

CAPITOLO I - CURVE NELLO SPAZIO

La teoria delle curve nello spazio è notevolmente più complessa di quella delle curve piane. Nel caso piano abbiamo visto che la curva è sostanzialmente determinata dalla sua curvatura k . Per esporre intuitivamente questo risultato conviene pensare una curva come fosse la traiettoria descritta da un punto in moto. Allora, assegnati il punto iniziale P_0 e la direzione iniziale del moto (individuata da un versore T_0 da applicare in P_0), stabilito che il moto avviene a velocità unitaria, la conoscenza della curvatura $k(s)$ (in ogni istante s) determina completamente il moto del punto e quindi la sua traiettoria. Grosso modo la curvatura dice, in ogni istante, se il punto deve girare a sinistra ($k(s) > 0$) oppure a destra ($k(s) < 0$) e di quanto.

Se il punto è libero di muoversi nello spazio, esso possiede una maggiore libertà di movimento e le indicazioni che possiamo trarre dalla curvatura non sono più sufficienti a determinarne la traiettoria. Dunque l'indagine che ci proponiamo di fare sulle curve nello spazio presenterà qualche novità rispetto al caso piano.

1. TANGENTE AD UNA CURVA

1.1. Retta tangente. La nozione di retta tangente ad una curva nello spazio non presenta difficoltà aggiuntive rispetto al caso piano. Limitiamoci a ripetere la

Definizione 1.1. *Una retta t è la retta tangente ad una curva C dello spazio in un suo punto P , se t è la retta che approssima meglio la curva vicino al punto P .*

Più precisamente, comunque sia fissato un "formato" $L \times L \times L$ (cioè un cubo di lato L), esiste un fattore di ingrandimento N sufficientemente grande tale che ingrandendo un piccolo cubetto centrato nel punto P di un fattore N e ottenendo un'immagine di formato $L \times L \times L$, l'arco di curva e il segmento di retta compresi nell'immagine sono indistinguibili.

Nella sequenza di immagini in Fig. 1 vediamo progressivamente la curva adagiarsi sulla retta tangente. Precisamente: a sinistra una curva e la sua tangente in un punto, a destra degli ingrandimenti successivi centrati nel punto P di tangenza. Il cubo di sinistra viene riprodotto a destra ingrandito. Nell'ultima coppia di immagini, a sinistra la regione oggetto dell'ingrandimento è talmente piccola che il cubetto non è più visibile, a destra l'arco di curva e il segmento contenuti nel cubo sono indistinguibili.

Osservazione 1.2. La definizione sembra presentare due difetti: **a)** la soggettività, perché essa pare dipendere dalla capacità di risoluzione del nostro occhio o degli strumenti che stiamo usando, **b)** l'impossibilità di individuare univocamente la tangente alla curva.

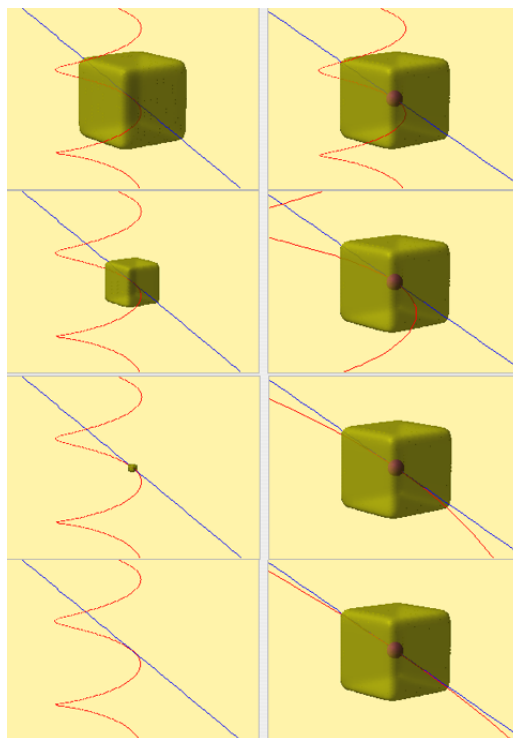


FIGURE 1

Cominciamo dalla seconda questione. Immaginiamo di tracciare nell'ultima immagine di Fig. 1 una seconda retta t' passante per P e tanto prossima alla retta t da non essere da essa distinguibile, almeno nel tratto interno al cubetto. Questo è certo possibile farlo sfruttando i limiti della nostra capacità visiva. È erroneo pensare che procedendo ad ulteriori ingrandimenti, sempre dello stesso formato $L \times L \times L$, sia possibile distinguere le due rette. Infatti immagini ingrandite di due rette incidenti sono sempre sovrapponibili.

Approfondiamo la questione: (cfr. Fig. 2) prendiamo un punto P e a circa un metro di distanza da P fissiamo due punti A e B che distano tra loro 1mm. Le rette PA e PB , in un raggio di 25cm. da P , differiscono al massimo di 0,25mm. e non siamo in grado di apprezzare questa differenza. Per distinguere le due rette

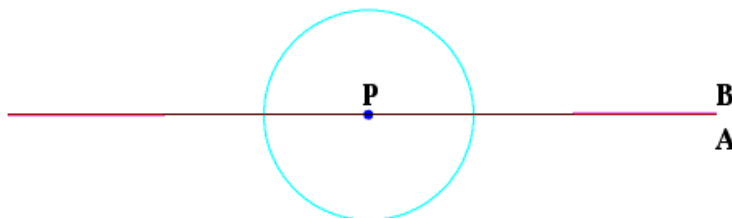


FIGURE 2

dobbiamo non fare degli ingrandimenti, ma prendere in considerazione una regione

sufficientemente grande: ad es. a 5m. di distanza di P le due rette differiscono di 5mm.

Nella Definizione 1.1 è previsto che il formato $L \times L \times L$ sia arbitrario, questo assicura, per le considerazioni appena fatte, che la retta tangente è unica. Poi se immaginiamo di raddoppiare il cubetto dell'ultima immagine di Fig. 1 vediamo che all'interno di questo nuovo cubetto siamo in grado di distinguere tra curva e retta. Questo mostra che l'arbitrarietà del formato garantisce che la capacità di risoluzione dell'occhio possa essere amplificata a piacere.

1.2. Vettore velocità e versore tangente. In perfetta analogia a quanto abbiamo visto per le curve piane introduciamo le nozioni di vettore velocità e di versore tangente. Le cose da ricordare sono:

Proposizione 1.3. *Se*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

sono le equazioni parametriche della curva \mathcal{C} (vale a dire se $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ è il punto mobile che descrive la traiettoria \mathcal{C}) allora

$$V(t) = \frac{dP}{dt}(t) = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t), \frac{dz}{dt}(t) \right)$$

è il vettore velocità di $P(t)$ all'istante t ed è anche il vettore direzione della retta tangente a \mathcal{C} nel punto $P(t)$.

E ancora

Definizione 1.4. *Sia \mathcal{C} una curva e P un suo punto; indichiamo con T il versore tangente a \mathcal{C} in P , cioè T è un vettore di lunghezza 1 che ha la stessa direzione della tangente.*

Va da sé che in ciascun punto ci sono due possibilità di scelta del versore tangente, una opposta all'altra. Se la curva è la traiettoria del punto mobile $P(t)$, allora

$$T(t) = \frac{V(t)}{|V(t)|}$$

è il versore tangente in $P(t)$. Vale a dire, descrivendo la curva come traiettoria, scegliamo un verso di percorrenza e di conseguenza il verso del versore tangente.

Infine

Osservazione 1.5. *È sempre possibile assumere che la traiettoria sia percorsa a velocità unitaria. In tal caso useremo il parametro "s" e risulta*

$$\frac{dP}{ds}(s) = V(s) = T(s)$$

e questo, come vedremo, semplifica i calcoli.

1.3. Esempi.

Esercizio 1.6. *Si consideri la curva \mathcal{C} definita da*

$$x(t) = t, \quad y(t) = t^2, \quad z(t) = t^3$$

e si calcoli in ogni punto il versore tangente $T(t)$.

Soluzione. Calcoliamo le derivate:

$$\frac{dx}{dt}(t) = 1, \quad \frac{dy}{dt}(t) = 2t, \quad \frac{dz}{dt}(t) = 3t^2.$$

Quindi

$$V(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

e

$$|V(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

quindi

$$T(t) = \frac{V(t)}{|V(t)|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}(1, 2t, 3t^2)$$

In Fig. 3 vediamo la curva \mathcal{C} (che in effetti è intersezione delle superfici $x^2 = y$ e

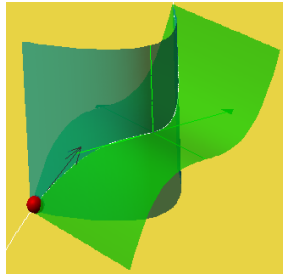


FIGURE 3

$x^3 = z$), un suo punto e il versore tangente in quel punto.

Esercizio 1.7. Un'elica è una curva che si avvolge su un cilindro circolare retto con spire tra loro equidistanti, come quella in Fig. 4. Scrivere l'equazione di questa curva.

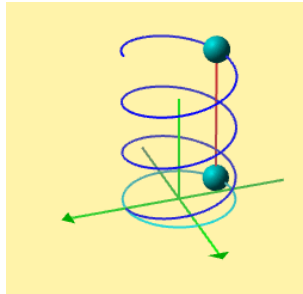


FIGURE 4

Soluzione. Possiamo prendere il sistema di coordinate in modo che il cilindro sia verticale, vale a dire diretto come l'asse delle z e tagli quindi sul piano xy una circonferenza centrata nell'origine di raggio, diciamo, R .

Ora se P è un punto dell'elica \mathcal{E} la sua proiezione ortogonale P' sul piano xy appartiene alla circonferenza; mentre il punto P si muove sull'elica il punto P' descrive la circonferenza.

Conviene ora invertire l'argomento e pensare che, mentre il punto P' descrive la circonferenza, il punto P si muove sull'elica.

Possiamo descrivere il moto di P' , ricordando le equazioni parametriche dalla circonferenza:

$$P'(t) = (R \cos t, R \sin t, 0).$$

Quindi il punto di $P(t)$ sarà della forma

$$P(t) = (R \cos t, R \sin t, h(t))$$

dove $h(t)$ è l'altezza raggiunta dal punto $P(t)$. Il fatto che le spire siano equidistanti significa che c'è un rapporto costante tra l'arco di circonferenza percorso da $P'(t)$ e l'altezza guadagnata da $P(t)$. Questo significa che la funzione $h(t)$ è della forma $h(t) = ht$ con $h = \text{costante}$. Dunque

$$(1.1) \quad P(t) = (R \cos t, R \sin t, ht)$$

è l'equazione cercata.

Osservazione 1.8. Tracciamo una retta obliqua su un foglio di carta e poi avvolgiamo il foglio in modo di formare un cilindro (nel caso della Fig. 4 il foglio è avvolto 2 volte). La retta diventa un'elica, infatti è evidente che essendo costante la “pendenza” della retta, le spire sono tra loro equidistanti.

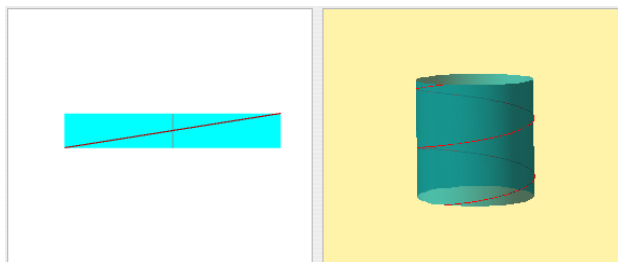


FIGURE 5

Esercizio 1.9. Supponiamo che il punto $P(t)$ si muova su un'elica \mathcal{E} . Descrivere la traiettoria descritta dal vettore tangente $T(t)$ applicato nell'origine.

Soluzione. Possiamo supporre che l'asse del cilindro su cui si avvolge l'elica sia verticale. Immaginiamo di tagliare il cilindro lungo una generatrice e di srotolarlo sul piano (procedimento inverso dell'osservazione precedente) otteniamo una retta r , quindi l'angolo che la tangente all'elica forma con il piano xy è l'angolo che la retta forma con la direzione orizzontale nel piano.

Ovviamente il vettore $T(t)$ applicato nell'origine descrive una curva sulla sfera di raggio 1 (perché $T(t)$ ha lunghezza 1). L'angolo che il vettore forma con il piano xy è costante, quindi l'orbita è un parallelo (cfr. Fig. 6).

Osservazione 1.10. Se invece di un'elica (come in Esercizio 1.9) avessimo preso per es. una molla in cui le spire non sono equidistanti, la traiettoria descritta dal vettore tangente sarebbe stata diversa. Comunque, per una qualunque curva nello spazio, il vettore tangente, applicato in un punto O descrive una curva sulla sfera di centro O e raggio 1.

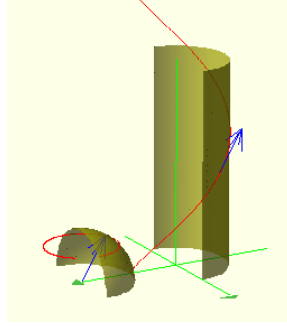


FIGURE 6

Di più:

Proposizione 1.11. *Assegnata una qualunque curva \mathcal{C}' su una sfera di raggio 1 esiste una curva \mathcal{C} nello spazio per la quale \mathcal{C}' sia la traiettoria descritta dal versore tangente di \mathcal{C} .*

Dimostrazione. (Esposta per completezza). Prendiamo come origine delle coordinate il centro della sfera e siano

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

le equazioni parametriche di \mathcal{C}' . Definiamo

$$X(s) := \int_0^s x(t)dt, \quad Y(s) := \int_0^s y(t)dt, \quad Z(s) := \int_0^s z(t)dt$$

Allora

$$\frac{dX}{ds} = x(s), \quad \frac{dY}{ds} = y(s), \quad \frac{dZ}{ds} = z(s).$$

Perciò il punto $P(s) = (X(s), Y(s), Z(s))$ descrive una certa curva \mathcal{C} e ha come vettore velocità:

$$V(s) = (x(s), y(s), z(s)).$$

Dunque $V(s) \in \mathcal{C}'$ sta sulla sfera, quindi $|V(s)| = 1$, perciò $V(s) = T(s)$. Dunque \mathcal{C} è la curva cercata. \square

Sia chiaro che solo in casi molto particolari, come ad es. quello dell'elica, è possibile ricostruire la curva \mathcal{C} originaria, senza difficili calcoli, a partire dalla traiettoria \mathcal{C}' del versore tangente.

2. NORMALE DI UNA CURVA

Per una curva nello spazio non è immediatamente chiaro come definire il versore normale in un suo punto. Siano dati una curva \mathcal{C} e un suo punto P ; sia t la retta tangente a \mathcal{C} in P . Il piano ν , passante per P , perpendicolare alla retta tangente t è il piano *normale* alla curva nel punto P . Sul piano normale ν la circonferenza di centro P e raggio 1 individua tutti i versori che sono perpendicolari al versore tangente T . Vogliamo trovare un modo per sceglierne uno e dire che quello è il *versore normale* alla curva in P . In Fig. 7 si vede il piano perpendicolare alla tangente e la circonferenza formata da tutti i versori (vettori di lunghezza 1) perpendicolari al versore tangente. Essi sono tutti candidati per essere versori normali.

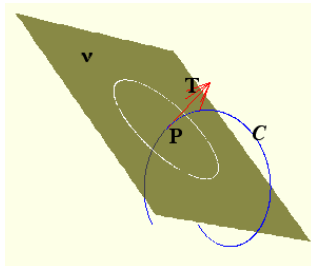


FIGURE 7

Conviene descrivere la curva \mathcal{C} come traiettoria di un punto $P(s)$ che si muove a velocità 1. Dunque

$$T(s) = \frac{dP}{ds}(s)$$

definisce il versore tangente. Applichiamo il versore tangente $T(s)$ in un punto fissato, ad esempio nell'origine O . Mentre il punto $P(s)$ si muove sulla curva il versore $T(s)$ applicato nell'origine si muove di conseguenza. In Fig. 8 a destra vedi la curva \mathcal{C} , il versore tangente $T(s)$ - in rosso - applicato in $P(s)$ e a sinistra il versore tangente - sempre in rosso - applicato nell'origine. (I due versori rossi rappresentano lo stesso versore applicato in due punti diversi, quindi sono uguali). Il secondo estremo del versore $T(s)$ applicato in O si muove sulla superficie della sfera di centro O e raggio 1. E su tale superficie disegna una curva \mathcal{C}' . Dunque $T(s)$

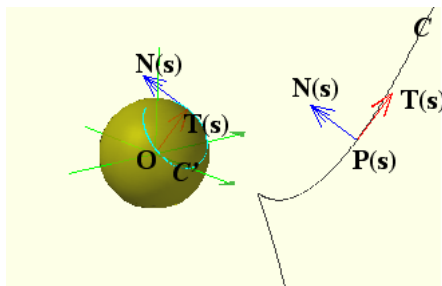


FIGURE 8

(cioè la punta del versore $T(s)$ applicato in O) si muove sulla curva \mathcal{C}' .

Ora osserviamo che

Osservazione 2.1. *Data una curva \mathcal{C}' sulla superficie di una sfera ed un suo punto Q , la tangente alla curva in Q è perpendicolare al raggio della sfera che passa per Q .*

In particolare la retta tangente a \mathcal{C}' nel punto $T(s)$ è perpendicolare al versore $T(s)$. Ma per la Proposizione 1.3 il vettore velocità $\frac{dT}{ds}(s)$ ha la direzione della retta tangente. Dunque abbiamo ottenuto che: il vettore $\frac{dT}{ds}(s)$ è tangente alla curva \mathcal{C}' in $T(s)$ ed è perpendicolare a $T(s)$.

È necessario fare attenzione: sappiamo che $P(s)$ si muove a velocità 1, ma non sappiamo che $T(s)$ fa la stessa cosa. Quindi, per la Definizione 1.4, il versore tangente a \mathcal{C}' in $T(s)$ (in Fig. 8 è rappresentato dal versore blu) è:

$$N(s) := \frac{dT}{ds} / \left| \frac{dT}{ds} \right|.$$

Perciò il versore $N(s)$ è perpendicolare al versore $T(s)$. Diamo dunque la seguente

Definizione 2.2. *Data una curva C , traiettoria del punto $P(s)$ che si muove a velocità 1, fissato un punto O (per es. l'origine), consideriamo la curva C' descritta dal versore tangente $T(s)$ applicato nell'origine. Il versore tangente a questa curva nel punto $T(s)$ lo indichiamo con $N(s)$. Risulta*

$$N(s) := \frac{dT}{ds} / \left| \frac{dT}{ds} \right|.$$

Esso è perpendicolare al versore tangente $T(s)$ e lo chiamiamo versore normale alla curva C nel punto $P(s)$.

Esercizio 2.3. *Determinare il versore normale di un'elica.*

Soluzione. Al solito immaginiamo che l'asse del cilindro lungo cui l'elica si avvolge sia verticale. Sia P un punto dell'elica. Affermo che il versore normale N applicato in P è diretto orizzontalmente verso l'asse del cilindro.

Sappiamo che il versore tangente T (cfr. Esercizio 1.9) applicato nell'origine descrive un parallelo. Dunque la tangente a questo parallelo è orizzontale, vale a dire il versore N normale all'elica in P è orizzontale.

Ora N applicato in P appartiene al piano ν normale all'elica in P . Poiché il versore T non è verticale, il piano ν non è orizzontale, quindi contiene **un'unica** direzione orizzontale: quella di N . Quello che adesso gioca un ruolo decisivo è

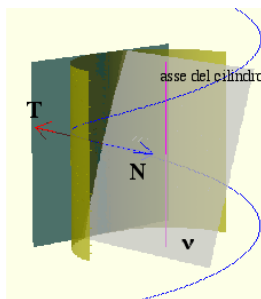


FIGURE 9

l'unicità. Infatti la retta s che congiunge orizzontalmente P all'asse del cilindro è perpendicolare al piano tangente in P al cilindro (così come il raggio è perpendicolare alla tangente alla circonferenza); in particolare s è perpendicolare a T ; quindi $s \subset \nu$; ma s è orizzontale, quindi - per l'unicità - s è la direzione di N .

Resta da osservare che il verso di N è diretto verso l'interno del cilindro, perché N ha il verso di $\frac{dT}{ds} = \frac{d^2P}{ds^2}$, cioè dell'accelerazione e dunque è diretto verso la concavità della curva.

Esercizio 2.4. *Sia C una curva che si avvolge su un cilindro come un'elica, ma le cui spire non sono a distanza costante, ma tendono a diradarsi, come in Fig. 10. Mostrare che il versore normale non è né orizzontale, né diretto verso l'asse del cilindro.*

Soluzione. Poiché le spire sono via via più rade, esse sono anche più ripide, vale a dire la pendenza del versore tangente T è crescente. Ne segue che la curva C' descritta dal versore tangente sulla sfera di raggio 1 tende a salire verso il polo nord; dunque anche il versore tangente alla curva C' , cioè il versore normale N

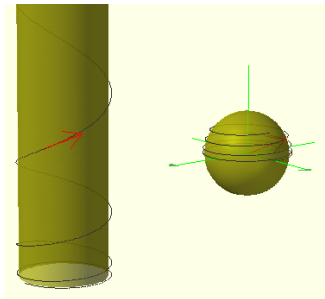


FIGURE 10

non sarà orizzontale, ma avrà una componente verso l'alto. (Si osservi che nel caso dell'elica il versore T è sì inclinato verso l'alto, ma la sua pendenza è costante. Quello che qui gioca è il fatto che la pendenza di T **cresce**).

Dunque N non è orizzontale. Vediamo che N , applicato in un punto P di \mathcal{C} , non può essere diretto verso l'asse. Consideriamo il piano α che passa per P e per l'asse e il piano ν normale a T . I due piani si tagliano lungo la retta orizzontale s che congiunge P all'asse. Ma N è sul piano ν e N non è orizzontale, dunque N non ha la direzione di s , pertanto N non sta su α , cioè N non è diretto verso l'asse.

Torniamo alla definizione di versore normale per una

Osservazione 2.5. Per poter definire il versore normale $N(s)$ è necessario supporre che $\frac{dT}{ds}(s) \neq 0$, altrimenti non possiamo dividere per $|\frac{dT}{ds}|$. Quindi nel seguito faremo, salvo avviso contrario, questa ipotesi:

$$\text{in ogni istante } s, \frac{dT}{ds}(s) \neq 0$$

3. CURVATURA

Definizione 3.1. Sia \mathcal{C} una curva nello spazio. Fissati due punti A e B di \mathcal{C} la curvatura media dell'arco AB è

$$K(A, B) := \frac{\theta}{L(A, B)}$$

dove θ è l'angolo formato dai versori tangenti T_A e T_B negli estremi dell'arco e $L(A, B)$ è la lunghezza dell'arco.

La curvatura in un punto P della curva è il limite delle curvature medie quando l'arco si riduce al solo punto P .

Rispetto alla definizione data nel caso delle curve piane c'è un'unica osservazione da fare: le rette tangenti t_A e t_B alla curva in A e B non sono necessariamente incidenti, tuttavia ricorrendo, come detto nella definizione, ai versori tangenti - che si possono applicare in uno stesso punto - l'angolo θ è ben definito.

Se la curva è descritta come traiettoria di un punto mobile $P(t)$, allora posso in particolare usare gli archetti $P(t), P(t+h)$ con h piccolo, per calcolare la curvatura in $P(t)$, cioè

$$k(P(t)) = \lim_{h \rightarrow 0} K(P(t), P(t+h))$$

e vale

Teorema 3.2. *Se la curva \mathcal{C} è la traiettoria percorsa da un punto mobile $P(s)$ che si muove a velocità 1, allora*

$$k(P(s)) = \left| \frac{dT}{ds}(s) \right|.$$

Dimostrazione. È esattamente la Proposizione 6.8 del Capitolo V del corso di Geometria. La dimostrazione è la stessa.

Ricordo che, per la Definizione 2.2

$$N(s) = \frac{dT}{ds}(s) / \left| \frac{dT}{ds}(s) \right|,$$

vale a dire

$$(3.1) \quad \frac{dT}{ds}(s) = k(s)N(s).$$

Ritroviamo così una formula già nota nel caso delle curve piane. Si osservi che qui, per definizione la curvatura è ≥ 0 .

Esercizio 3.3. *Determinare la curvatura di un'elica conoscendo il raggio R del cilindro su cui è avviluppata e la distanza $2h$ delle spire.*

Soluzione. Al solito immaginiamo che l'asse del cilindro lungo cui l'elica si avviluppa sia verticale. La curvatura è, per il Teorema 3.2 la velocità del versore tangente T (nell'ipotesi che la velocità del punto $P(s)$ sia 1).

Ora supponiamo che il raggio del cilindro sia R e $2\pi h$ sia la distanza tra le spire (vale a dire le spire tagliano su una generatrice del cilindro segmenti di lunghezza $2\pi h$). Se stendiamo il cilindro su un foglio otteniamo per una singola spira la Fig. 11 e quindi la lunghezza di una spira è

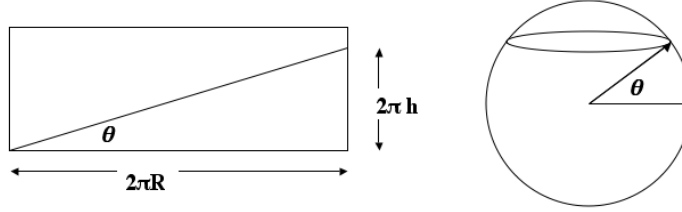


FIGURE 11

$$L_S := \sqrt{4\pi^2 R^2 + 4\pi^2 h^2} = 2\pi \sqrt{R^2 + h^2}$$

Poiché il moto avviene a velocità 1, L_S è anche il tempo impiegato dal punto $P(s)$ per percorrere una spira e quindi è il tempo impiegato dal versore tangente a percorrere il parallelo. La lunghezza del parallelo (la sfera ha raggio 1) è

$$L_P = 2\pi \cos \theta$$

e, sempre dalla Fig. 11, risulta che

$$\cos \theta = \frac{2\pi R}{\sqrt{4\pi^2 R^2 + 4\pi^2 h^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}}.$$

Dunque il versore tangente nel tempo L_S percorre una lunghezza L_P , pertanto la sua velocità è

$$k(s) = \frac{L_P}{L_S} = \frac{2\pi \cos \theta}{L_S} = \frac{R}{R^2 + h^2}.$$

È rimarchevole il fatto che la curvatura di un'elica sia costante. Ricordo che abbiamo visto che le uniche curve piane con curvatura costante sono le circonferenze.

4. IL VERSORE BINORMALE - FORMULE DI FRENET

Sia data una curva \mathcal{C} e siano T ed N i versori tangente e normale in un certo punto P di \mathcal{C} . Definiamo il versore *binormale* che indichiamo con B ponendo:

$$B := T \times N.$$

Questo significa che i vettori T, N, B sono mutuamente ortogonali, di lunghezza 1 e disposti come le prime tre dita della mano destra. Il piano che passa per P e contiene i versori N e B si chiama piano *normale*, quello che contiene i versori T e N si chiama piano *osculatore*, infine quello che contiene i versori T e B , piano *rettificante*.

Veniamo all'importante

Teorema 4.1. (Formule di Frenet) *Sia \mathcal{C} la traiettoria di un punto $P(s)$, che si muove con velocità 1. Supponiamo inoltre che $\frac{dT}{ds}(s)$ sia sempre (cioè per ogni istante s) $\neq 0$ e quindi sia ben definito il versore normale $N(s)$. Allora esiste una funzione $\tau(s)$ detta torsione della curva nel punto $P(s)$ tale che:*

$$\begin{cases} \frac{dT}{ds} = kN \\ \frac{dN}{ds} = -kT - \tau B \\ \frac{dB}{ds} = \tau N \end{cases}.$$

Dimostrazione. (Esposta per completezza.) La prima formula è la formula (3.1). Poiché i tre versori T, N, B sono due a due ortogonali, essi formano una base dei vettori dello spazio. Quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{ds} &= aT + bN + cB \\ \frac{dB}{ds} &= a'T + b'N + c'B. \end{aligned}$$

Consideriamo il prodotto scalare $N.N = |N|^2 = 1$, allora, poiché è una costante

$$0 = \frac{d}{ds}(N.N) = 2 \frac{dN}{ds}.N = 2(aT + bN + cB).N = 2bN.N = 2b.$$

Dunque $b = 0$. Allo stesso modo, osservato che $B.B = 1$, si prova che $c' = 0$.

Da $T.N = 0$ segue:

$$0 = \frac{d}{ds}(T.N) = \frac{dT}{ds}.N + T.\frac{dN}{ds} = kN.N + T(aT + cB) = k + aT.T + cT.B = k + a.$$

Dunque $a = -k$.

Da $T.B = 0$ segue:

$$0 = \frac{d}{ds}(T.B) = \frac{dT}{ds}.B + T.\frac{dB}{ds} = kN.B + T(a'T + b'N) = a'T.T + b'T.N = a'$$

quindi $a' = 0$.

Dunque

$$\frac{dN}{ds} = -kT + cB$$

e

$$\frac{dB}{ds} = b'N.$$

Resta solo da vedere che $c = -b'$. Ma $0 = N \cdot B$, quindi

$$0 = \frac{d}{ds}(N \cdot B) = \frac{dN}{ds} \cdot B + N \cdot \frac{dB}{ds} = (-kT + cB)B + N(b'N) = c + b'.$$

□

5. SIGNIFICATO DELLA TORSIONE

Consideriamo una curva \mathcal{C} , traiettoria di un punto $P(s)$ che si muove a velocità 1. Costruiamo intorno alla curva un piccolo tubo come segue: sul piano normale alla curva nel punto P consideriamo la circonferenza di centro P e raggio r abbastanza piccolo. Tutte queste circonferenze (vedi Fig. 12), al variare di P sulla curva \mathcal{C} formano un piccolo tubo.

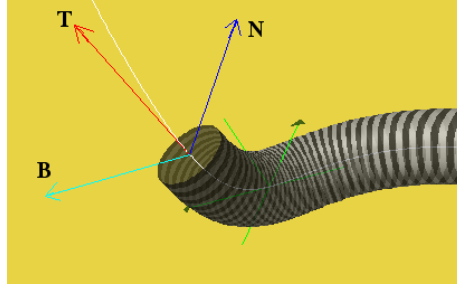


FIGURE 12

Possiamo poi inserire nel tubo la superficie (vedi Fig. 13) descritta dal vettore

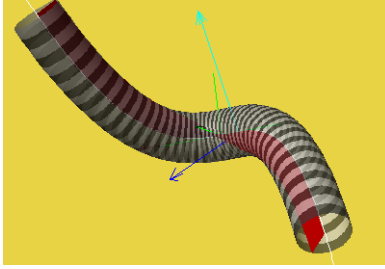


FIGURE 13

normale $N(s)$ al variare di s . Questo significa fissare un punto di riferimento su ogni circonferenza che forma il tubo.

Precisamente s individua la circonferenza C_s , di centro $P(s)$ e raggio r , che giace sul piano ν_s normale alla curva in $P(s)$. Analiticamente possiamo descrivere questa circonferenza come:

$$P(s) + r \cos \theta N(s) + r \sin \theta B(s).$$

In Fig. 14 vediamo la circonferenza C_s e, al variare di θ , il punto (indicato dalla freccia bianca) si muove sulla circonferenza (al crescere di θ , si muove da $N(s)$ a

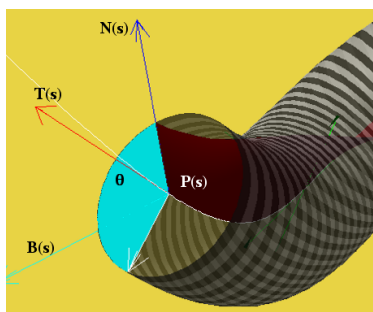


FIGURE 14

$B(s)$). Dunque per individuare un punto sul tubo dobbiamo assegnare due numeri: l'istante s , che ci dice qual'è la circonferenza C_s , e l'angolo θ che ci dice qual'è il punto sulla circonferenza.

Ora consideriamo un punto mobile $Q(s)$ che si muove sul tubo in modo che, in ogni istante s , sia $Q(s) \in C_s$. Per definire questo moto è sufficiente assegnare l'angolo $\theta(s)$. Cioè basta dare una funzione $\theta(s)$ e poi otteniamo una curva sul tubo. Precisamente

$$Q(s) = P(s) + r \cos \theta(s) N(s) + r \sin \theta(s) B(s),$$

dove $\theta(s)$ è una funzione assegnata. In Fig. 15 vediamo due possibili curve sul tubo, ottenute scegliendo due diverse funzioni $\theta(s)$.

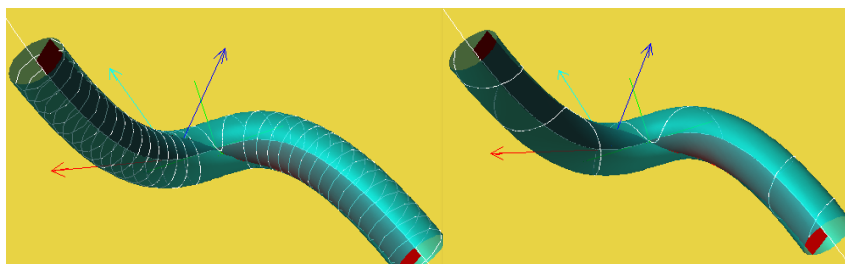


FIGURE 15

In particolare, se scegliamo $\theta(s) \equiv 0$, allora la traiettoria di $Q(s)$ è la curva che il versore $N(s)$ “taglia” sul tubo. Se scegliamo $\theta(s) \equiv \pi/2$, allora la traiettoria di $Q(s)$ è la curva che il versore $B(s)$ “taglia” sul tubo. Più in generale in Fig. 16 le righe colorate sul tubo rappresentano le curve $\theta(s) = \text{costante}$, inoltre sono

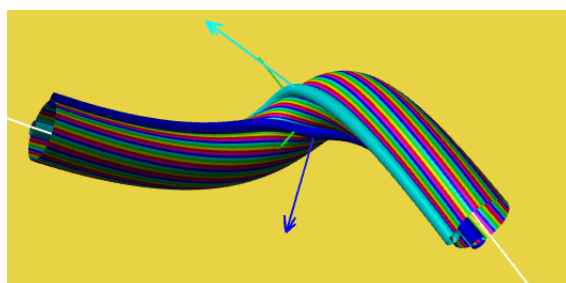


FIGURE 16

evidenziate in blu e celeste le curve “tagliate” dai versori $N(s)$ e $B(s)$.

Ora cerchiamo di muovere il punto $Q(s)$ sul tubo in modo che, come detto, $Q(s) \in C_s$ e inoltre la direzione di $Q(s)$, cioè la tangente alla traiettoria di $Q(s)$, sia sempre parallela alla tangente in $P(s)$. In altri termini $Q(s)$ si muove sul tubo *cercando* di mantenersi nella stessa direzione dell'*anima* del tubo. Sussiste la seguente

Proposizione 5.1. *La tangente alla traiettoria di $Q(s)$ è parallela alla tangente in $P(s)$ se e solo se la velocità angolare $\frac{d\theta}{ds}(s)$ con cui $Q(s)$ si muove rispetto al versore $N(s)$ è pari alla torsione $\tau(s)$.*

Dimostrazione. (Esposta per completezza). Si tratta di vedere quando dQ/ds è parallelo a $T(s)$. Da

$$Q(s) = P(s) + r \cos \theta(s)N(s) + r \sin \theta(s)B(s)$$

segue

$$\frac{dQ}{ds} = \frac{dP}{ds} - r \sin \theta \frac{d\theta}{ds}N + r \cos \theta \frac{dN}{ds} + r \cos \theta \frac{d\theta}{ds}B + r \sin \theta \frac{dB}{ds}.$$

Ricordiamo che $dP/ds = T$ e utilizziamo le formule di Frenet: $dN/ds = -kT - \tau B$ e $dB/ds = tN$; ne viene

$$\frac{dQ}{ds} = (1 - kr \cos \theta)T + (r \sin \theta)(\tau - \frac{d\theta}{ds})N - (r \cos \theta)(\tau - \frac{d\theta}{ds})B.$$

Dunque se e solo se $\tau(s) = \frac{d\theta}{ds}(s)$ il versore $T(s)$ è parallelo a dQ/ds . □

In conclusione abbiamo stabilito la seguente interpretazione della torsione:

Sia C la traiettoria di un punto mobile $P(s)$ che ha velocità 1. Si consideri un punto mobile $Q(s)$ che si muove sul tubo di centro C e raggio r in modo tale che $Q(s) \in C_s$ cioè $Q(s)$ sta sul piano normale ν_s alla curva nel punto $P(s)$. Allora la tangente alla traiettoria descritta da $Q(s)$ è parallela alla tangente t_s alla curva C in $P(s)$ se e solo se la velocità angolare $d\theta/ds$ di $Q(s)$ rispetto al versore normale è pari alla torsione $\tau(s)$ della curva C .

Prima di vedere un'esempio di questo fenomeno, conviene svolgere il seguente

Esercizio 5.2. *Calcolare la torsione di un'elica.*

Soluzione. A solito consideriamo un'elica che si avvolge su un cilindro verticale di raggio R e le cui spire distano $2\pi h$. Come sappiamo dall'Esercizio 3.3 il versore tangente $T(s)$ applicato nell'origine (vedi Fig. 17) si muove descrivendo un parallelo

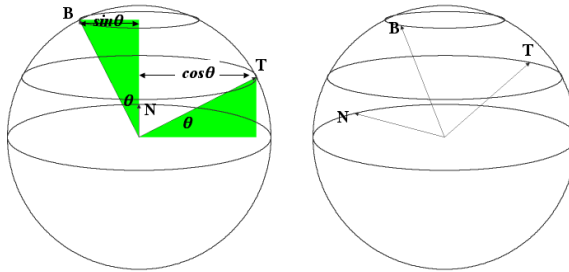


FIGURE 17. a-b

e $T(s)$ forma un angolo θ con il piano orizzontale, con

$$\cos \theta = \frac{2\pi R}{\sqrt{4\pi^2 R^2 + 4\pi^2 h^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}}.$$

Le due immagini Fig. 17a-b sono successive, ciò mostra che il versore tangente T si muove in senso antiorario. Non è difficile capire che questo significa che l'elica che stiamo considerando si avvolge salendo sul cilindro in senso antiorario. Come sappiamo (cfr. Esercizio 2.3) il versore normale è orizzontale e diretto verso l'asse del cilindro. Una breve riflessione fa capire che il verso del versore normale N in Fig. 17 è scelto correttamente.

In Fig. 18 è rappresentato il caso di un'elica che si avvolge salendo in senso orario. Si noti che è cambiato il verso di N . In entrambi i casi il versore $B(s)$,

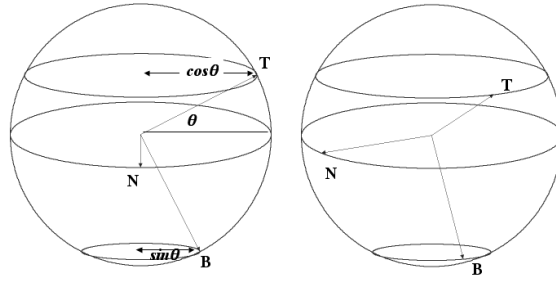


FIGURE 18. a-b

perpendicolare a $T(s)$, forma un angolo θ con l'asse verticale e quindi il raggio del parallelo descritto da $B(s)$ è

$$\sin \theta.$$

Abbiamo già stabilito che il tempo impiegato da $P(s)$ a percorrere una spirale è $L_s = 2\pi\sqrt{R^2 + h^2}$ e che nello stesso tempo il versore $B(s)$ percorre il suo parallelo. Quindi la velocità di $B(s)$ è

$$\left| \frac{dB}{ds} \right| = \frac{\text{lunghezza parallelo}}{\text{tempo impiegato}} = \frac{2\pi \sin \theta}{L_s} = \frac{2\pi \sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{L_s} = \frac{|h|}{R^2 + h^2}.$$

Dalle formule di Frenet sappiamo che $dB/ds = \tau N$, quindi

$$|\tau| = \frac{|h|}{R^2 + h^2}.$$

Resta solo da stabilire se $\tau = \frac{h}{R^2 + h^2}$ o $\tau = -\frac{h}{R^2 + h^2}$ (si ricordi che h per ipotesi è positiva), cioè se τ è positiva o negativa. Ora $dT/ds = kN$ e $dB/ds = \tau N$ con k che è sempre positivo. Quindi τ è positiva (risp. negativa) se $dT/ds, dB/ds$ hanno verso concorde (risp. discorde). Ma confrontando le due immagini della Fig. 17 vediamo che i versori $T(s), B(s)$ si muovono in versi opposti quindi

$$\tau = -\frac{h}{R^2 + h^2}.$$

se l'elica sale in senso antiorario; mentre confrontando le due immagini della Fig. 18 vediamo che i versori $T(s), B(s)$ si muovono nello stesso verso quindi

$$\tau = \frac{h}{R^2 + h^2}.$$

se l'elica sale in senso orario.

Fatto notevole è che la torsione dell'elica è costante.

5.1. Effetto della torsione su un'elica. Consideriamo un'elica che si avvolge su un cilindro verticale e le cui spire salgono in senso antiorario. In Fig. 19 vediamo

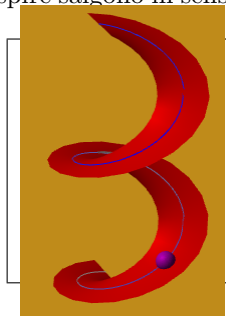


FIGURE 19

l'elica, il punto $P(s)$ mobile su di essa e la striscia descritta da un segmento diretto come il versore normale (che come sappiamo è orizzontale). Possiamo immaginare questa striscia come una scala a chiocciola. Cominciamo con l'osservare che è esperienza comune che è più faticoso salire una scala a chiocciola stando dalla parte più interna dei gradini. Il motivo è semplice: il percorso interno è più breve di quello fatto stando al centro o sull'estremo esterno del gradino e per tutti i tre i percorsi si guadagna la stessa altezza con un uguale numero di gradini. Dunque all'estremo interno di un gradino la scala è più ripida e all'estremo esterno è meno ripida. Ora consideriamo un tubo intorno all'elica Fig. 20a e su di esso segniamo la

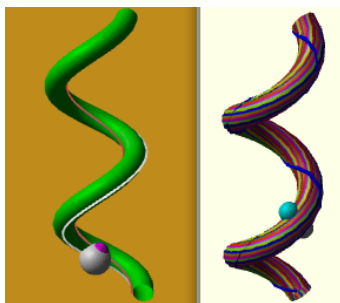


FIGURE 20. a-b

curva - in rosso - disegnata dall'estremità interna dei gradini, vale a dire “tagliata” sul tubo dal versore $N(s)$. Essa è percorsa da un punto $R(s)$ viola. Consideriamo un punto mobile $Q(s)$ - grigio - che all'istante 0 coincide con il precedente, cioè

$$Q(0) = R(0)$$

e la cui tangente sia sempre parallela a quella del punto $P(s)$ che si muove sull'elica. Per quanto abbiamo appena osservato, all'istante 0 la tangente di Q , pari alla tangente dell'elica al centro del gradino, ha pendenza minore della tangente di R che è all'estremo interno del gradino. Perciò inizialmente Q tende a salire meno della scala e quindi a ruotare sotto la scala. Quando Q raggiunge l'estremo esterno del gradino, la sua tangente, sempre parallela alla tangente del punto centrale del gradino, è più pendente di quella dell'estremo del gradino e quindi Q tende ora a girare sopra la scala. Questa discussione giustifica grosso modo quanto avevamo detto in precedenza per una qualsiasi curva: la presenza di torsione fa sì che le curve

sul tubo che hanno la stessa tangente dell'elica ruotino rispetto la curva tagliata dal versore normale.

6. TEOREMA FONDAMENTALE DELLE CURVE NELLO SPAZIO

Come conseguenza delle formule di Frenet (cfr. Teorema 4.1) sussiste il seguente teorema che è analogo a quello che abbiamo visto per le curve piane (Teorema 8.7 Cap. V).

Teorema 6.1. *La curvatura e la torsione caratterizzano completamente una curva. Precisamente se impongo che la curva passi per un certo punto P_0 con un certo versore tangente T_0 e un certo versore normale N_0 e assegno la curvatura $k(s) > 0$ e la torsione $\tau(s)$ in un certo intervallo di tempo, la curva è univocamente determinata.*

Dimostrazione. Omessa.

Naturalmente se spostiamo rigidamente queste curva nello spazio (come se fosse fatta di fil di ferro) la curvatura e la torsione non cambiano, quindi possiamo anche dire che curvatura e torsione individuano univocamente una curva a meno di moti rigidi.

Corollario 6.2. *Siano date due costanti $k > 0$ e τ . Esiste un'unica curva che ha curvatura costante k e torsione costante τ . Questa curva è un'elica.*

Dimostrazione. Siano date le costanti $k > 0$ e τ . Prendiamo

$$R := \frac{k}{k^2 + \tau^2}, \quad h := \frac{|\tau|}{k^2 + \tau^2}.$$

Con un facile calcolo si vede che:

$$(6.1) \quad k = \frac{R}{R^2 + h^2}, \quad \tau = \pm \frac{h}{R^2 + h^2}$$

Sappiamo che un'elica che si avvolge su un cilindro di raggio R e le cui spire distano $2\pi h$ ha la curvatura e la torsione che sono date proprio dalle equazioni (6.1); (si deve prendere il segno “-” se l'elica sale in verso antiorario, il segno “+” in caso contrario). Dunque abbiamo trovato la curva cercata. \square

Vale anche il seguente fatto:

Proposizione 6.3. *Una curva ha torsione identicamente nulla se e solo se è una curva piana.*

Dimostrazione. Omessa.

In particolare troviamo che se la torsione è nulla e la curvatura è costante $\neq 0$, allora la curva è un'elica con $h = 0$, cioè una circonferenza.

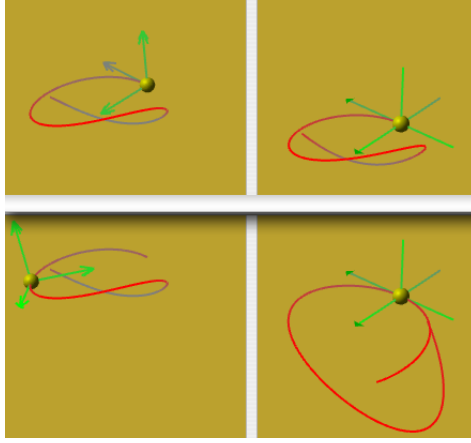


FIGURE 21

7. DESCRIZIONE GEOMETRICA DEL TRIEDRO DI FRENET

Immaginiamo un punto $P(s)$ che si muove lungo una curva \mathcal{C} e insieme con lui si muove il triedro di Frenet formato dai versori $T(s), N(s), B(s)$ (assumiamo che il triedro di Frenet sia ben definito, cioè $k \neq 0$, e che anche la torsione $\tau \neq 0$). Possiamo anche immaginare di fissare una telecamera solidale con il triedro di Frenet; in tal caso sembrerà che la curva si muova mentre i tre versori stanno fermi. Le due immagini di sinistra sono riprese dalla telecamera fissa, quelle di destra dalla telecamera mobile solidale con i tre versori. Le immagini in alto sono identiche perché si riferiscono all'istante iniziale, quando le due telecamere coincidono.

Ora guardiamo la curva dalla punta del versore tangente (vedi Fig. 22): vediamo

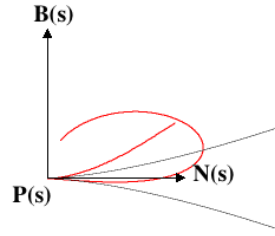


FIGURE 22

la proiezione ortogonale della curva sul piano normale e quello che osserviamo è che la curva assomiglia ad una cuspid. La cosa non è casuale; come mostra il filmato la cosa vale per tutti i punti di questa curva \mathcal{C} , in verità vale per ogni curva e per ogni suo punto. La cuspid nera che appare in Fig. 22 approssima, vicino al punto $P(s)$, molto bene la curva, essa ha equazione:

$$9k(s)y^2 = 2(\tau(s))^2x^3$$

e dunque dipende da curvatura e torsione. Si noti che la tangente della cuspid è sempre diretta come la retta normale e il versore normale è all'interno della cuspid.

Ora guardiamo la curva dalla punta del versore normale (vedi Fig. 23a): vediamo la proiezione ortogonale della curva sul piano cosiddetto rettificante, cioè il piano dei

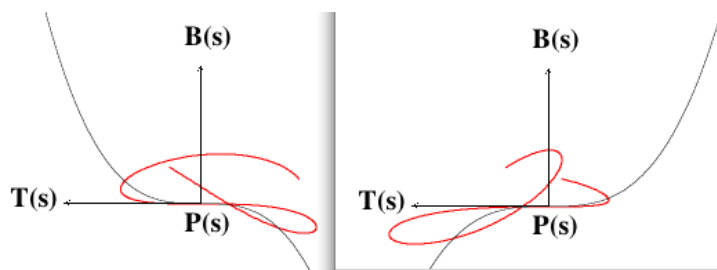


FIGURE 23. a-b

versori tangente e binormale. La curva appare come una cubica: precisamente la cubica che approssima la curva è

$$k(s)\tau(s)x^3 = -6y.$$

Le due immagini proposte (a - b) si riferiscono al caso in cui la torsione è > 0 e rispettivamente < 0 . Ora, poiché l'asse orizzontale in figura è la proiezione del piano osculatore (quello che contiene i versori $T(s), N(s)$), possiamo concludere che se $\tau(s) < 0$ il punto $P(s)$ si solleverà sopra il piano osculatore, se $\tau(s) > 0$ il punto $P(s)$ andrà sotto il piano osculatore.

Infine guardiamo la curva dalla punta del versore $B(s)$ (vedi Fig. 24): vediamo

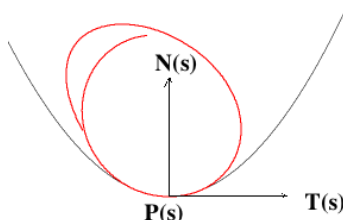


FIGURE 24

la proiezione ortogonale della curva sul piano cosiddetto osculatore, che contiene versore tangente e normale. La curva appare come una parabola: la parabola che approssima la curva è:

$$k(s)x^2 = 2y.$$

Esercizio 7.1. Si disegnano approssimativamente le proiezioni ortogonali di una curva sul piano normale, sul piano osculatore e sul piano rettificante, indicando nei tre disegni i versori T, N, B .

A partire da queste considerazioni possiamo dare una completa caratterizzazione geometrica del triedro di Frenet.

Cominciamo con una semplice

Definizione 7.2. Dati una curva C e un suo punto P , diremo che un piano α passante per P , taglia la curva se esiste un piccolo arco AB di curva, contenente il punto P , tale che l'archetto AP giace in uno dei due semispazi determinati da α e l'archetto PB giace nell'altro.

Consideriamo ora un piano α che passa per P . Se il versore tangente T , applicato in P non sta su α è intuitivamente chiaro che la curva in P attraversa il piano α e quindi il piano taglia la curva.

Supponiamo invece che il piano α contenga il versore tangente T ; se guardiamo la curva dalla punta del versore tangente (Fig. 22) vediamo una cuspide e il piano α si proietta su una retta r_α passante per P . In Fig. 25 vediamo a destra la

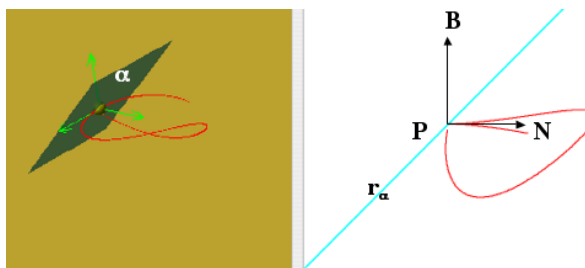


FIGURE 25

proiezione ortogonale sul piano normale e vediamo anche la retta r_α . Dovrebbe essere chiaro che qualunque sia l'inclinazione della retta, cioè qualunque sia il piano α che contiene la retta tangente, questo piano non taglia mai la curva (almeno un archetto vicino a P), che resta tutta da una parte. L'unica eccezione si ha quando la retta è orizzontale e taglia in due la cuspide e la curva; cioè quando il piano α coincide con il piano osculatore ω (che contiene retta tangente e retta normale).

Dunque abbiamo provato che

Proposizione 7.3. *La retta tangente è caratterizzata geometricamente come segue: è l'asse del fascio di piani che non taglia la curva.*

Se la torsione $\tau \neq 0$ si può vedere che il piano osculatore ω taglia necessariamente la curva; ma se la torsione in P fosse 0 le cose possono andare diversamente. Ora la retta normale è la perpendicolare alla tangente condotta sul piano osculatore, quindi abbiamo provato che:

Proposizione 7.4. *Se la torsione nel punto P è $\neq 0$, allora il piano osculatore è caratterizzato geometricamente come l'unico piano che passa per la retta tangente e taglia la curva. Inoltre la retta normale è caratterizzata come la perpendicolare alla tangente che giace su questo piano*

Determinati geometricamente retta tangente e retta normale, possiamo anche determinare geometricamente il versore normale N . Infatti, come si vede dalla Fig. 25, tra le due possibili scelte del versore normale, quella giusta è quella per cui il versore N resta dalla stessa parte della cuspide rispetto ad un generico piano del fascio che ha per asse la tangente.

A questo punto ci sono due scelte possibili per il versore tangente T , che dipendono dal verso di percorrenza che vogliamo dare alla curva. Infine noti T e N , il versore B è univocamente individuato con la regola della mano destra.