3. Trasformazioni affini

Non possiamo in questa sede trattare l'argomento con la dovuta accuratezza, ci limitiamo a un'esposizione sommaria.

3.1. **Definizione e primi esempi (isometrie).**

Definizione 3.1. *Una* trasformazione affine *del piano è un'applicazione biunivoca* $\alpha \xrightarrow{F} \beta$ *di un piano* α *in un piano* β *che trasforma rette in rette. Una* trasformazione affine *dello spazio è un'applicazione biunivoca* F *dello spazio in sè che trasforma rette in rette.*

Vediamo alcuni esempi di trasformazioni affini. Innanzi tutto consideriamo i *moti rigidi*, che consistono nel movimento di tutto il piano come se fosse un foglio rigido (ad es. di compensato) o di tutto lo spazio come se fosse un blocco rigido (ad es. un pezzo di pietra). Ci sono due esempi fondamentali di moti rigidi:
a) La *rotazione* del piano attorno ad un punto ovvero la rotazione dello spazio attorno ad una retta.
b) Con il termine *traslazione* si intende la trasformazione che sottopone tutti i punti del piano (o dello spazio) ad un medesimo spostamento. In altri termini, fissato un vettore $\vec{v}$, consideriamo l'applicazione $T_{\vec{v}}$ del piano (dello spazio) in se stesso definita da

$$T_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v}.$$

In Fig. 18a si vede l'effetto di una traslazione su un triangolo.

Come detto questi due esempi di moti rigidi sono fondamentali perché è possibile provare che

> *tutti i moti rigidi del piano (dello spazio) si ottengono componendo rotazioni intorno ad un punto (intorno ad un asse) e traslazioni.*

Esercizio 3.2. *Mostrare che dati due piani paralleli, esistono infinite traslazioni che mandano il primo nel secondo piano.*

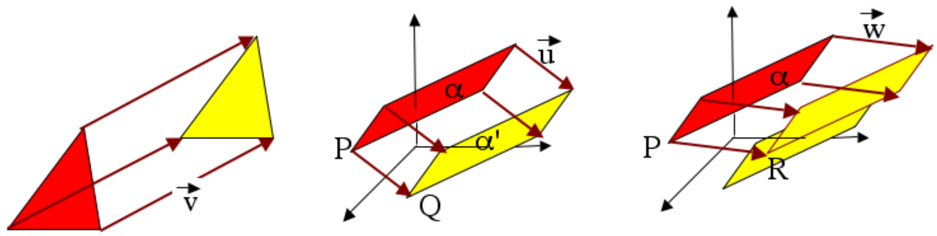

FIGURE 18. a - b - c

<u>Soluzione</u>. In Fig. 18b si vede l'effetto della traslazione $T_{\vec{u}}$ su un certo piano α. In particolare P viene mandato in Q e dunque $Q = T_{\vec{u}}(P) = P + \vec{u}$, pertanto

$$\vec{u} = Q - P.$$

Il piano α viene così mandato nel piano α'.

Se, invece di Q, prendo un altro punto R del piano α' e considero il vettore

$$\vec{w} := R - P$$

ottengo, come mostra la Fig. 18c, che la traslazione $T_{\vec{w}}$ manda il piano α ancora nel piano α' (i due parallelogrammi gialli in Fig. 18c sono complanari).

La conclusione è che

> *dati due piani paralleli α, α' e comunque scelti un punto P di α e un punto Q di α', la traslazione $T_{\vec{v}}$, dove $\vec{v} = Q - P$, manda il piano α nel piano α'.*

□

Lo stesso discorso vale per le rette:

> *date due rette parallele r, r' e comunque scelti un punto P di r e un punto Q di r', la traslazione $T_{\vec{v}}$, dove $\vec{v} = Q - P$, manda la retta r nellla retta r'.*

Altri esempi importanti di trasformazioni affini sono date dalle *riflessioni*: la riflessione del piano rispetto ad una retta e la riflessione dello spazio rispetto ad un piano. Precisamente, fissata una retta r del piano, la riflessione rispetto ad r è la trasformazione che manda ciascun punto P del piano nel suo simmetrico P' rispetto alla retta r. Fissato un piano α nello spazio, la riflessione rispetto ad α è la trasformazione che manda ciascun punto P dello spazio nel suo simmetrico P' rispetto al piano α.

Tutte queste applicazioni (rotazioni, traslazioni, riflessioni) sono trasformazioni affini, infatti è evidente che mandano rette in rette e inoltre sono tutte biunivoche. Per verificare quest'ultimo aspetto basta osservare che possegono un'inversa: l'inversa di una rotazione in senso antiorario di un angolo θ è la rotazione (intorno allo stesso punto o asse) in senso orario dello stesso angolo; l'inversa della traslazione $T_{\vec{v}}$ è $T_{-\vec{v}}$; ogni riflessione è l'inversa di se stessa, perchè se P' è il simmetrico di P rispetto alla retta r (rispetto al piano α), allora P è il simmetrico di P'.

Mentre i moti rigidi trasfomano ogni figura in una figura uguale, ma diversamente dislocata nel piano (o nello spazio), una riflessione del piano trasforma la suola della scarpa destra nella suola di una scarpa sinistra e una riflessione nello spazio trasforma la mano destra nella mano sinistra.

Tuttavia tutte queste trasformazioni non mutano la distanza tra due punti e perciò si chiamano *isometrie*. Si potrebbe dimostrare che

> *tutte le isometrie del piano (dello spazio) si ottengono componendo rotazioni, traslazioni e riflessioni.*

Esercizio 3.3. *Che cos'è un moto rigido?*

(Suggerimento di soluzione.) Dare la definizione di moto rigido, dare esempi (rotazioni e traslazioni) e concludere dicendo che ogni moto rigido si può descrivere come composizione di ... $\square$

Esercizio 3.4. *Che cos'è un'isometria?*

Soluzione. Un'isometria tra piani (risp. dello spazio) è una trasformazione $\alpha \xrightarrow{F} \beta$ tra due piani (risp. una trasformazione dello spazio in sè) che non altera la distanza tra due punti, vale a dire presi due punti P e Q qualsiasi, vale

$$||F(P) - F(Q)|| = ||P - Q||.$$

I moti rigidi e le riflessioni sono isometrie. Ogni isometria si ottiene come composizione di moti rigidi e riflessioni. $\square$

3.2. **Altri esempi, più generali, di trasformazioni affini.** Ora consideriamo un altro tipo di trasformazione affine che non è un'isometria[5].

Definizione 3.5. *Un* cambiamento di scala *in direzione di tre assi ortogonali è una mappa della forma*

$$\begin{cases} x' = k_1 x \\ y' = k_2 y \\ z' = k_3 z \end{cases} \tag{3.1}$$

dove $k_1, k_2, k_3 > 0$.

Questa applicazione lascia fissa l'origine e dilata o contrae tutti i segmenti paralleli all'asse delle x di un fattore k_1, tutti i segmenti paralleli all'asse delle y di un fattore k_2 e tutti i segmenti paralleli all'asse delle z di un fattore k_3.

Analogamente si possono considerare nel piano cambiamenti di scala in direzione di due assi ortogonali.

Si dimostra il seguente

Teorema 3.6. *Una trasformazione affine dello spazio (o del piano) si può sempre descrivere nel modo seguente:*
- prima un'isometria
- poi un cambiamento di scala nella direzione di tre (due) assi ortogonali per opportuni fattori di scala
- infine un'altra isometria.

[5] Salvo nel caso in cui $k_1 = k_2 = k_3 = \pm 1$

Per illustrare questo risultato consideriamo il seguente esempio. Identifichiamo il piano con una piantina di Parma distesa sul tavolo[6]. Dapprima ruotiamo la piantina in senso orario (cfr. Fig. 19) poi fissiamo due rette ortogonali (ad es. via

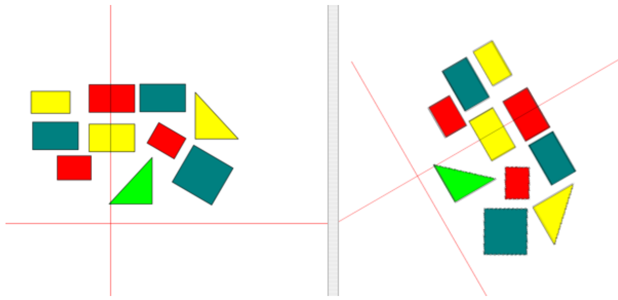

FIGURE 19

Repubblica e via Garibaldi) e facciamo un cambiamento di scala dilatando di un fattore 2 in direzione di via Repubblica e contraiamo di un fattore 1/2 in direzione di via Garibaldi (cfr. Fig. 20). Infine riflettiamo rispetto ad una retta verticale

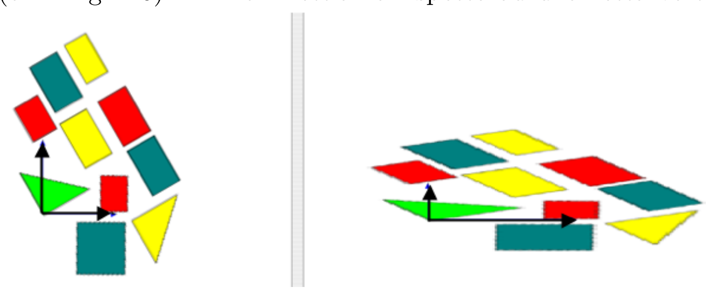

FIGURE 20

(vale a dire ribaltiamo la piantina sul tavolo, tenendo fissa la retta verticale, cfr. Fig. 21.

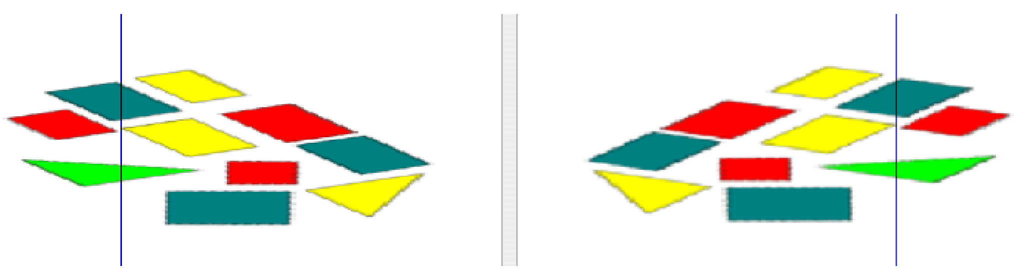

FIGURE 21

Descriviamo alcune proprietà delle trasformazioni affini. In primo luogo, poichè le trasformazioni affini sono biunivoche, se due figure $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ (ad esempio due curve) hanno un numero finito di punti in comune, esse vengono mandate in due figure $\mathcal{F}'$

[6]La cosa evidentemente non è possibile perché il piano è illimitato e la piantina no, ma ci intendiamo.

e $\mathcal{G}'$ che hanno lo stesso numero di punti in comune. In particolare nel piano rette incidenti (un solo punto in comune) vanno in rette incidenti e rette parallele (nessun punto in comune) in rette parallele. Due rette incidenti nello spazio individuano un piano che contiene tutte le rette incidenti ad entrambe, ne segue che piani vanno in piani. In particolare piani incidenti (hanno in comune una retta) vanno in piani incidenti e piani paralleli vanno in piani paralleli.

Esercizio 3.7. *Provare che una trasformazione affine dello spazio manda coppie di rette parallele in coppie di rette parallele e coppie di rette sghembe in coppie di rette sghembe.*

Soluzione. Sia F una trasformazione affine dello spazio e siano r ed r' due rette parallele. (Già sappiamo che, nel caso di trasformazioni affini del piano, rette parallele vanno in rette parallele; ma qui F è una trasformazione dello spazio). Allora, per la Definizione 3.1, $F(r)$ e $F(r')$ sono rette. Le rette r ed r', essendo parallele, sono complanari; sappiamo che F manda piani in piani, dunque $F(r)$ e $F(r')$ sono rette complanari. Se fossero incidenti, allora F^{-1} le manderebbe in due rette incidenti, cioè r ed r' sarebbero incidenti, assurdo. Dunque $F(r)$ e $F(r')$ sono parallele.

Siano r ed r' sghembe (i.e. nè parallele, nè incidenti). Allora, per Definizione 3.1, $F(r)$ e $F(r')$ sono rette; esse non possono essere nè parallele, nè incidenti, altrimenti (usando F^{-1}) anche r ed r' sarebbero parallele o incidenti. Dunque $F(r)$ e $F(r')$ sono sghembe. $\square$

Un triangolo individua tre rette, due a due incidenti, che determinano i suoi lati; da questo segue (sarebbe necessario una spiegazione più approfondita) che un triangolo va in un triangolo. Si noti tuttavia, come mostra la Fig. 20, che in generale le trasformazioni affini non conservano l'ampiezza degli angoli e quindi possono trasformare un triangolo isoscele o equilatero in un triangolo scaleno. Anzi si può dimostrare che dati due triangoli qualsiasi esiste una trasformazione affine del piano che manda il primo nel secondo triangolo.

3.3. **Comportamento di una trasformazione affine su piani paralelli.** Dal punto di vista analitico le trasformazioni affini sono le più semplici. Fissati sistemi di coordinate cartesiane ortogonali sui piani α e β, una trasformazione affine $\alpha \xrightarrow{F} \beta$ è data da equazioni della forma

$$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases} \tag{3.2}$$

dove la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è invertibile. Questo significa che il punto $P \in \alpha$ di coordinate (x, y) viene mandato nel punto $F(P) = (x', y')$ dove x' e y' sono date dall'equazione (3.2). Possiamo anche scrivere

$$F(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Analogamente una trasformazione affine dello spazio è data da equazioni della forma

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + p_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + p_2 \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + p_3 \end{cases}$$

dove la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ è invertibile. Possiamo anche scrivere

$$F(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Quello che interessa osservare è che le equazioni di una trasformazione affine sono sempre di primo grado.

Una conseguenza dell'equazione (3.3) è il seguente:

Teorema 3.8. *Una trasformazione affine dello spazio agisce nello stesso modo su piani paralleli.*

Precisamente cfr. Fig. 22 *dati una trasformazione affine F dello spazio e due piani paralleli α, α', siano $\beta = F(\alpha)$ e $\beta' = F(\alpha')$ i piani ad essi corrispondenti. Presa una figura $\mathcal{F}$ su α consideriamo una traslazione $T_{\vec{v}}$ che manda α in α'; allora $\mathcal{F}' = T_{\vec{v}}(\mathcal{F})$ è una figura su α' uguale ad $\mathcal{F}$. Consideriamo le corrispondenti figure $F(\mathcal{F})$ che sta su β e $F(\mathcal{F}')$ che sta su β'.*

Affermo che $F(\mathcal{F})$ e $F(\mathcal{F}')$ sono uguali.

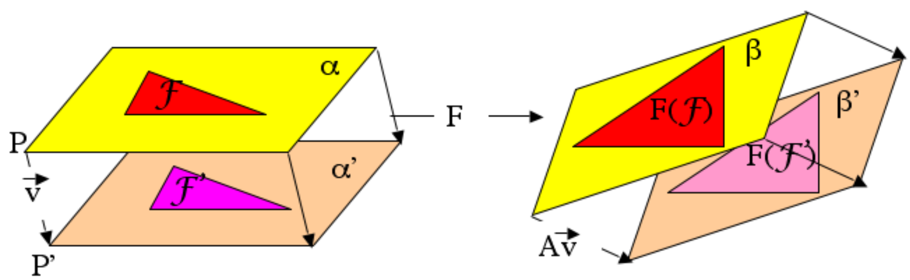

Figure 22

<u>Dimostrazione</u>. . Prendiamo $P' \in \alpha'$, allora $P := P' - \vec{v} \in \alpha$. Confrontiamo $F(P')$ che sta su β' con $F(P)$ che sta su β.

Fissiamo un sistema di coordinate nello spazio in modo che possiamo scrivere la formula (3.3). Sia $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, allora se $P' = (x, y, z)$ abbiamo $P = P' - \vec{v} = (x - v_1, y - v_2, z - v_3)$ e quindi

$$F(P) = F(x - v_1, y - v_2, z - v_3) = A \begin{pmatrix} x - v_1 \\ y - v_2 \\ z - v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} =$$

$$= A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = F(x, y, z) - A\vec{v} = F(P') - A\vec{v}.$$

Ne segue

$$F(P') = F(P) + A\vec{v} = T_{A\vec{v}}(F(P)).$$

Questo significa che $F(\mathcal{F}')$ e $F(\mathcal{F})$ sono uguali perché differiscono di una traslazione. $\square$

3.4. **Trasformazioni affini e coniche.**

Teorema 3.9. *Le trasformazioni affini mandano coniche in coniche.*

Per dimostrarlo conviene prima considerare questo risultato parziale:

Lemma 3.10. *Data una trasformazione affine* $\alpha \xrightarrow{F} \beta$*, se* $\mathcal{C}$ *è una conica del piano* α*, allora* $F(\mathcal{C})$ *è una conica del piano* β*.*

Dimostrazione. Osserviamo che:
• Si potrebbe dimostrare con qualche calcolo che se $\mathcal{D}$ è una curva piana che ha equazione cartesiana di grado[7] n, allora essa incontra ogni retta in al più n punti distinti ed esiste almeno una retta che incontra $\mathcal{D}$ in esattamente n punti.
• Le coniche sono le curve di secondo grado.
• Se $\mathcal{C}$ incontra una retta r in k punti, allora, poiché F è biunivoca, $F(\mathcal{C})$ incontra $F(r)$ esattamente in k punti.

Ora la dimostrazione è semplice. Sia r' una retta di β, allora esiste una retta r di α tale che $r' = F(r)$. Poiché $\mathcal{C}$ è una conica essa incontra r in al più 2 punti e quindi $F(\mathcal{C})$ incontra r' in al più 2 punti. Inoltre esiste una retta r_0 di α che incontra $\mathcal{C}$ in esattamente 2 punti e quindi $F(\mathcal{C})$ incontra $F(r_0)$ in esattamente 2 punti, dunque $F(\mathcal{C})$ ha un'equazione di secondo grado e perciò è una conica. $\square$

Dimostrazione del Teorema 3.9. Se F è una trasformazione affine tra due piani, il Lemma 3.10 è sufficiente. Se F è una trasformazione affine dello spazio ragioniamo così: sia $\mathcal{C}$ una conica; essa giace su un certo piano α e sia $\beta = F(\alpha)$ il piano corrispondente. Consideriamo la restrizione $F_{|\alpha} : \alpha \to \beta$; essa è biunivoca (è un fatto generale quando si considera la restrizione di un'applicazione biunivoca) e manda rette di α in rette di β. Dunque è una trasformazione affine e possiamo applicare il Lemma 3.10 per concludere che $F(\mathcal{C})$ è una conica. $\square$

Corollario 3.11. *Le trasformazioni affini mandano coniche non degeneri in coniche non degeneri.*

Dimostrazione. Sia F una trasformazione affine e $\mathcal{C}$ una conica non degenere. Per il Teorema 3.9, $F(\mathcal{C})$ è una conica.

Ragioniamo per assurdo, se $F(\mathcal{C})$ fosse degenere, sarebbe formata da rette, quindi, la trasformazione inversa F^{-1}, che ovviamente è ancora affine e dunque manda rette in rette, manderebbe $F(\mathcal{C})$ in un'unione di rette, assurdo perché $F^{-1}F(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. $\square$

In realtà vale un risultato più preciso:

Teorema 3.12. *Una trasformazione affine* F *del piano manda ellissi, parabole ed iperboli in coniche dello stesso tipo.*

Inoltre se $\mathcal{F}$ *è il fascio di rette parallele all'asse di una parabola* $\mathcal{P}$*, allora* $F(\mathcal{F})$ *è il fascio di rette parallele all'asse della parabola* $F(\mathcal{P})$*.*

Infine se r *è un asintoto dell'iperbole* $\mathcal{I}$ *allora* $F(r)$ *è un asintoto dell'iperbole* $F(\mathcal{I})$*.*

---

[7]Vale a dire l'equazione è un polinomio in x ed y in cui il monomio di grado massimo ha grado n. Ad es. $xy^2 + y + x = 1$ ha grado 3.

<u>Dimostrazione</u>. Sia $\mathcal{P}$ una parabola. Consideriamo il fascio $\mathcal{F}$ delle rette parallele all'asse a della parabola. La trasformazione affine F manda il fascio $\mathcal{F}$ in un fascio $F(\mathcal{F})$ di rette parallele. Ora ciascuna retta $r \in \mathcal{F}$ incontra la parabola $\mathcal{P}$ in un sol punto. Allora ciascuna retta $r' \in F(\mathcal{F})$ incontra la conica $F(\mathcal{P})$ in un sol punto. Allora per la Proposizione 4.2, poiché $F(\mathcal{P})$ non è degenere, essa è una parabola.

Sia $\mathcal{I}$ un'iperbole. Il fascio $\mathcal{G}$ delle rette parallele all'asintoto r_0 di $\mathcal{I}$ è formato da rette che incontrano $\mathcal{I}$ in un sol punto, salvo r_0 che non incontra $\mathcal{I}$. Ragionando come sopra (ripetere effettivamente il ragionamento!) ma usando la Proposizione 4.3 si conclude che $F(\mathcal{I})$ deve essere un'iperbole e il fascio $F(\mathcal{G})$ il fascio delle rette parallele ad un suo asintoto r_0'. Tra queste rette la sola $F(r_0)$ non incontra l'iperbole $F(\mathcal{I})$ e dunque è l'asintoto r_0'.

Resta solo da vedere che se $\mathcal{E}$ è un'ellisse, allora $F(\mathcal{E})$ è anch'essa un'ellisse. Ma $F(\mathcal{E})$ è una conica non degenere e se fosse una parabola o un'iperbole, per quanto abbiamo appena provato, anche $F^{-1}(F(\mathcal{E})) = \mathcal{E}$ lo sarebbe, assurdo. □

Esercizio 3.13. *Sia F una trasformazione affine del piano e sia $\mathcal{C}$ una conica non degenere. Che cosa possiamo dire di $F(\mathcal{C})$?*

<u>Soluzione</u>. Sappiamo che $F(\mathcal{C})$ è una conica non degenere. Più precisamente essa è una parabola, un'iperbole oppure un'ellisse a seconda che $\mathcal{C}$ sia una parabola, un'iperbole oppure un'ellisse. Inotre se $\mathcal{C}$ è un'iperbole, F manda i suoi asintoti negli asintoti di $F(\mathcal{C})$. Se $\mathcal{C}$ è una parabola, F manda il fascio delle rette parallele al suo asse nel fascio delle rette parallele all'asse di $F(\mathcal{C})$. □

Esercizio 3.14. *Sia F una trasformazione affine del piano e $\mathcal{P}$ una parabola. Allora, come sappiamo, $F(\mathcal{P})$ è una parabola. Se a è l'asse di $\mathcal{P}$, allora necessariamente $F(a)$ è l'asse di $F(\mathcal{P})$?*

<u>Soluzione</u>. Come sappiamo il fascio $\mathcal{F}$ delle rette parallele all'asse a (in celeste in Fig. 23a) viene mandato nel fascio delle rette parallele all'asse di $F(\mathcal{P})$. In

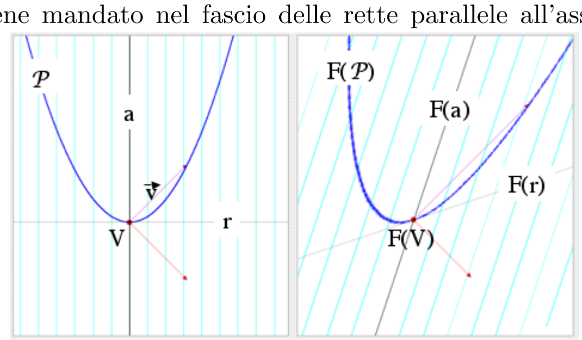

FIGURE 23. a - b

particolare l'asse a viene mandato in una retta $F(a)$ parallela all'asse di $F(\mathcal{P})$ (cfr. Fig. 23b).

Ora sappiamo che la retta r tangente a $\mathcal{P}$ nel vertice V è perpendicolare all'asse a. Allora le rette $F(r)$ e $F(a)$ si tagliano in $F(V)$ e $F(r)$ inontra $F(\mathcal{P})$ solo nel punto $F(V)$, dunque è tangente a $F(\mathcal{P})$ in $F(V)$ (infatti incontrando la parabola in un sol punto e, non essendo paralella all'asse, deve essere tangente). Ma l'angolo tra $F(r)$ e $F(a)$ non è necessariamente retto e quindi $F(V)$ non è necessariamente il vertice e $F(a)$ non è necessariamente l'asse.

La trasformazione affine illustrata in figura è il cambiamento di scala di un fattore 2 nella direzione del vettore $\vec{v}$. □

3.5. **Trasformazioni affini e quadriche.** Concludiamo con un ulteriore risultato riguardante le superfici.

Definizione 3.15. *Una superficie che ha un'equazione di secondo grado si chiama* quadrica*.*

Ad esempio il paraboloide di rotazione (cfr. Esercizio 2.19) è una quadrica.

Con argomenti analoghi a quelli del Lemma 3.10 si dimostra che

Proposizione 3.16. *Una trasformazione affine dello spazio manda quadriche in quadriche.*

Ne segue:

Teorema 3.17. *Una curva, sezione piana di una quadrica, è una conica*

<u>Dimostrazione</u>. Sia data una quadrica $\mathcal{Q}$ ed una curva $\mathcal{C}$ ottenuta sezionando $\mathcal{Q}$ con un piano α.

La quadrica $\mathcal{Q}$ ha equazione di secondo grado rispetto a qualunque sistema di riferimento cartesiano ortogonale, perché cambiare sistema di riferimento corrisponde ad un'isometria (composta come sappiamo di moti rigidi e riflessioni). Dunque, per la Proposizione 3.16 l'equazione di $\mathcal{Q}$ nel nuovo sistema sarà di secondo grado.

Prendiamo un sistema di riferimento che abbia gli assi x ed y sul piano α; dunque in questo sistema α ha equazione $z = 0$. Sostituto $z = 0$ nell'equazione di $\mathcal{Q}$ (che è un'equazione di secondo grado in x, y, z, resta un'equazione di secondo grado in x e y); vale a dire la curva $\mathcal{C}$ è una conica. □

4. Appendice

Discutiamo i possibili comportamenti di una conica e di un fascio di rette. Ricordo che una retta ed una conica possono intersecarsi in due, uno o nessun punto; in generale se le intersezioni sono due la retta si dice secante, se l'intersezione è una sola la retta si dice tangente ed infine la si chiama esterna se non ha intersezione con la conica. Ma ci sono delle eccezioni: le rette parallele all'asse di una parabola e l'asse stesso tagliano la parabola in un punto ma non sono tangenti, lo stesso vale per le rette parallele agli asintoti di un'iperbole; infatti queste rette hanno in comune con la conica anche un punto all'infinito. Gli asintoti stessi non toccano l'iperbole, ma sono tangenti all'infinito. Ancora, se la conica è degenere (una retta doppia, due rette parallele o incidenti), ci sono rette contenute nella conica. Insomma per evitare equivoci e poiché siamo interessati solo a valutare quanti punti stanno nell'intersezione, in questa discussione parleremo sempre di punti di intersezione.

Osservazione 4.1. *Data una conica non degenere $\mathcal{C}$ e un fascio $\mathcal{R}$ di rette parallele sussistono le seguenti possibilità:*

(1) *La conica è un'ellisse, allora*

(i) *ci sono due rette del fascio $\mathcal{R}$ che intersecano la conica in un punto (tangenti), le rette di $\mathcal{R}$ comprese tra queste due la intersecano in due punti (secanti), quelle esterne a queste due non toccano la conica (esterne)* (vedi Fig. 24) .

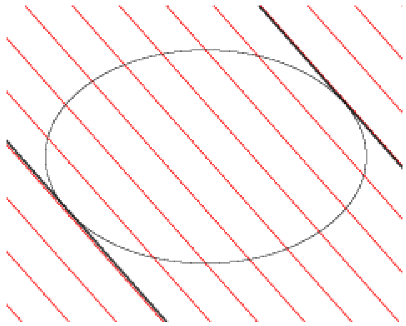

Figure 24. Apri il file per cambiare fascio di rette.

(2) *La conica è una parabola, allora ci sono due casi:*

(ii) *Se $\mathcal{R}$ è il fascio di rette parallele all'asse, allora tutte le rette di $\mathcal{R}$ tagliano la conica in un solo punto (ma non sono tangenti)* (vedi Fig. 25a).

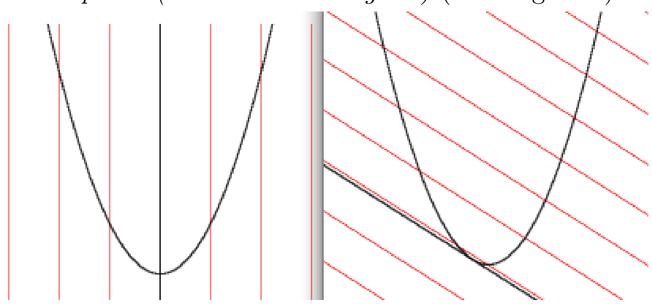

Figure 25. a - b Apri il file per cambiare il fascio di rette

(iii) *Altrimenti*[8] *accade che esiste un'unica retta di $\mathcal{R}$ che interseca la conica in un punto (tangente) e le restanti rette di $\mathcal{R}$ intersecano la conica in due (secanti) o in nessun punto (esterne) a seconda che siano da una o dall'altra banda rispetto alla retta tangente* vedi Fig. 25b.

(3) *Se la conica è un'iperbole abbiamo tre casi:*

(iv) *Se $\mathcal{R}$ è il fascio parallelo ad uno degli asintoti, allora tutte le rette di $\mathcal{R}$ tagliano la conica in un solo punto (ma non sono tangenti), tranne l'asintoto che non tocca la conica* vedi Fig. 26a

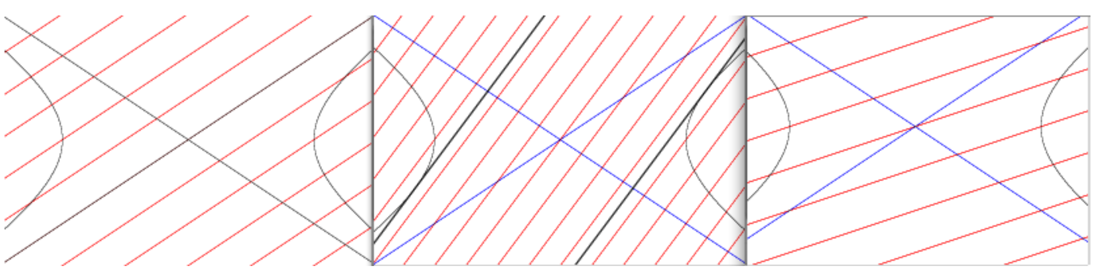

Figure 26. a - b - c Apri il file per cambiare il fascio di rette

(v) *Se le rette del fascio $\mathcal{R}$ sono* più inclinate *degli asintoti, allora due di esse intersecano la conica in un solo punto (tangenti), le altre rette di $\mathcal{R}$ intersecano la*

[8]Cioè se $\mathcal{R}$ non è il fascio di rette parallele all'asse

conica in due o in nessun punto a seconda che siano esterne o comprese tra queste due rette[9] (vedi Fig. 26b).

(vi) *Se le rette del fascio $\mathcal{R}$ sono* meno inclinate *degli asintoti, allora tutte rette di $\mathcal{R}$ tagliano la conica in due punti* (vedi Fig. 26c).

(4) *Se la conica è una retta doppia:*

(vii) *Se $\mathcal{R}$ è il fascio di rette parallele alla retta doppia, allora tutte le rette di $\mathcal{R}$ sono esterne alla conica, tranne una che è contenuta nella conica.*

(ii) *Altrimenti tutte le rette del fascio toccano la conica in un sol punto, come nel caso (ii).*

(5) *Se la conica è costituita da due rette parallele:*

(viii) *Se $\mathcal{R}$ è il fascio delle rette parallele a queste due, allora tutte le rette di $\mathcal{R}$ sono esterne alla conica tranne le due che sono contenute nella conica.*

(vi) *Altrimenti tutte le rette del fascio intersecano in due punti la conica come nel caso (vi) dell'iperbole.*

(6) *Se la conica è costituita da due rette incidenti:*

(ix) *Se $\mathcal{R}$ è il fascio di rette parallele ad una delle due rette che compongono la conica, allora tutte le rette di $\mathcal{R}$ tagliano la conica in un solo punto, tranne una che è contenuta nella conica.*

(x) *Altrimenti tutte le rette di $\mathcal{R}$ tagliano la conica in due punti, tranne una che la taglia in un solo punto (il punto di incidenza delle due rette che compongono la conica).*

Useremo la discussione precedente per dire che:

Proposizione 4.2. *Se $\mathcal{C}$ è una conica ed esiste un fascio di rette $\mathcal{R}$ tale che tutte le rette tagliano la conica in un punto, allora $\mathcal{C}$ è una parabola o una retta (doppia).*

Dimostrazione. Siamo nel caso (ii) dell'Osservazione 4.1. □

Proposizione 4.3. *Se $\mathcal{C}$ è una conica ed esiste un fascio di rette $\mathcal{R}$ tale che tutte le rette tagliano la conica in un punto, tranne una che non la tocca, allora $\mathcal{C}$ è un'iperbole.*

Dimostrazione. Siamo nel caso (iv) dell'Osservazione 4.1. □

[9] Si osservi che questo caso è diverso dal caso (i).