caratteristica delle matrici completa e incompleta associate al sistema sono uguali, e che infatti il sistema ammette sempre la soluzione banale (il vettore nullo).

Se la caratteristica della matrice completa è uguale al numero delle incognite (n), allora sappiamo che (teorema di Cramer) c'è una e una sola soluzione, cioè quella nulla. Invece, se $rk\, A = r < n$, allora il sistema ammette ∞^{n-r} incognite, ovvero una famiglia di soluzioni dipendenti da $n - r$ parametri reali, grazie al metodo di Gauss.

Riassumendo:

Theorem 3.14. *Un sistema lineare omogeneo ammette soluzioni non banali se e solo se la caratteristica della matrice associata è minore del numero delle incognite.*

Corollary 3.15. *Un sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite ammette soluzioni non banali se e solo se il determinante della matrice incompleta associata è nullo.*

Esercizio 3.12. Considera il seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} kx + 2y & = & 0 \\ \quad 3y - 2z & = & 0 \\ kx + 2y + 3z & = & 0 \end{cases}$$

Per quali valori di k ammette solo la soluzione banale? Per quali valori ammette infinite soluzioni? Dipendenti da quanti parametri? Quali?

4. Il piano $\mathbb{R}^2$ e lo spazio $\mathbb{R}^3$ (parte II)

Arricchiti di tutte le definizioni e i risultati che abbiamo ottenuto sulle matrici, torniamo ad occuparci del piano e dello spazio.

4.1. **Prodotto scalare.** Siano $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ due vettori dello spazio $\mathbb{R}^3$ (più in generale quanto detto in questa sezione è valido per due vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$).

Definizione 4.1. Il prodotto scalare tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è un numero reale dato dal prodotto righe per colonne tra $\mathbf{v}$ e il trasposto di $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \;=\; \mathbf{v}\mathbf{w}^t \;=\; \sum_i v_i w_i \;\in \mathbb{R}\,.$$

Se $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, allora scriviamo $\mathbf{v}^2$ per $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.

Proposition 4.1. *Valgono le seguenti proprietà del prodotto scalare ($\forall \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$):*

(1) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} \ = \ \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}$;
(2) $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}+\mathbf{u}) \ = \ \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$;
(3) $(\alpha\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} \ = \ \mathbf{v}\cdot(\alpha\mathbf{w}) \ = \ \alpha(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$;
(4) $\mathbf{v}^2 \geq 0$;
(5) $\mathbf{v}^2 = 0$ *se e solo se* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$;
(6) ***(identità del parallelogramma)*** $(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 = \mathbf{v}^2 + 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{w}^2$;
(7) *(identità del parallelogramma)* $(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2 = \mathbf{v}^2 - 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{w}^2$

Dimostrazione. Le dimostrazioni sono semplici verifiche algebriche, lasciate per esercizio al lettore. □

Ricordando la definizione di modulo di un vettore, e il teorema di Pitagora, abbiamo che

$$\| \mathbf{v} \| = \sqrt{\mathbf{v}^2}\,.$$

Dato un qualsiasi vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, definiamo il suo **versore** associato come quel vettore di modulo unitario con stessa direzione e verso di $\mathbf{v}$:

$$\mathit{vers}(\mathbf{v}) \ = \ \frac{\mathbf{v}}{\| \mathbf{v} \|}\,.$$

Theorem 4.2. *Due vettori* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *sono perpendicolari*[9] *se e solo se* $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$.

Dimostrazione. Siano V, W, D rispettivamente i punti terminali dei vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}$ applicati nell'origine O.

($\Rightarrow$) Siccome $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono perpendicolari, per il teorema di Pitagora si ha

$$\mathbf{v}^2 + \mathbf{w}^2 \ = \ (\mathbf{v}+\mathbf{w})^2\,. \tag{9}$$

Da questa e dall'identità del parallelogramma si ottiene $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$.

($\Leftarrow$) Consideriamo un triangolo rettangolo ABC, retto in B tale che il cateto AB sia lungo $\| \mathbf{v} \|$ e il cateto BC $\| \mathbf{w} \|$. Per il teorema di Pitagora, l'ipotenusa CA è lunga $\sqrt{\mathbf{v}^2+\mathbf{w}^2}$.

Il triangolo OVD ha il lato OV lungo $\| \mathbf{v} \|$, il lato VD (che è opposto a OW nel parallelogramma $OVDW$) lungo $\| \mathbf{v} \|$ e il lato OD

$$\sqrt{(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2} \ = \ \sqrt{\mathbf{v}^2 + 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{w}^2} \ = \ \sqrt{\mathbf{v}^2+\mathbf{w}^2}\,,$$

dove l'ultima uguaglianza è data dal fatto che $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$.

Pertanto i triangoli ABC e OVD hanno i tre lati congruenti e sono pertanto congruenti. Quindi OVD è rettangolo in V, quindi $OVDW$ è un rettangolo, e $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono perpendicolari. □

In generale, con **angolo fra due vettori** intendiamo l'angolo convesso individuato dai due vettori. Attenzione: se i due vettori sono antiparalleli, individuano due angoli convessi, ma entrambi piatti. Confondendo il concetto di angolo con quello della sua misura (classe di equivalenza di angoli congruenti), il problema non si pone.

Possiamo ora presentare il significato geometrico del prodotto scalare.

Theorem 4.3. *Siano* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *due vettori non nulli e* θ *l'angolo fra essi. Si ha*

$$\cos\theta \ = \ \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\| \mathbf{v} \| \, \| \mathbf{w} \|}\,.$$

[9]Nota bene: il vettore nullo è perpendicolare (e parallelo) a tutti i vettori

Osservazione. Alla luce di questo teorema, l'identità del parallelogramma si può riscrivere nella forma

$$(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 = \mathbf{v}^2 + 2\cos\theta \parallel \mathbf{v} \parallel \parallel \mathbf{w} \parallel + \mathbf{w}^2 \,,$$

nota come formula di Carnot, o del coseno, generalizzazione del teorema di Pitagora.

Dimostrazione. Consideriamo i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ applicati all'origine O: chiamiamo V e W i loro punti terminali. Chiamiamo P la proiezione ortogonale di W sulla retta contentente OV, e $\mathbf{q} = OQ$ il vettore (ortogonale a $\mathbf{p} = OP$) tale che $\mathbf{q}+\mathbf{p} = \mathbf{w}$. Siccome $\mathbf{p}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, esiste un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{v}$, dove $\alpha > 0$ se l'angolo tra i due vettori è acuto, $\alpha < 0$ se l'angolo è ottuso.

Svolgiamo alcuni calcoli:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}+\mathbf{p} &= \mathbf{w} \\ \mathbf{v}\cdot(\mathbf{q}+\mathbf{p}) &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} \,. \end{aligned}$$

Siccome $\mathbf{v}$ e $\mathbf{q}$ sono ortogonali,

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{p} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} \,.$$

Poichè $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{v}$, si ottiene

$$\alpha = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{v}^2} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\parallel \mathbf{v} \parallel^2} \,. \tag{10}$$

Dalla trigonometria sappiamo che

$$\parallel \mathbf{p} \parallel = |\cos\theta| \parallel \mathbf{w} \parallel \,,$$

ovvero (dato che α e $\cos\theta$ hanno segno concorde)

$$\alpha \parallel \mathbf{v} \parallel = \cos\theta \parallel \mathbf{w} \parallel \,.$$

Ricavando α da quest'ultima relazione e eguagliando con quanto ottenuto in (10), si ha

$$\frac{\parallel \mathbf{w} \parallel}{\parallel \mathbf{v} \parallel}\cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\parallel \mathbf{v} \parallel^2} \,,$$

e, infine, quanto voluto:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\parallel \mathbf{v} \parallel \parallel \mathbf{w} \parallel} \,.$$

□

Per concludere, una piccola conseguenza del teorema precedente:

Corollary 4.4. *Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ un vettore e $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ un versore. Allora la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su $\hat{\mathbf{u}}$ è data da*

$$(\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,\hat{\mathbf{u}}$$

ovvero è quel vettore che ha per direzione la direzione di $\hat{\mathbf{u}}$, per modulo il valore assoluto del prodotto scalare tra $\hat{\mathbf{u}}$ e $\mathbf{v}$, e per verso il verso di $\hat{\mathbf{u}}$ se il prodotto scalare è positivo, il verso opposto se il prodotto scalare è negativo.

Dimostrazione. Per il teorema 4.3

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \cos\theta \parallel \mathbf{v} \parallel \parallel \hat{\mathbf{u}} \parallel = \cos\theta \parallel \mathbf{v} \parallel .$$

Ricordando dalla trigonometria che la lunghezza (con segno) di un cateto è data dal prodotto della lunghezza dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo compreso, segue banalmente la tesi. □

4.2. **Prodotto vettoriale.** Il prodotto vettoriale, a differenza del prodotto scalare, è definito solo nello spazio $\mathbb{R}^3$.

Definizione 4.2. Dati $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, si definisce **prodotto vettoriale** tra i due vettori il vettore $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ (a volte indicato anche come $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$, si legge "$\mathbf{v}$ vettor $\mathbf{w}$"):

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} ,$$

dove $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ è la terna di versori che forma la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Grazie alle proprietà del determinante, si ha

Proposition 4.5. *Valgono le seguenti proprietà del prodotto vettoriale (per ogni* $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$*)*

(V_1) $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$;
(V_2) $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$;
(V_3) $(\alpha\mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \alpha(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{v} \wedge (\alpha\mathbf{w})$;
(V_4) $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$;
(V_5) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{0} = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$;
(V_6) $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{0}$ *se e solo se* $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ *tale che* $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{w}$ *o* $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{v}$;
(V_7) $\parallel \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \parallel^2 = \parallel \mathbf{v} \parallel^2 \parallel \mathbf{w} \parallel^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2$;
(V_8) $\parallel \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \parallel = \parallel \mathbf{v} \parallel \parallel \mathbf{w} \parallel \sin\theta$.

Dimostrazione. È una semplice verifica algebrica, che si può ottenere sfruttando le proprietà del determinante. Lasciata per esercizio al lettore. □

Dalla proprietà (V_8) segue che, se $OACB$ è il parallelogramma di lati $\mathbf{v}$ (OA e BC) e $\mathbf{w}$ (OB e AC), allora siccome

$$\parallel \mathbf{w} \parallel \sin\theta = BH$$

dove H è la proiezione ortogonale di B su OA, ovvero BH è l'altezza del parallelogramma relativa alla base OA, si ha

$$\parallel \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \parallel = \parallel \mathbf{v} \parallel \parallel \mathbf{w} \parallel \sin\theta = OA \cdot BH ,$$

ovvero *il modulo del prodotto vettoriale è l'area del parallelogramma che ha i due vettori come lati.*

La proprietà (V_5) ci dice invece che *la direzione del prodotto vettoriale è ortogonale alle direzioni dei due vettori.*

Per finire, *il verso del prodotto vettoriale è dato dalla regola della mano destra*: se $\mathbf{v}$ ha la direzione del pollice della mano destra, e $\mathbf{w}$ ha la direzione dell'indice, allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ ha la direzione del medio.

Attenzione! Il prodotto vettoriale non gode della proprietà associativa, ovvero in generale

$$(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u})$$

come illustrato dal seguente esempio. Sarà pertanto fondamentale indicare sempre con delle parentesi l'ordine in cui si eseguono le operazioni.

Esempio 4.1. Calcoliamo $\mathbf{i} \wedge (\mathbf{j} \wedge \mathbf{j})$ e $(\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) \wedge \mathbf{j}$.

$$\mathbf{i} \wedge (\mathbf{j} \wedge \mathbf{j}) = \mathbf{0}$$

per la proprietà (V_4). Invece

$$(\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{i}\,.$$

Il prodotto vettoriale ha numerose applicazioni. Vediamo ad esempio:

Esempio 4.2. Dati i punti $A = (1, 2)$, $B = (2, 1)$, $C = (4, 4)$, trova l'area del triangolo ABC.

Osserviamo innanzitutto che l'area di un triangolo è la metà dell'area del (di uno dei) parallelelogramma che ha due dei lati del triangolo come lati e il terzo come diagonale. Inoltre i punti del piano possono essere visti come punti dello spazio aggiungendo una terza coordinata nulla.

Quindi i punti in considerazione sono $A = (1, 2, 0)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (4, 4, 0)$ e i vettori che rappresentano i lati del parallelogramma sono (ad esempio, si possono scegliere due lati qualsiasi): $\mathbf{v} = C - A = (3, 2, 0)$ e $\mathbf{w} = C - B = (2, 3, 0)$. L'area del parallelogramma è dato dal modulo del prodotto vettore, e quindi l'area di ABC è

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \parallel \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \parallel = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \right\| = \frac{5}{2}$$

Esempio 4.3. Trova tutti i vettori perpendicolari a $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ e $\mathbf{w} = (0, 1, 0)$ I vettori cercati sono tutti quuelli paralleli a $\mathbf{u} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$, ovvero tutti i suoi multipli. Troviamo innanzitutto $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$.

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} = \mathbf{k} - 3\mathbf{i} = (-3, 0, 1)\,.$$

Pertanto i vettori cercati sono della forma $t(-3, 0, 1)$, al variare di $t \in \mathbb{R}$,

$$(-3t, 0, t), \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

4.3. **Prodotto misto.** Dati tre vettori $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, definiamo **prodotto misto** tra i tre vettori il numero reale dato da

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u})\,.$$

Svolgendo i calcoli, si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\wedge\mathbf{u}) &= (v_1,v_2,v_3)\cdot det\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\end{pmatrix}\\
&= (v_1,v_2,v_3)\cdot(w_2u_3-w_3u_2,-w_1u_3+w_3u_1,w_1u_2-w_2u_1)\\
&= v_1(w_2u_3-w_3u_2)-v_2(w_1u_3-w_3u_1)+v_3(w_1u_2-w_2u_1)\\
&= det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\\ u_1 & u_2 & u_3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e quindi si trova una forma molto semplice per scrivere il prodotto misto.

Grazie alle proprietà dei determinanti, valgono le seeguenti proprietà del prodotto misto.

Proposition 4.6. *Valgono le seguenti proprietà del prodotto misto (per ogni $\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u}\in\mathbb{R}^3$)*

(M_1) *(permutazione ciclica)* $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\wedge\mathbf{u})=\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})$;
(M_2) $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\wedge\mathbf{u})=-\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\wedge\mathbf{w})$;
(M_3) $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\wedge\mathbf{u})=0$ *se e solo se i tre vettori sono complanari.*

Dimostrazione. (M_1) e (M_2) sono banali conseguenze della proprietà dei determinanti per cui scambiando due righe tra loro il determinante cambia segno.

(M_3) è conseguenza immediata del fatto che tre vettori sono complanari se e solo se sono linearmente dipendenti. □

Se i tre vettori non sono complanari, $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\wedge\mathbf{u})$ ci dà la lunghezza (con segno) della proiezione di $\mathbf{v}$ sulla direzione ortogonale a $\mathbf{w}$ e a $\mathbf{u}$ per il modulo del prodotto vettoriale $\mathbf{w}\wedge\mathbf{u}$, che già sappiamo essere l'area del parallelogramma individuato da $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u}$. Pertanto *il modulo di* $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\wedge\mathbf{u})$ *è il volume del parallelepipedo individuato da* $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *e* $\mathbf{u}$. Il segno è positivo se $(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u})$ è una terna destrorsa (ovvero orientata come $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$, o se preferite come pollice, indice e medio della mano destra), negativo altrimenti.

Esercizio 4.1. Ricordando che il volume il un tetraedro è $\frac{1}{6}$ il volume del parallelepipedo corrispondente, calcolare il volume del tetraedro di vertici $A=(1,2,0)$, $B=(0,1,2)$, $C=(2,0,1)$, $D=(1,0,-1)$.

4.4. **I postulati di Euclide.** Prima di andare a trattare un po' di geometria nel piano e nello spazio, enunciamo **i cinque postulati**[10] **di Euclide** su cui si basa la geometria euclidea:

I Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta.
II Si può prolungare un segmento oltre i due punti indefinitamente.
III Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio.
IV Tutti gli angoli retti sono uguali.
V Dato un punto e una retta, esiste una e una sola retta passante per il punto e parallela alla retta data.

[10] In realtà oltre ai cinque enunciati ce ne sono altri di sottaciuti. Un'assiomatizzazione completa e corretta della geometria euclidea è stata data da David Hilbert nel 1899, e comprende 21 assiomi.

Notiamo che ci sono molte altre versioni del V postulato equivalenti a quella qui enunciata.

4.5. **Geometria nel piano: rette.** In questa sezione tratteremo l'entità geometrica più semplice del piano $\mathbb{R}^2$: la retta.

Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con coordinate (x, y) e vettori della base standard $\mathbf{i} = (1, 0)$ e $\mathbf{j} = (0, 1)$.

4.5.1. *L'equazione della retta.* Dato un vettore non nullo $\mathbf{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$ e un punto $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il vettore $\mathbf{v}$ individua una direzione e –per il V postulato di Euclide– esiste una e una sola retta r parallela alla direzione individuata da $\mathbf{v}$ (brevemente diremo "parallela a $\mathbf{v}$) passante per il punto P_0. Troviamola.

Un punto $P = (x, y)$ del piano appartiene alla retta r se e solo se $P - P_0$ è parallelo al vettore $\mathbf{v}$, ovvero se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $P - P_0 = t\mathbf{v}$. Quindi, esplicitamente

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{11}$$

Le equazioni (11) della retta r sono dette **equazioni parametriche** (ovvero dipendenti da un parametro t) della retta r passante per il punto P_0 e parallela al vettore $\mathbf{v}$.

Dalle equazioni parametriche è facile ricavare quelle cartesiane. Supponiamo innanzitutto $v_x = 0$. In questo caso le due equazioni su riducono a

$$x = x_0\,. \tag{12}$$

Se invece $v_x \neq 0$, possiamo ricavare t in funzione di x dalla prima equazione

$$t = \frac{1}{v_x}(x - x_0)\,,$$

e, sostituendo nella seconda ottenere

$$y = y_0 + \frac{v_y}{v_x}(x - x_0)\,. \tag{13}$$

Infine, moltiplicando da entrambi i lati per v_x si ottiene l'**equazione cartesiana** della retta r passante per il punto P_0 e parallela al vettore $\mathbf{v}$:

$$v_x(y - y_0) = v_y(x - x_0)\,. \tag{14}$$

Notiamo che l'equazione (14), per $v_x = 0$ si riduce alla (12), ed è quindi valida qualunque sia $\mathbf{v}$.

Ora, se abbiamo assegnati due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, per il I postulato di Euclide sappiamo che esiste una e una sola retta r passante per entrambi. Infatti il vettore direzione di r è dato da $\mathbf{v} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Dalle equazioni (11) e (14) ricaviamo rispettivamente le equazioni parametriche e cartesiane in questo caso:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{15}$$

$$(x - x_1)(y_1 - y_2) = (y - y_1)(x_1 - x_2)\,. \tag{16}$$

Dato un vettore $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ non nullo e un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ per trovare la retta passante per P_0 ortogonale a $\mathbf{n}$, basta imporre al punto $P = (x, y)$ la condizione che il vettore $P - P_0 = (x - x_0, y - y_0)$ sia ortogonale (ovvero abbia prodotto scalare nullo) al vettore $\mathbf{n}$:

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) = 0 . \tag{17}$$

In tutti i casi abbiamo trovato che l'equazione di una retta nel piano è della forma

$$ax + by + c = 0 , \quad a, b, c \in \mathbb{R} . \tag{18}$$

Nel caso in cui $b \neq 0$ (retta non verticale) si può dividere l'equazione precedente per b e ottenere l'equazione della retta in forma esplicita

$$y = mx + q ,$$

dove $m = \tan\theta$ (θ è l'angolo tra la retta e l'asse $y = 0$) è detto **coefficiente angolare**.

4.5.2. *Parallelismo e perpendicolarità tra rette.* Due rette r (di equazione $ax + by + c = 0$) e r_1 (di equazione $a_1x + b_1y + c_1 = 0$) sono parallele se e solo se i vettori $\mathbf{n}_r = (a, b)$ e $\mathbf{n}_{r_1} = (a_1, b_1)$ a loro ortogonali sono paralleli, ovvero se e solo se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{n}_{r_1} = \mathbf{n}_r$:

$$r // r_1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{R} \quad t.c. \begin{cases} a_1 = ka \\ b_1 = kb \end{cases} \tag{19}$$

Notiamo che la condizione è equivalente al fatto che il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}$$

sia nullo. Siccome la matrice A è la matrice incompleta associata al sistema

$$\begin{cases} ax + by & = & -c \\ a_1x + b_1y & = & -c_1 \end{cases} ,$$

ciò significa che il determinante di A è diverso da zero se e solo se le due rette si intersecano in un solo punto, cioè se e solo se non sono parallele.

Due rette r (di equazione $ax+by+c = 0$) e r_1 (di equazione $a_1x+b_1y+c_1 = 0$) sono perpendicolari se e solo se i vettori $\mathbf{n}_r = (a, b)$ e $\mathbf{n}_{r_1} = (a_1, b_1)$ a loro ortogonali sono perpendicolari, ovvero se e solo se $\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{n}_{r_1} = 0$:

$$r \perp r_1 \quad \Leftrightarrow \quad aa_1 + bb_1 = 0 . \tag{20}$$

Analogamente, l'angolo θ tra due rette r (di equazione $ax + by + c = 0$) e r_1 (di equazione $a_1x + b_1y + c_1 = 0$) è pari all'angolo tra i vettori $\mathbf{n}_r = (a, b)$ e $\mathbf{n}_{r_1} = (a_1, b_1)$ a loro ortogonali. Pertanto

$$r\hat{r}_1 = \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{|\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{n}_{r_1}|}{\| \mathbf{n}_r \| \| \mathbf{n}_{r_1} \|} = \frac{|aa_1 + bb_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} .$$

4.6. **Geometria nello spazio: rette e piani.** In questa sezione tratteremo le entità geometrica più semplice dello spazio $\mathbb{R}^3$: la retta e il piano.

Consideriamo $\mathbb{R}^3$ con coordinate (x, y, z) e vettori della base standard $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

4.6.1. *L'equazione della retta.* Analogamente al caso della retta nel piano, dato un vettore non nullo $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$ e un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, il vettore $\mathbf{v}$ individua una direzione e –per il V postulato di Euclide– esiste una e una sola retta r parallela a $\mathbf{v}$ passante per il punto P_0. Troviamola.

Un punto $P = (x, y, z)$ dello spazio appartiene alla retta r se e solo se $P - P_0$ è parallelo al vettore $\mathbf{v}$, ovvero se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $P - P_0 = t\mathbf{v}$. Quindi, esplicitamente

$$\begin{cases} x &= x_0 + tv_x \\ y &= y_0 + tv_y \\ z &= z_0 + tv_z \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{21}$$

in completa analogia con quanto avviene nel piano.

Le equazioni (21) della retta r sono dette **equazioni parametriche** (ovvero dipendenti da un parametro t) della retta r passante per il punto P_0 e parallela al vettore $\mathbf{v}$.

Se tutte e tre le coordinate del vettore $\mathbf{v}$ sono non nulle, allora si può ricavare il parametro t dalle tre equazioni e ricavare così le **equazioni in forma normale** della retta:

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}\,. \tag{22}$$

Nel caso in cui invece una delle coordinate del vettore $\mathbf{v}$ sia nulla, ad esempio $v_z = 0$, allora la retta soddisfa l'equazione $z = z_0$. L'altra equazione si ricava come nel caso del piano.

Ora, se abbiamo assegnati due punti $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, per il I postulato di Euclide sappiamo che esiste una e una sola retta r passante per entrambi. Infatti il vettore direzione di r è dato da $\mathbf{v} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Dalle equazioni (21) e (22) ricaviamo rispettivamente le equazioni parametriche e in forma normale in questo caso:

$$\begin{cases} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{23}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\,. \tag{24}$$

Ovviamente anche in questo caso vale l'osservazione che se due coordinate dei punti sono uguali, ad esempio $z_1 = z_2$, allora la retta soddisfa l'equazione $z = z_1$. L'altra equazione si trova come nel caso del piano.

Per concludere notiamo quindi che nello spazio le equazioni di una retta sono un sistema di due equazioni:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ex + fy + gz + h = 0 \end{cases}, \tag{25}$$

dove $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$, e la caratteristica della matrice incompleta associata al sistema

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{pmatrix}$$

è 2.

Esercizio 4.2. Giustifica l'affermazione precedente.

4.6.2. *Parallelismo e perpendicolarità tra rette nello spazio.* Osserviamo che le posizioni reciproche di due rette r e r_1 nello spazio possono essere più complesse di quelle che è possibile che assumano nel piano.

Definizione 4.3. Siano r e r_1 rette nello spazio. Allora si ha uno (e uno solo) dei seguenti casi:

(1) $r \cap r_1 = r$ (in particolare sono complanari): le rette sono dette **coincidenti**;
(2) $r \cap r_1 = P$ (in particolare sono complanari): le rette sono dette **incidenti**;
(3) $r \cap r_1 = \emptyset$ e le rette sono complanari: le rette sono dette **parallele**;
(4) $r \cap r_1 = \emptyset$ e le rette non sono complanari: le rette sono dette **sghembe**.

Due rette sono parallele se e solo se i loro vettori direzione ($\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$) sono paralleli, ovvero se le rette r e r_1 sono date in forma parametrica

$$\begin{cases} x &= x_0 + tv_x \\ y &= y_0 + tv_y \\ z &= z_0 + tv_z \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\,, \qquad \begin{cases} x &= x_0 + hw_x \\ y &= y_0 + hw_y \\ z &= z_0 + hw_z \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}\,,$$

allora le due rette sono parallele se e solo se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{v} = k\mathbf{w}$, ovvero tale che

$$\begin{cases} v_x = kw_x \\ v_y = kw_y \\ v_z = kw_z \end{cases} .$$

Le rette r e r_1 sono perpendicolari se e solo se sono *incidenti* e in più i loro vettori direzione $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono perpendicolari, ovvero

$$v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = 0. \tag{26}$$

Attenzione: serve anche la condizione di incidenza... le due rette potrebbero verificare la condizione (26), ma essere sghembe, e pertanto non perpendicolari.

4.6.3. *L'equazione del piano.* Siano dati un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e due vettori non linearmente dipendenti (cioè non paralleli e non nulli $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$.

Un punto $P = (x, y, z)$ dello spazio appartiene al piano π passante per P_0 e parallelo ai vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ se e solo se $P - P_0$ è complanare ai vettore $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, ovvero se e solo se è loro combinazione lineare. Quindi, esplicitamente

$$\begin{cases} x &= x_0 + tv_x + hw_x \\ y &= y_0 + tv_y + hw_y \\ z &= z_0 + tv_z + hw_z \end{cases} \quad t, h \in \mathbb{R}\,, \tag{27}$$

Le equazioni (27) del piano π sono dette **equazioni parametriche** (ovvero dipendenti dai parametri t e h) del piano π passante per il punto P_0 e parallelo ai vettore $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

Osserviamo che il piano π, essendo parallelo ai vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, è ortogonale al vettore $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$. Per ricavare l'equazione cartesiana del piano nello spazio è perciò sufficiente trovare l'equazione del piano β passante per un punto P_0 e perpendicolare al vettore non nullo $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$.

Analogamente a quanto visto per la retta nel piano, un punto $P = (x, y, z)$ appartiente al piano β se e solo se $P - P_0$ e $\mathbf{n}$ sono ortogonali, ovvero se e solo se

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) \;=\; 0\,. \tag{28}$$

In tutti i casi abbiamo trovato che l'equazione di una retta nel piano è della forma

$$ax + by + cz + d \;=\; 0\,, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}\,. \tag{29}$$

Questo chiarifica l'equazione (25), che afferma che una retta è ottenibile come intersezione di due piani.

Esercizio 4.3. In analogia a quanto fatto per la retta nel piano e per la retta nello spazio, trova il piano passante per tre punti $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ non allineati.

Soluzione. L'equazione del piano è data da

$$det \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} \;=\; 0\,.$$

4.6.4. *Parallelismo e perpendicolarità tra piani.*

Definizione 4.4. Dati due piani α, β diciamo che sono **perpendicolari** se e solo se i vettori a loro normali, $\mathbf{n}_\alpha$ e $\mathbf{n}_\beta$ sono perpendicolari.

Per definizione quindi due piani π (di equazione $ax + by + cz + d = 0$) e π_1 (di equazione $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$) sono perpendicolari se e solo se

$$aa_a + bb_1 + cc_1 \;=\; 0\,.$$

I due piani π e π_1 sono paralleli se e solo se i loro vettori normali ($\mathbf{n}_\pi = (a, b, c)$ e $\mathbf{n}_{\pi_1} = (a_1, b_1, c_1)$) sono paralleli, ovvero se e solo se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{n}_\pi = k\mathbf{n}_{\pi_1}$, ovvero

$$\begin{cases} a = ka_1 \\ b = kb_1 \\ c = kc_1 \end{cases}.$$

4.6.5. *Fascio di piani per una retta.* Dati due piani non paralleli π (di equazione $ax + by + cz + d = 0$) e π_1 (di equazione $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$) si ha

$$car \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} \;=\; 2\,,$$

e quindi il sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \end{cases}$$

ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni, ovvero l'intersezione tra i piani è una retta, r. Ovviamente ci sono infinite differenti coppie di piani che individuano la retta r.

L'insieme di tutti i piani passanti per la retta r si dice **fascio di piani di asse** r. Date le equazioni di r

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \end{cases}, \tag{30}$$

si ha che tutti i piani della forma

$$\lambda(ax + by + cz + d) + (1 - \lambda)(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0, \tag{31}$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, passano per la retta r: infatti i punti di r verificano (30) e pertanto verificano anche (31). Si può dimostrare, viceversa, che i piani della forma indicata dall'equazione (31), al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, sono tutti e soli i piani passanti per r.

References

[1] G. Anichini, G. Conti: Geometria analitica e algebra lineare, viii+382. Pearson – Prentice Hall, San Bonico (PC), 2009.

Dipartimento di Matematica, Università di Parma, Parco Area delle Scienze 53/A, I-43124 Parma, Italy

E-mail address: alberto.saracco@unipr.it