SPIRALI

1. Introduzione[1]

1.1. **Definizione di spirale.** Una spirale è una curva liscia (torneremo più tardi su questa nozione di *liscia*) descritta da un punto che ruota in senso orario (o antiorario) attorno ad un punto fisso (detto *centro della spirale*) allontanandosi da esso. In Fig. 1 vediamo due spirali, la prima antioraria, la seconda oraria; quella di

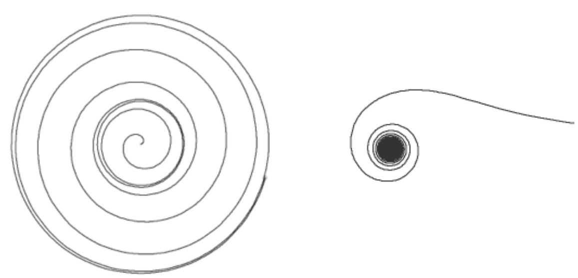

Figure 1. a - b

6aa

destra è detta *lituus* come il bastone degli arcivescovi. Aprendo i filmati si vedono le due spirali descritte come traiettorie di un punto.

È utile alla comprensione concepire una spirale in modo *dinamico*. Si può pensare ad una semiretta la cui origine è fissata e che ruota intorno ad essa, mentre un punto, vincolato a stare sulla semiretta, si allontana dall'origine (Fig. 2). Si os-

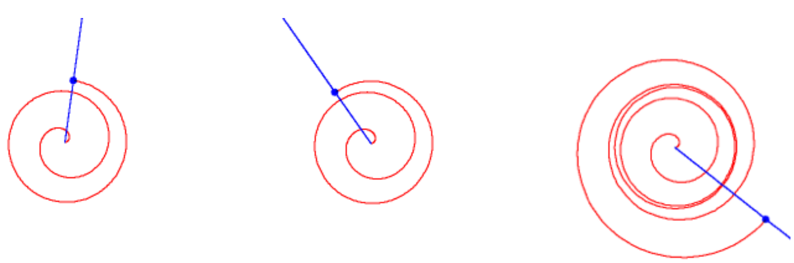

Figure 2

6ab

servi che, proiettando un filmato di questo moto (apri il file di Fig. 2), possiamo mutare la velocità con cui facciamo scorrere i fotogrammi, cioè possiamo mutare la velocità di rotazione della semiretta, senza per questo alterare la curva che di fatto è impressa nell'ultimo fotogramma. Questo ci consente di assumere che la velocità della semiretta sia costante, ad es. 1 giro al minuto.

[1] Nota. Il testo è realizzato in modo che si possa omettere la lettura delle parti specialistiche in caratteri più piccoli. Se sotto una figura compare *Figure* in una box, vuol dire che cliccandoci sopra potete aprire un filmato.

Mettiamoci subito d'accordo su un punto: conveniamo di misurare gli angoli a partire dal semiasse positivo delle ascisse, ovvero la semiretta uscente dal centro, orizzontale e diretta verso destra. Indicheremo con $r(\theta)$ la distanza dall'origine del punto $P(\theta)$ della spirale, quando la semiretta ha compiuto un angolo θ rispetto dalla semiretta fissata; naturalmente θ può essere anche maggiore di un angolo giro. In Fig. 3, scelta la semiretta di riferimento, sono rappresentati i punti che

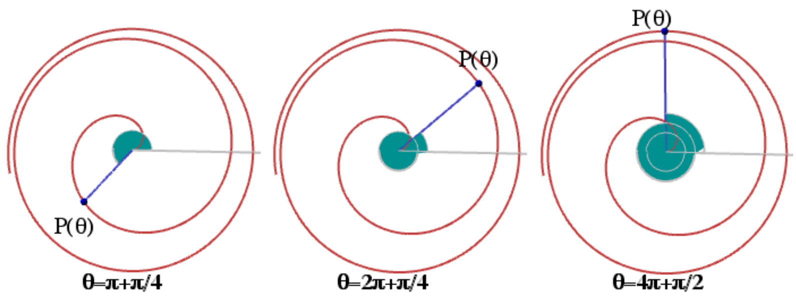

FIGURE 3

corrispondono agli angoli $\theta = \pi + \frac{\pi}{4}$, $\theta = 2\pi + \frac{\pi}{4}$, $\theta = 4\pi + \frac{\pi}{2}$ (misurati in radianti).

In particolare se la velocità della semiretta, come dicevamo sopra, è di 1 giro al minuto, possiamo identificare l'angolo θ on il tempo t. Vale dire $\theta = 7$ giri equivale a $t = 7$ minuti.

Fissato un sistema di coordinate cartesiane con origine nel centro O della spirale e scelta come semiretta di riferimento il semiasse positivo delle ascisse, le equazioni della spirale saranno (vedi Fig. 4) :

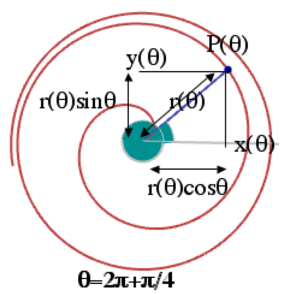

FIGURE 4

$$P(\theta) = \big(x(\theta), y(\theta)\big) \quad \text{dove} \quad \begin{cases} x(\theta) = r(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = r(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

La funzione $r(\theta)$, che in buona sostanza definisce la spirale, deve essere una funzione sempre positiva e crescente se la spirale (come in generale supporremo) è antioraria, decrescente se oraria.

Si noti infine che, interpretando dinamicamente la spirale, $r(\theta)$ è l'ascissa del punto $P(\theta)$ sulla semiretta.

1.2. **Rotazione di una spirale.** Data una spirale S possiamo ruotarla attorno al centro di un certo angolo, ottenendo così un'altra spirale S'. È notevole il fatto che le due spirali S e S' non abbiano punti in comune, tranne al più il centro. In Fig. 5 si vedono le due spirali ed è evidenziato l'angolo di rotazione.

Il motivo per cui le spirali S ed S' non hanno punti in comune, tranne al più il centro, è semplice. Osserviamo che se un punto si muove lungo una spirale la sua distanza dal centro

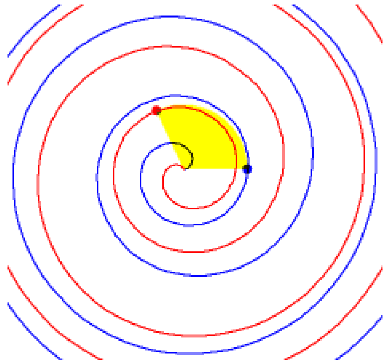

Figure 5 6ada

aumenta, dunque *ogni spirale contiene al più un punto che ha una certa distanza prefissata dal centro*. Supponiamo, per assurdo, che le due spirali abbiamo un punto P (diverso dal centro) in comune e sia $d > 0$ la sua distanza dal centro. Ruotando la spirale S il punto P deve andare a finire in un punto P' di S' che ha la stessa distanza d dal centro; ovviamente $P \neq P'$. Ma allora P e P' sono due punti di S' che hanno la stessa distanza dal centro, contro l'osservazione precedente.

2. Spirali d'Archimede

2.1. **Definizione.** La spirale di Archimede (Fig. 6) è la più semplice delle spirali,

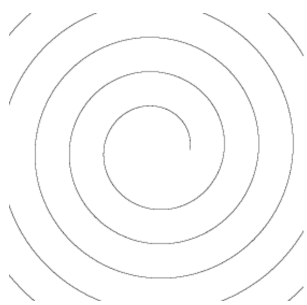

Figure 6 6ae

essa corrisponde al caso in cui la velocità con cui il punto si muove sulla semiretta è costante (assunto come detto sopra che la semiretta si muova a velocità costante). Ciò significa che l'incremento della distanza del punto dall'origine, in un dato intervallo di tempo, è proporzionale al lasso di tempo trascorso, cioè all'angolo percorso dalla semiretta. Dunque una spirale archimedea è caratterizzata dal fatto che *il rapporto tra l'incremento, in un certo intervallo di tempo, della distanza dall'origine e l'angolo al contempo percorso è costante.*

Coerentemente con quanto sopra osservato, se $r(\theta)$ è l'ascissa del punto $P(\theta)$ sulla retta, allora $dr/d\theta$ è la sua velocità sulla retta. Dunque la spirale è di Archimede se e solo se $dr/d\theta = C$ con $C > 0$. Vale a dire se

$$r(\theta) = C\theta + r(0).$$

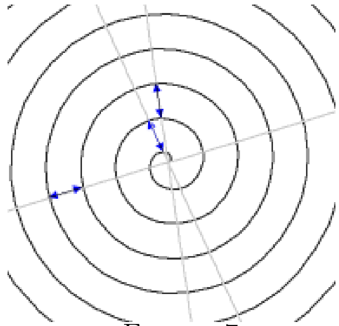

FIGURE 7 6af

2.2. **Equidistanza delle spire.** Ne segue che *in una spirale archimedea le spire sono equidistanti tra loro*, vale a dire tutte le rette per il centro vengono tagliate dalle spire in segmenti di uguale (per tutte le rette) lunghezza (in Fig. 7 le doppie frecce hanno tutte la medesima lunghezza). Questo perché, mentre la semiretta compie un angolo giro, il punto si allontana di una quantità[2] costante dall'origine.

L'equidistanza delle spire è una proprietà più semplice di quella enunciata nella definizione di spirale di Archimede. Tuttavia non l'abbiamo usata nella definizione perché purtroppo non è ad essa equivalente. Per l'equidistanza delle spire si richiede che il rapporto tra incremento della distanza dal centro e angolo compiuto sia costante solo per angoli multipli interi di un angolo giro e non per angoli qualsiasi; si tratta di una proprietà meno forte e infatti esistono spirali con spire equidistanti che però non sono spirali di Archimede. Ad esempio in Fig. 8 la spirale in blu è una

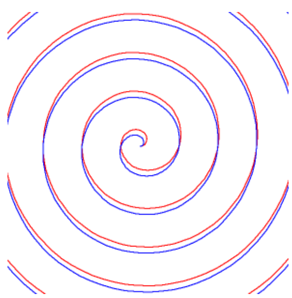

FIGURE 8 6ag

spirale d'Archimede, la spirale in rosso no, benchè le sue spire siano equidistanti.

Approfondiamo l'esempio. Sia S la spirale blu, d'Archimede, e S_1 la spirale rossa. In Fig. 9 a

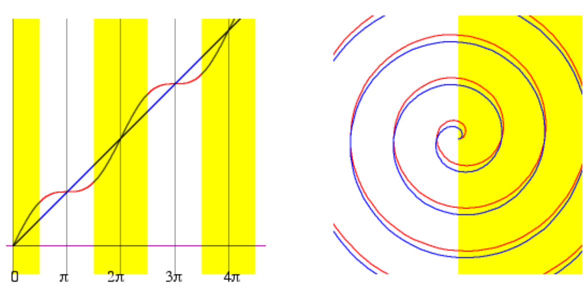

FIGURE 9. a - b 6ah

[2]Pari alla lunghezza dei segmenti di cui sopra.

sinistra confrontiamo i grafici della funzione $r(\theta) = \theta$ (in blu) e della funzione $r_1(\theta) = \theta + \sin\theta$ (in rosso). Nella figura di destra vediamo la spirale archimedea S (blu) e S_1 (rosso). Le due spirali si incontrano in corrispondenza delle intersezioni dei grafici e nella zona gialla le spire rosse si allargano maggiormente di quelle blu, esattamente come il grafico rosso ha nella regione gialla una pendenza maggiore di quello blu. Il viceversa accade nella regione bianca.

D'altra parte, poiché S è di Archimede, un arco di una sua spira che percorre un angolo θ si allarga, cioè si allontana dal centro, di una quanità proporzionale a θ. Ora ad un arco blu tagliato dalla zona gialla o ad un arco tagliato dalla zona bianca corrisponde sempre un angolo piatto, quindi i due archi si allargano di una stessa quantità. Come abbiamo appena osservato questo non avviene per la spirale S_1 (rossa) e dunque essa non è archimedea.

Tuttavia poiché

$$r_1(\theta + 2\pi) - r_1(\theta) = 2\pi + \sin(\theta + 2\pi) - \sin(\theta) = 2\pi$$

la distanza tra due spire successive è costante, esattamente come nel caso delle spirali d'Archimede.

2.3. **Cambiamento di scala.** Come si può intuire tutte le spirali di archimede si ottengono da quella rappresentata in Fig. 6 semplicemente ingrandendo o rimpicciolendo la figura di un fattore di scala a piacere.

Infatti se cambiamo fattore di scala il moto di rotazione della semiretta non cambia per nulla, mentre il punto sulla semiretta apparirà muoversi più velocemente o più lentamente a seconda che abbiamo ingrandito o rimpicciolito la figura (ma comunque sempre a velocità costante). Dunque scegliendo in modo opportuno il fattore di scala possiamo ottenere la velocità che vogliamo, vale a dire una spirale di Archimede arbitrariamente scelta.

2.4. **Il rocchetto.** Possiamo descrivere una spirale archimedea in altro modo. Immaginiamo di arrotolare un filo su un perno cilindrico fisso; tenendo l'estremo libero del filo ben teso ruotiamo attorno al perno srotolando il filo. Il tratto di filo che *guadagniamo* in un certo lasso di tempo è speso per aumentare la distanza dall'origine ed è proporzionale all'angolo percorso attorno al perno. Dunque stiamo percorrendo una spirale archimedea. Si noti che il raggio del perno determina di quale spirale archimedea si tratta.

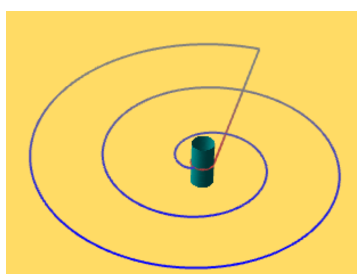

Figure 10 6aj

2.5. **La spirale d'Archimede e la serie aritmetica.** Assegnate due costanti a e b possiamo costruire la serie aritmetica

$$a, a + b, a + 2b, a + 3b, \ldots$$

Essa è legata alla spirale d'Archimede come segue.

Fissiamo due assi ortogonali e prendiamo su di essi a partire dal semiasse orizzontale di destra e muovendoci in senso antiorario i punti che distano $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

dall'origine. Congiungendoli otteniamo una spezzata spiraliforme come in Fig. 11a. Poi, tracciate le bisettrici degli assi, aggiungiamo su di esse i punti che distano

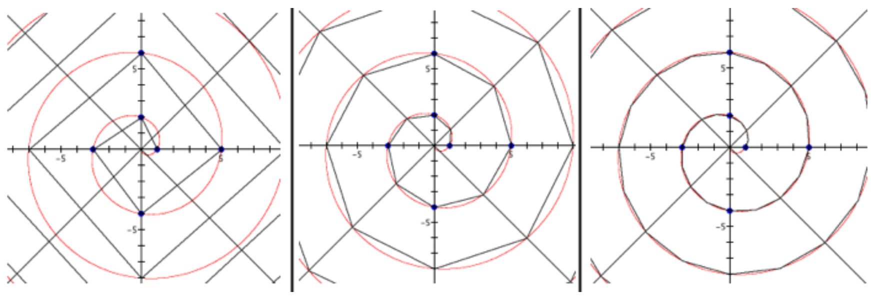

FIGURE 11. a - b - c 6al

$1+1/2, 2+1/2, 3+1/2, 4+1/2.5+1/2, \ldots$ dall'origine. Così otteniamo la spezzata in Fig. 11b. È chiaro che così procedendo si ottiene un'approssimazione buona quanto si vuole di una spirale (cfr. Fig. 11c). Questa spirale è la spirale di Archimede costruita a partire dalla serie

$$1, 2, 3, \ldots.$$

Se la dilatiamo di un fattore di scala b e la ruotiamo opportunamente i punti della spirale che si trovano sugli assi avranno distanza dall'origine

$$a, a+b, a+2b, a+3b, \ldots$$

Questo mostra come la serie aritmetica sia legata alle spirali di Archimefe.

Per sincerarsi che la spirale costruita a partire dalla serie $1, 2, 3, \ldots$ sia di Archimede, vediamo quanti giri dobbiamo fare per raggiungere il punto che dista ad es. 21 dall'origine; poiché $21 = 4 \times 5 + 1$ dobbiamo fare 5 giri ed 1/4, vale a dire $r(5+1/4) = 21 = 4 \times (5+1/4)$. Ci si rende conto facilmente che questa regola è rispettata anche dai punti aggiunti successivamente sulle bisettrici e che in generale la regola è

$$r(x) = 4x,$$

vale a dire per raggiungere il punto che dista $4x$ dall'origine devo fare x giri, dove x non è necessariamente un intero, ma è un numero qualsiasi. Dunque la regola è della forma

$$r(\theta) = C\theta$$

e pertanto si tratta di una spirale di Archimede.

2.6. **Altre spirali archimedee.** Le spirali per cui la distanza $r(\theta)$ dal centro è proporzionale ad una potenza di θ, precisamente

$$r(\theta) = C\theta^s,$$

dove s è un qualunque numero (anche negativo) sono dette da alcuni archimedee. In Fig. 12 ne vediamo alcune (la seconda è il lituus che già conosciamo). Come si vede le spirali non sono equidistati tra loro.

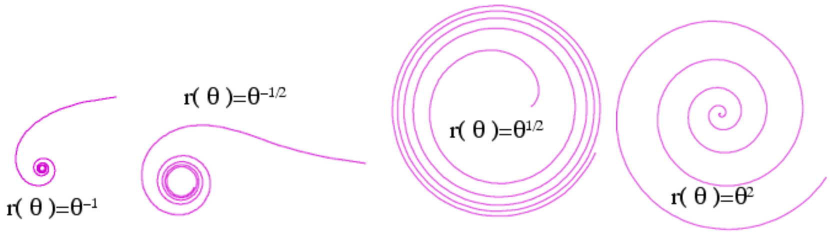

FIGURE 12 6ak

3. Spirali logaritmiche

3.1. **Definizione.** Una classe di spirali di particolare interesse è quella delle spirali logaritmiche.

> **Proprietà 1.** *Una spirale è logaritmica se le rotazioni equivalgono ai cambiamenti di scala.*

Precisamente sia data una spirale S; se la ruotiamo di un angolo[3] h attorno al suo centro O otteniamo una spirale S_h; se la dilatiamo/contraiamo di un fattore[4] $K > 0$ otteniamo una spirale S^K. La spirale S è logaritmica se *per ogni numero h esiste un $K > 0$ tale che*

e1 (3.1) $$S_h = S^K.$$

Per comprendere il significato di questa proprietà consideriamo il filmato che si vede aprendo la Fig. 13a: si vede una spirale logaritmica antioraria che ruota.

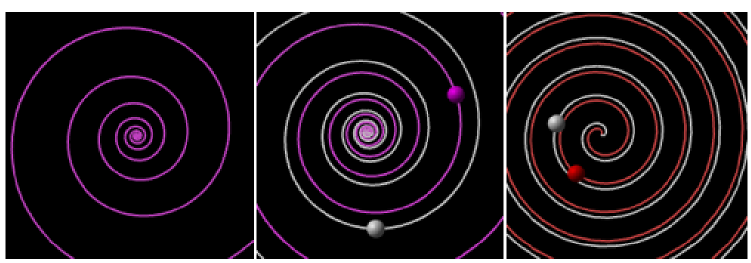

FIGURE 13. a - b - c 6am

L'*effetto vertigine* è dovuto al fatto che ruotando ora in un verso ora nell'altro la spirale appare ora contrarsi ora dilatarsi. Nel filmato di Fig. 13b si vede per riferimento un aspirale bianca, identica all'altra, che sta ferma; le due sfere sono solidali con le spirali e consentono di verificare che quando la spirale ruota in senso antiorario c'è un effetto di contrazione, viceversa se ruota in senso orario l'effetto è di dilatazione. Infine nel filmato della Fig. 13c si vede ruotare una spirale archimedea; in questo caso non si ha nessun effetto vertigine a riprova che questo è una caratteristica precipua delle spirali logaritmiche.

---

[3]Se h è positivo intendiamo una rotazione antioraria, se è negativo oraria.

[4]Naturlamente se $K > 1$ si tratta di una dilatazione, se $0 < K < 1$ si tratta di una contrazione.

3.2. **Tangenti ad una spirale logaritmica.** Le spirali logaritmiche godono di un'importante proprietà relativa alle tangenti:

> **Prorpietà 2.** *La retta tangente in un punto P di una spirale logaritmica forma con il raggio OP, che esce dal centro O e passa per P un angolo costante, cioè che non dipende dal punto P.*

Come vedremo poi questa proprietà caratterizza le spirali logaritmiche, vale a dire è equivalente alla Proprietà 1. La Fig. 14 e meglio ancora il filmato relativo,

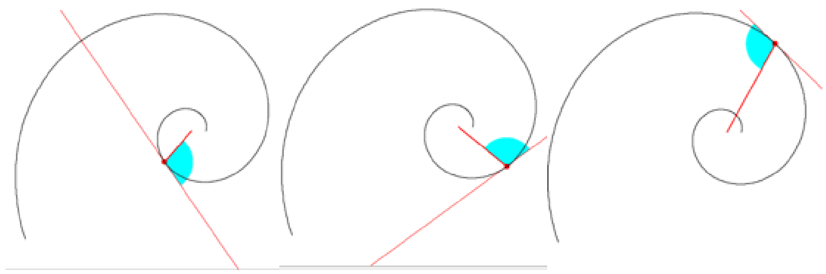

FIGURE 14 6an

illustrano con chiarezza questa proprietà.

Si può anche osservare che l'angolo evidenziato in Fig. ?? è sempre maggiore di un angolo retto e questo vale per tutte le spirali, infatti il punto $P(\theta)$ tende ad allontanarsi dall'origine, quindi la direzione tangente alla traiettoria deve essere *diretta verso l'esterno* della circonferenza concentrica alla spirale e che passa per $P(\theta)$. In Fig. 15 (vedi anche il filmato) confrontiamo per una spirale archimedea

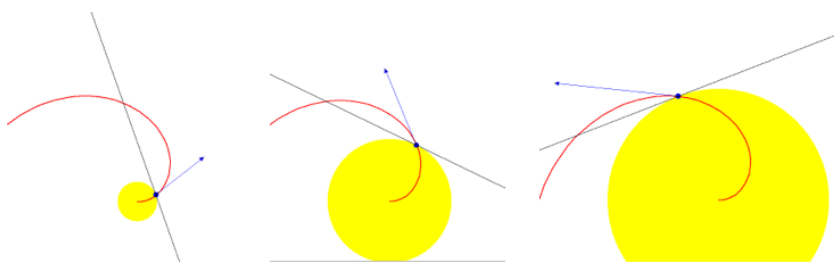

FIGURE 15 6ao

l'angolo tra la tangente a questa circonferenza e il vettore tangente alla traiettoria. Come si vede la tangente alla traiettoria è sempre diretta più esternamente della tangente alla circonferenza; l'angolo però varia perché le spirali archimedee non godono della proprietà che abbiamo appena illustrato.

3.3. **Proprietà 1 $\Rightarrow$ Propietà 2.** Cerchiamo ora di capire perché le spirali logaritmiche godono di questa proprietà delle tangenti. Fissiamo un punto P di una spirale logaritmica S e sia r la semiretta che esce dal centro O e passa per P. Preso un qualunque punto Q di S, ruotiamo la spirale in modo di spostare il punto Q in un punto P' della semiratta r; se l'angolo di rotazione è h abbiamo la spirale che abbiamo ottenuto è S_h. Sia $K := \frac{||OP'||}{||OP||}$ il rapporto tra le lunghezze dei segmenti OP' e OP; quindi la spirale S^K passa per P'.

Mostriamo che $S_h = S^K$. Poiché la spirale S è logaritmica esiste un angolo h' tale che $S_{h'} = S^K$; allora P' appartiene a S_h e a $S_{h'}$; ma due rotazioni diverse della stessa spirale non hanno punti in comune, quindi $h = h'$.

Consideriamo le tangenti t_P, t_Q alla spirale S rispettivamente nei punti P e Q. Poiché Q è stato scelto in modo arbitrario se proviamo che queste tangenti formano con i rispettivi raggi OP e OQ angoli uguali la proprietà 2 è dimostrata.

Sia $t_{P'}$ la tangente in P' alla spirale $S_h = S^K$. Poiché S_h è ottenuta ruotando S e Q va a finire in P' è chiaro che

$$\widehat{OQt_Q} = \widehat{OP't_{P'}}.$$

D'altra parte la spirale S^K è una riproduzione in scala (con fattore di scala K) della spirale S e come illustra[5] la Fig. 16) e dunque gli angoli formati dalle tangenti con i raggi sono uguali,

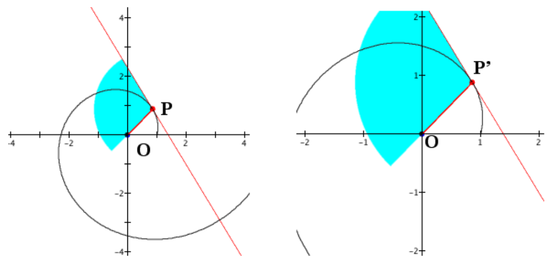

FIGURE 16. a - b 6ap

cioè

$$\widehat{OP't_{P'}} = \widehat{OPt_P}.$$

Mettendo insieme le due formule abbiamo

$$\widehat{OQt_Q} = \widehat{OPt_P}.$$

□

3.4. **Equazione delle spirali logaritmiche.**

Proprietà 3. *Se S è una spirale logaritmica la distanza $r(\theta)$ dal centro è data da un'equazione della forma*

$$r(\theta) = B^\theta$$

per una opportuna costante $B > 1$.

Come vedremo poi anche questa terza proprietà caratterizza le spirali logaritmiche, vale a dire equivale alle proprietà 1 e 2. Dall'equazione si ricava $\theta = \log_B \theta$ e questo spiega il nome di spirale logaritmica.

Possiamo tradurre la Propiretà 3 in termini geometrici:

Proprietà 3 bis. *Se a partire da un qualunque punto A di una spirale logaritmica percorriamo un arco di spirale che corrisponde ad un angolo h e giungiamo in un punto B, allora il rapporto tra $||OB||$ e $||OA||$ dipende solo da h (e non dalla scelta del punto da cui siamo partiti.)*

Per illustrare questa proprietà consideriamo la Fig. 18 sono rappresentate tre diverse scelte del punto A sulla spirale. I triangoli AOB nelle tre immagini sono simili e dunque il rapporto $\frac{||OB||}{||OA||}$ è lo stesso nelle tre immagini.

Infine se $r(\theta) = ||OA||$, allora $r(\theta + h) = ||OB||$ e dunque possiamo esprimere la Proprietà 3bis dicendo

[5] Come ci si può rendere conto dai numeri che compaiono sugli assi in Fig. 16 il fattore di ingrandimento in questo caso è 2.

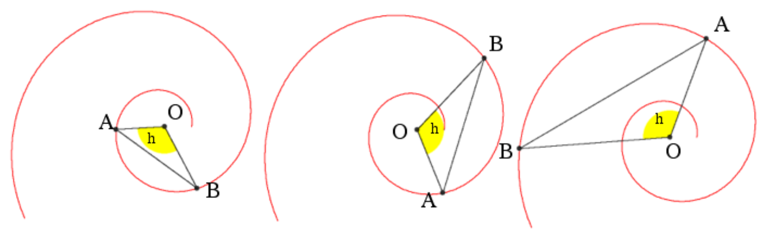

FIGURE 17

6aq

Proprietà 3ter. *Qualunque sia θ il rapporto $r(\theta+h)/r(\theta)$ dipende solo da h (e non da θ).*

3.5. **Proprietà 2 $\Rightarrow$ Proprietà 3.** Assumiamo che la spirale S goda della Proprietà 2. Il vettore tangente ad S nel punto $P(\theta)$ e il vettore $dP/d\theta$ e il prodotto scalare

$$P(\theta).\frac{dP}{d\theta} = ||P(\theta)||.||\frac{dP}{d\theta}|| \cos\alpha$$

dove α è l'angolo tra il raggio $OP(\theta)$ e la tangente in $P(\theta)$.

Calcoliamo:

$$P(\theta) = r(\theta)\Big(\cos\theta, \sin\theta\Big),$$

quindi

$$\frac{dP}{d\theta} = \Big(\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta, \dot{r}sin\theta + r\cos\theta\Big).$$

Ne segue:

$$||P(\theta)|| = r \quad \text{e} \quad ||\frac{dP}{d\theta}|| = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2};$$

infine

$$P(\theta).\frac{dP}{d\theta} = r\dot{r}.$$

Dunque

$$\cos\alpha = \frac{P(\theta).\frac{dP}{d\theta}}{||P(\theta)||.||\frac{dP}{d\theta}||} = \frac{r\dot{r}}{r\sqrt{r^2+\dot{r}^2}}.$$

Ne segue

$$\dot{r}^2 = \cos^2\alpha(r^2 + \dot{r}^2),$$

da cui

$$\dot{r} = r\frac{\sqrt{\cos^2\alpha}}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}.$$

Ma $\pi/2 < \alpha < \pi$, quindi $\sqrt{\cos^2\alpha} = -\cos\alpha$ e $\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sin\alpha$, pertanto

$$\frac{d}{d\theta}\ln r = \frac{\dot{r}}{r} = -\text{cotang } \alpha.$$

Dunque

$$\ln r(\theta) = -(\text{cotang } \alpha)\theta + C,$$

per un'opportuna costante C e quindi

$$r(\theta) = e^C e^{-(\text{cotang } \alpha)\theta} = AB^\theta,$$

dove $A := e^C$ è una costante positiva, mentre $B := e^{-(\text{cotang } \alpha)}$ è una costante > 1 perché cotang $\alpha < 0$ (essendo $\pi/2 < \alpha < \pi$.)

Per concluder basta osservare che esiste σ tale che $A = B^\sigma$ (basta prender $\sigma = \log_B A$). Quindi riesce

$$r(\theta) = B^{\theta+\sigma}$$

e ruotando di σ la spirale troviamo

$$r(\theta) = B^\theta$$

come volevamo. $\square$

3.6. **Le Proprietà 3, 3bis, 3ter sono equivalenti.** La Proprietà 3ter è una mera traduzione della Proprietà 3bis. Vediamo dunque che Proprietà 3 $\leftrightarrow$ Proprietà 3bis.

Una parte è facile: se $r(\theta) = B^\theta$, allora

$$r(\theta + h) = B^{\theta+h} = B^\theta B^h = r(\theta)B^h$$

e dunque il rapporto $r(\theta + h)/r(\theta)$ dipende solo da h.

Il viceversa richiede un po' di calcoli.

Supponiamo che il rapporto $r(\theta + h)/r(\theta)$, per ogni θ, dipenda solo da h. Dunque esiste una funzione $f(h)$ tale che

$$\frac{r(\theta + h)}{r(\theta)} = f(h).$$

In particolare $f(0) = r(\theta)/r(\theta) = 1$, quindi $\ln f(0) = 0$. Pertanto ottengo:

$$\ln r(\theta + h) - \ln r(\theta) = \ln f(h) = \ln f(h) - \ln f(0).$$

Divido per h e passo al limite:

$$\frac{d}{d\theta} \ln r(\theta) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln r(\theta + h) - \ln r(\theta)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln f(h) - \ln f(0)}{h} = f'(0).$$

Dunque la derivata di $\ln r(\theta)$ è costante, quindi:

$$\ln r(\theta) = f'(0)\theta + C,$$

per un'opportuna costante C e dunque

$$r(\theta) = e^C e^{f'(0)\theta} = AB^\theta,$$

dove $A : e^C > 0$ e $B := e^{f'(0)} > 1$, infatti la funzione $f(h)$ è non decrescente, quindi $f'(0) \geq 0$, quindi $B \geq 1$ e non può essere 1 altrimenti $r(\theta$ sarebbe costante. Infine, come nella dimostrazione precedente, una rotazione permette di eliminare il termine A. $\square$

3.7. **Il significato della Proprietà 3ter.** La Proprietà 3ter può essere scritta anche nella forma

$$r(\theta + h) = Cr(\theta)$$

dove $C = C(h)$ dipende solo da h.

Supponiamo di possedere dei conigli, equamente divisi tra maschi e femmine, che ciascuna coppia di coniglia sia sistemata in una singola gabbietta e che la prolificità dei conigli non dipenda da condizioni ambientali. Indichiamo con $r(2007)$ il numero di conigli posseduti quest'anno; tra un anno possederemo $r(2007 + 1)$ conigli.

Se possedessimo due o tre allevamenti con $r(2007)$ conigli ciascuno, tra un anno avremo $2r(2007 + 1)$ oppure $3r(2007)$ conigli. In altri termini, se moltiplico per M il numero di conigli iniziale, alla fine avrò M volte il numero di conigli finale. Questo dice che $r(\theta + h)$ è proporzionale a $r(\theta)$, vale a dire

$$r(\theta + h) = Cr(\theta),$$

dove C è la costante di proporzionalità. Poiché la prolificità dei conigli non dipende da condizioni ambientali, questa costante dipende solo dal tempo h trascorso.

Dunque siamo esattamente nelle condizioni previste dalla Proprietà 3ter. Ma questa è equivalente alla Proprietà 3bis, vale a dire

$$C = B^h.$$

Questo è intuitivamente sorprendente: la matematica ci consente di concludere che la legge di prolificazione dei conigli è di tipo esponenziale. Ad esempio se $B = 2$ vuol dire che se ho una coppia di conigli $r(2007) = 2$, nel 2008 avrò $r(2007 + 1) = r(2007) \times 2^1 = 4$ conigli e nel 2009 possederò $r(2007) \times 2^2 = 2 \times 4 = 8$ conigli. Dunque se una coppia di conigli fa due coniglietti all'anno lo sviluppo della popolazione nel corso degli anni è $A, 2A, 4A, 8A, 16A \ldots$, dove A è la consistenza iniziale della popolazione. Se ogni coppia di conigli fa 6 coniglietti, allora lo sviluppo sarà $A, 6A, 6^2A = 36A, 6^3A = 216A, 6^4A = 1296A, \ldots$

È ragionevole pensare che questo argomento si possa applicare anche a molte altre situazioni naturali; questo spiegherebbe perché alcune conchiglie hanno una forma spiraliforme. Se l'argomento si può effettivamente utilizzare si tratterebbe di una spirale logaritmica. Dunque è ragionevole ritenere che in natura si presentino numerose spirali logaritmiche.

Proprietà 3 e serie geometriche. In Fig. 18 è rappresentata una particolare

FIGURE 18 6aq

spirale logaritmica, tale che I punti sulla spirale che incontrano gli assi (ed evidenziati in figura) distano dall'origine: $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$, vale a dire $2^0; 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$. Unendo questi punti formiamo una spezzata (vedi Fig. ??a) che approssima la spirale. Se consideriamo i punti che la spirale taglia sulle bisettrici (Fig. ??b)

Si tratta di una condizione piuttosto curiosa che può essere così riformulata:

> *una spirale è logaritmica se il rapporto $r(\theta+h)/r(\theta)$ tra le distanze dal centro di due punti della spirale dipende solo dall'angolo h che bisogna percorrere per andare dall'uno all'altro lungo la spirale*[6].

Cerchiamo spiegare perchè le due proprietà enunciate sono equivalenti.

Consideriamo una spirale logaritmica antioraria S. La relazione (3.1) stabilisce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme di tutti i numeri reali h e l'insieme di tutti i numeri positivi K. Vale a dire dato h esiste un $K > 0$, che dipenderà da h e quindi conviene scrivere $K(h)$ per cui vale (3.1) e dato $K > 0$ esiste un angolo $h(K)$ tale che vale (3.1).

Osserviamo che (3.1) dice che le operazioni

$$\text{dilatare/contrarre di un fattore } \; K$$

e

di dare un'idea del perché le due proprietà si equivalgono. Sia $h > 0$, consideriamo la spirale S_{-h} ottenuta ruotando la spirale S di h in senso orario. Se $S^K = S_{-h}$ vuol dire che ruotando S^K in senso antiorario otteniamo di nuovo S. Al punto $P(\theta)$ sulla spirale S corrisponde il punto Q sulla spirale S^K caratterizzato dal fatto che il segmento OQ è K volte il segmento OP. Ruotando Q in senso antiorario di h trovo un punto di S, che non pu'o essere che $P(\theta + h)$, il quale ha la stessa distanza di Q dal centro, dunque

$$r(P(\theta + h)) = ||OQ|| = K||OP(\theta)|| = Kr(\theta).$$

Viceversa questa formula dice che dilatando/contrendo il segmento $OP(\theta)$ di un fattore K e ruotandolo di h in senso antiorario trovo un punto $P(\theta + h)$ di S.

Purtroppo un analisi più attenta mostra che questo argomento ha qualche difetto (rimediabile). Una dimostrazione completa sarebbe però eccessivamente pesante.

3.8. **Progressione geometrica delle spire.** Un'interessante conseguenza della seconda proprietà è il seguente fatto: *esiste una costante $C > 0$ tale che i punti che una qualunque semiretta uscente dall'origine*

Esiste una terza proprietà equivalente alle precedenti, vale a dire che l'angolo che la tangente alla curva forma con il raggio sia costante.

Questa condizione equivale al fatto che la distanza $d(t)$ dall'origine sia della forma

$$d(t) = ab^t.$$

[6]Abbiamo visto che una spirale è di Archimede se la **differnza** $r(\theta+h) - r(\theta)$ è proporzionale ad h. Qui invece consideriamo il rapporto e chiediamo che dipenda solo da h senza dire in che modo.

Infatti assumiamo che la velocità di rotazione della semiretta sia costante allora nell'intervallo $(0,t)$ *il punto sarà passato da una distanza* $d(0)$ *ad una distanza* $d(t)$. *Il rapporto* $d(t)/d(0)$ *è proporzionale all'angolo percorso, che a sua volta - la velocità di rotazione è costante - è proporzionale al tempo t trascorso. Dunque*

$$\ln \frac{d(t)}{d(0)} = \ln d(t) - \ln d(0)$$

(Fig. **??***).*

il rapporto tra la distanza dal centro di due spire consecutive è una costante. Questo significa che se il punto P *della spirale dista d dal centro i punti delle spire successive allineati con* P *al centro disteranno* $Cd, C^2d, \ldots$.