CAPITOLO V - CURVE

1. Retta tangente

1.1. **Definizione di retta tangente.** In Fig. 1 vediamo una serie di ingrandimenti di una curva C e di una retta t incidenti in un punto P. Le dieci figure hanno tutte lo stesso formato, ma rappresentano via via zone sempre più piccole vicino a P; precisamente la zona grigia, che compare in ogni immagine, individua la regione che appare nell'immagine successiva (ad ogni passo c'è uno zoom di fattore 2). Il fatto

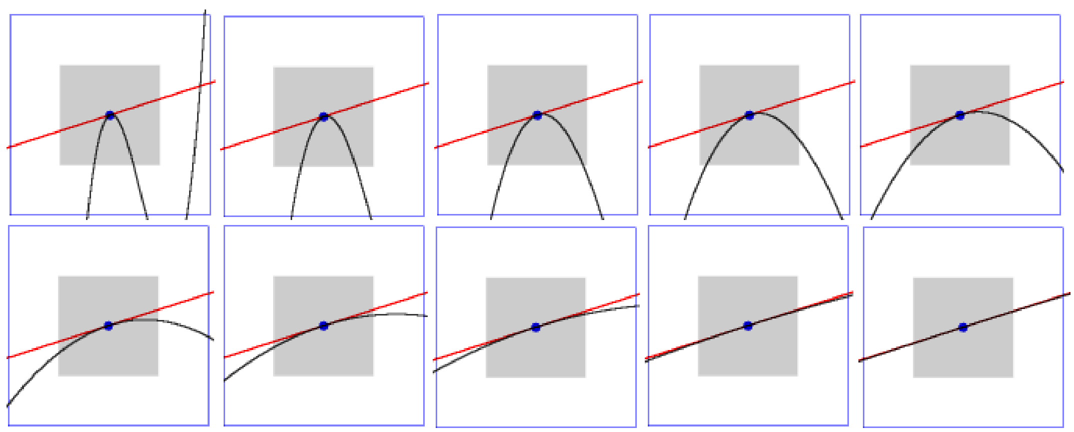


Figure 1

che - con un fattore d'ingrandimento sufficientemente grande e in una piccolissima regione vicino al punto P - la curva sia indistinguibile dalla retta, ci induce a dire che tale retta è tangente alla curva in P.

La definizione precisa è così formulata:

Definizione 1.1. *Siano C una curva, P un suo punto, t una retta per P. La retta t è tangente in P alla curva C se e solo se* **comunque** *fissato un formato $L \times L$, esiste un fattore di ingrandimento N_0 abbastanza grande per cui, in ogni fotografia $L \times L$, centrata in P e realizzata con un fattore di ingrandimento* **almeno** *N_0, la curva e la retta siano indistinguibili.*

Osservazione 1.2. Esiste un limite all'accuratezza con cui si può stampare una foto e questo preclude un'illimitata capacità di risoluzione dei dettagli. Pertanto il fatto che *la curva e la retta siano indistinguibili* non dipende dalla bontà dei nostri occhi, dunque non è soggettiva.

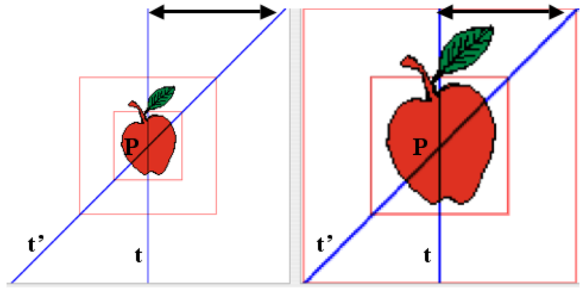


FIGURE 2

Osservazione 1.3. Prendiamo due rette t e t' incidenti in P. Un'immagine delle due rette e un suo ingrandimento sono indistinguibili se P è il centro dell'immagine. In Fig. 2 ne abbiamo la riprova: l'immagine ingrandita è distinguibile dall'altra solo per l'elemento accessorio (la mela) mentre la coppia di rette è identica nelle due immagini.

Invece in Fig. 3 il centro è nel punto $C \neq P$ e le due immagini sono diverse,

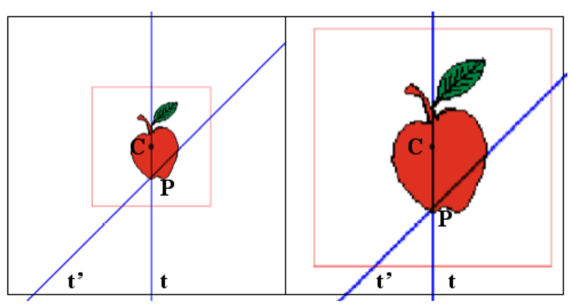


FIGURE 3

infatti la retta t' appare più in basso nell'ingrandimento.

Ora supponiamo che l'angolo θ tra le due rette sia tanto piccolo che in un'immagine le due rette siano indistinguibili. Per quanto appena osservato, se il punto d'incidenza è al centro dell'immagine, possiamo ingrandire quanto vogliamo, ma non riusciremo a distinguere le due rette!

Come possiamo fare per distinguere le due rette?

Osserviamo (Fig. 4) che, sulla circonferenza di raggio R, centrata nel punto di incidenza P, le due rette tagliano un arco di lunghezza $R\theta$. Anche se θ è molto

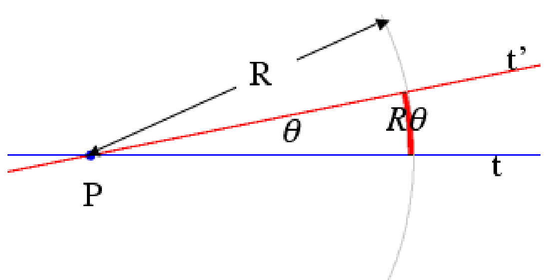


FIGURE 4

piccolo, prendendo R grandissimo, posso fare in modo che $R\theta$ sia abbastanza grande da rendere visibile l'arco. Dunque si tratta di fotografare l'intera regione centrata in P che contiene la circonferenza, ovvero stampare una foto $2R \times 2R$ centrata in P in scala 1:1, cosicché nella fotografia appaia l'arco e le due rette siano distinguibili.

Concludendo: è essenziale richiedere che il formato $L \times L$ della foto possa essere arbitrario, altrimenti per quanto grande scegliamo il fattore di zoom non potremo mai individuare certi dettagli.

Esercizio 1.4. *Spiegare perché l'argomento appena esposto mostra che la retta tangente (se esiste) è unica.*

Soluzione. Supponiamo, per assurdo, che, per una certa curva C, in un certo punto P ci siano due rette t e t' entrambe tangenti. Sia θ l'angolo tra le due rette e prendiamo la circonferenza di raggio $R = \frac{1}{\theta}$ cm. e centro in P. Le due rette tagliano sulla circonferenza un arco di $R\theta$ cm. $= 1$ cm. Pertanto, presa una fotografia in scala 1:1 di formato $2R \times 2R$, questa comprende tutta la circonferenza e in particolare l'arco che appare lungo 1 cm. Dunque le due rette appaiono distinte. Se poi uso un fattore di ingrandimento l'immagine delle due rette non cambia e saranno sempre distinguibili, dunque non è possibile che la curva appaia coincidere con entrambe le rette, come vorrebbe l'ipotesi che entrambe siano tangenti.

Osservazione 1.5. Nella Definizione 1.1 è indispensabile richiedere che l'affermazione valga *per ogni* ingrandimento di fattore *almeno* N_0. Questo perché ulteriori ingrandimenti possono riservare delle sorprese. In Fig. 5 vediamo due ingrandimenti

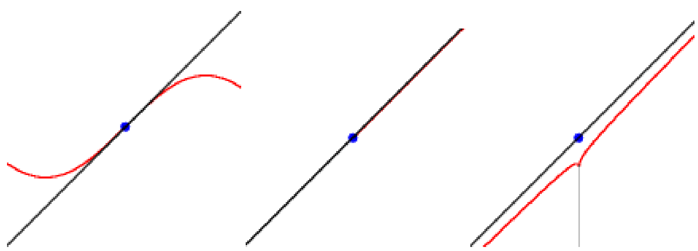


Figure 5

della prima immagine di fattore rispettivamente 10 e 1000. Quella che nella seconda immagine sembra essere la retta tangente, nella terza immagine si vede che non tocca neppure la curva.

.

1.2. **Tangente e derivata.**

Osservazione 1.6. *Una retta che passa per il punto* $P = (x_0, y_0)$ *ha equazione*

$$y = m(x - x_0) + y_0, \tag{1.1}$$

e m *si chiama coefficiente angolare della retta. Inoltre*

$$m = \operatorname{tg}\, \theta,$$

dove θ *è l'angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse.*

Proposizione 1.7. *Supponiamo che la curva C sia il grafico di una funzione $f(x)$.*

Esiste la retta tangente nel punto $P = (x_0, f(x_0))$ se e solo se la funzione è derivabile in x_0. In tal caso la retta tangente in P alla curva C è la retta che passa per P e ha coefficiente angolare $f'(x_0)$.

Dimostrazione. Se $L \times L$ è il formato della foto e N è il fattore di ingrandimento, allora la regione fotografata è un piccolo quadratino di lato $L/N \times L/N$ centrato in P. Prendiamo un punto Q della curva che sta sul bordo della fotografia (Fig. 6) ;

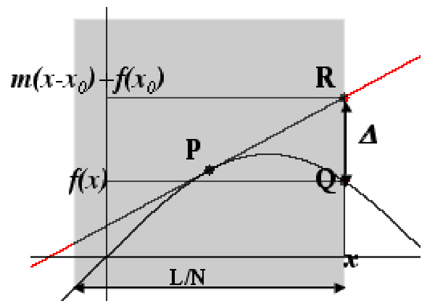


FIGURE 6

esso avrà coordinate $Q = (x, f(x))$ perché sta sul grafico, con $|x - x_0| = \frac{L}{2N}$ perché sta sul bordo del quadratino.

Sulla verticale di Q prendiamo il punto R che sta sulla retta t che dovrebbe essere la tangente. Tale retta ha equazione 1.1 dove $y_0 = f(x_0)$ e $m = f'(x_0)$, cioè

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Consideriamo la distanza Δ tra i due punti; essa è dipende dalla differenza delle ordinate dei due punti:

$$\Delta = ||Q - R|| = |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| = |x - x_0|\ |\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)|.$$

Ora facciamo alcune osservazioni.

• Posto

$$R := |\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)|,$$

riesce

$$lim_{x \to x_0} R = 0$$

se e solo se f è derivabile in x_0.

• Poiché $|x - x_0| = L/2N$ risulta

$$\Delta = \frac{LR}{2N};$$

inoltre $x \to x_0$ se e solo se $N \to \infty$.

• La distanza *nella fotografia* tra i punti Q ed R è

$$\Delta' = N\Delta.$$

Concludiamo:

a) Supponiamo che f sia derivabile in x_0 (cioè $lim_{x \to x_0} R = 0$) e mostriamo che esiste la retta tangente e che è proprio la retta t. Nell'ingrandimento la differenza apparente tra i punti Q ed R è

$$\Delta' = N\Delta = LR/2.$$

Quindi se $N \to \infty$, cioè se prendiamo il fattore N abbastanza grande, allora $x \to x_0$, quindi $R \to 0$ e dunque $\Delta' \to 0$ (questo comunque si sia prima fissato L). Così la distanza tra curva e retta nella foto va sotto la soglia di visibilità (qualunque essa sia), perché va a 0.

b) Supponiamo che esista la retta tangente t in P alla curva e mostriamo che f è derivabile e che la derivata è $f'(x_0)$. Cioè mostriamo che $lim_{x \to x_0} R = 0$. Ricaviamo da sopra

$$R = \frac{2\Delta'}{L}.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Esiste una costante C tale che se nella foto la distanza di due punti è minore di C non è apprezzabile e i punti appaiono coincidenti. Prendiamo L abbastanza grande in modo che

$$2C/L < \varepsilon$$

e prendiamo il fattore di ingrandimento N abbastanza grande in modo che la curva e la retta siano indistinguibili, cioè $\Delta' < C$. Allora

$$R = \frac{2\Delta'}{L} < \frac{2C}{L} < \varepsilon.$$

Ciò dice che $\lim_{N \to \infty} R = 0$. □

1.3. **Esempi.**

Esercizio 1.8. *Sia C il grafico della funzione $f(x) = x^3 - x^2 + 2$. Calcolare l'equazione della retta tangente nel punto $P = (1, f(1))$.*

Soluzione. Tanto per cominciare $f(x)$ è una funzione derivabile, la cui derivata è

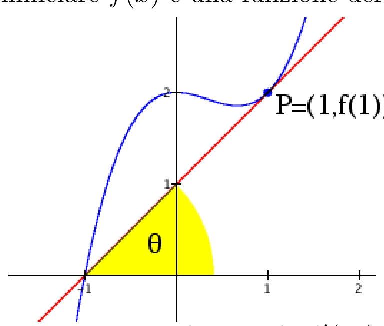


FIGURE 7. L'angolo θ soddisfa $f'(x_0) = tg(\theta)$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x.$$

Allora, per la Proposizione 1.7, la retta tangente in P esiste ed è una retta che passa per P; dunque essa ha equazione

$$y = m(x-1) + f(1)$$

dove il coefficiente angolare

$$m = f'(1) = 3 - 2 = 1$$

e

$$f(1) = 1 - 1 + 2 = 2.$$

In conclusione la retta cercata è

$$y = x + 1.$$

Vedremo poi che, per le coniche non degeneri, la definizione di tangente definita a suo tempo coincide con quella ora introdotta. Al momento limitiamoci ad applicare la definizione appena data per risolvere il seguente esercizio.

Esercizio 1.9. *Si consideri la parabola di equazione $y = x^2$. Si calcoli la retta tangente nell'origine.*

Soluzione. L'equazione cartesiana $y = x^2$ descrive già la curva come grafico della funzione $f(x) = x^2$. La retta tangente nell'origine ha equazione:

$$y = m(x - 0) + f(0)$$

cioè

$$y = mx$$

dove $m = f'(0) = 2x\big|_{x=0} = 0$. Dunque la tangente è l'asse delle ascisse.

Esercizio 1.10. *Mostrare che il grafico della funzione $f(x) = x^2 sin\frac{1}{x}$ ha come tangente nell'origine l'asse delle ascisse.*

Soluzione. Si potrebbe ragionare come nell'esercizio precedente: vale a dire verificare con un calcolo che $f'(0) = 0$; ma procediamo diversamente. Risulta:

$$\left|f(x)\right| = \left|x^2 sin\frac{1}{x}\right| \leq x^2$$

questo significa che il grafico di $f(x)$ è compreso nella regione tra le due parabole in Fig. 8 . Come sappiamo dall'esercizio precedente, la retta delle ascisse è tangente

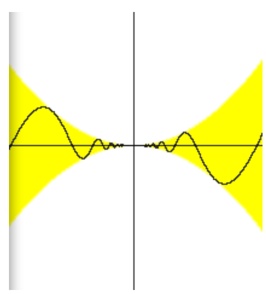


Figure 8

alle due parabole nell'origine. Questo significa che la retta approssima bene le due parabole vicino all'origine; a maggior ragione approssima la nostra curva che è compresa tra le due parabole.

Più precisamente, per definizione di tangente, comunque fissato un formato $L \times L$, esiste un fattore d'ingrandimento N_0 tale che, prendendo un ingrandimento di fattore $N \geq N_0$ e di formato $L \times L$, vediamo le due parabole coincidere con la retta delle ascisse. Questo significa che la regione compresa tra le due parabole appare ridotta alla sola retta delle ascisse. A maggior ragione la nostra curva, che sta in quella regione, appare coincidere con l'asse delle ascisse.

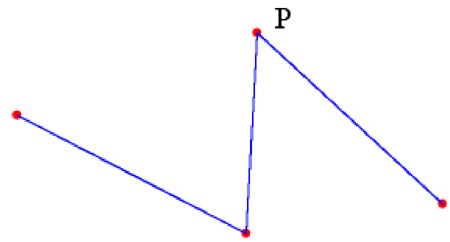


FIGURE 9

Esempio 1.11. *Spezzata.* Se la curva C è una linea spezzata e P è uno dei vertici, allora, dopo qualche ingrandimento centrato in P, resteranno solo il punto P e i due lati della spezzata che passano per P; cioè due semirette uscenti da P. Perciò nei vertici di una spezzata non esiste la retta tangente.

La Definizione 1.1 di retta tangente in pratica si può utilizzare solo per ottenere un risultato negativo (non esistenza della tangente) come nell'Esercizio 1.11, perché è difficile stabilire che *qualunque* sia il formato, *per ogni* ingrandimento sufficientemente grande curva e retta siano indistinguibili. Invece per stabilire l'esistenza della retta tangente e determinarla è necessario usare la Proposizione 1.7 come negli Esercizi 1.8 e 1.9. Tuttavia, in casi particolari, come nell'Esercizio 1.10, la Definizione 1.1 può tornare utile anche per un risultato in positivo.

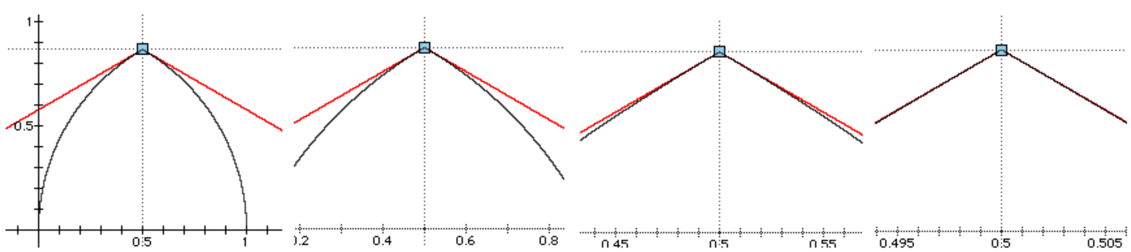


FIGURE 10

Esempio 1.12. *Arco a sesto acuto.* Se la curva C è un arco a sesto acuto e P è il vertice dell'arco, allora doppo qualche ingrandimento centrato in P (cfr. Fig. 10), vediamo due archi uscenti da P, via via più simili a delle semirette, fino a vedere solo due semirette uscenti da P. Esattamente come nel caso della spezzata.

Nel caso dell'arco a sesto acuto si può anche dire che i due archi che si raccordano nel vertice hanno due tangenti distinte (Fig. 11a) e la stessa cosa si può dire per una curva che si autointerseca (ad es. l'otto in Fig. 11b).

Esercizio 1.13. *Si consideri una curva composta da due archi di circonferenza come ad es. in Fig. 12a. Sotto quali condizioni una tale curva possiede la retta tangente nel punto di raccordo?*

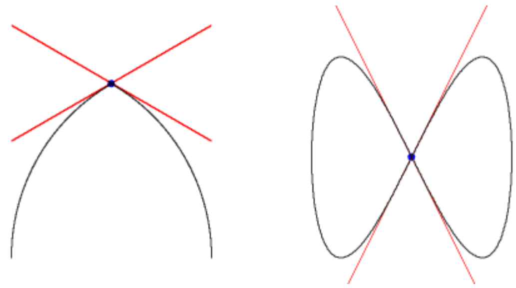


FIGURE 11. a - b

Soluzione. È necessario che i due archi abbiano nel punto di raccordo la medesima tangente. Trattandosi di circonferenze, la tangente è perpendicolare al raggio, quindi sulla perpendicolare alla tangente sta il centro. Affinchè la tangente sia unica i centri devono essere allineati al punto di raccordo (cfr. Fig. 12b).

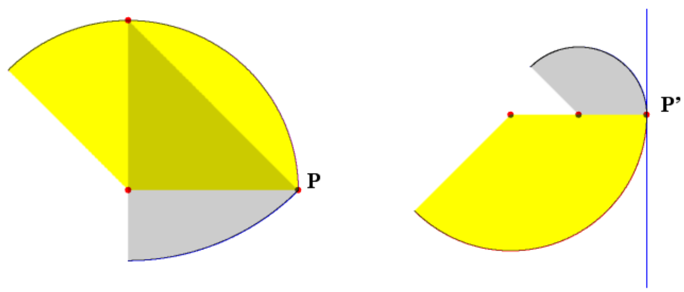


FIGURE 12. a - b

Osservazione 1.14. Un ovaloide è una curva chiusa che racchiude una regione convessa ed è composta di archi di circonferenza tali che nei punti di raccordo esiste la retta tangente. In Fig. 13 vediamo un esempio.

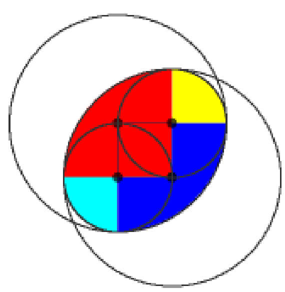


FIGURE 13

Infine consideriamo un ultimo caso di assenza della retta tangente, diverso dai precedenti.

Esempio 1.15. *Il caso della cuspide.* Consideriamo la curva in Fig. 14 che si chiama *cuspide.* Ingrandimenti successivi centrati nel vertice mostrano che la curva è approssimata da una semiretta!

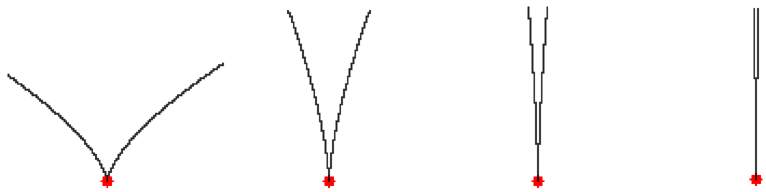


FIGURE 14

Dunque, secondo la nostra definizione non esiste retta tangente nel vertice. Si osservi che la cuspide è il grafico della funzione $f(x) = x^{2/3}$ che non è derivabile nell'origine e dunque per la Proposizione 1.7 la curva non ha retta tangente nell'origine.

1.4. **Tangente ad una traiettoria.** Spesso converrà descrivere una curva C come traiettoria descritta da un punto in moto. Se indichiamo con $x(t)$ e $y(t)$ le coordinate del punto all'istante t, diremo che

$$x = x(t),\ \ y = y(t)$$

sono le equazioni del moto.

Esempio 1.16.

$$x = R\cos(t),\ \ y = R\ sin(t)$$

sono le equazioni del moto di un punto che percorre una circonferenza di centro l'origine e raggio R.

Esempio 1.17. Sia $f(x)$ una funzione.

$$x = t,\ \ y = f(t)$$

sono le equazioni del moto di un punto che si muove sul grafico della funzione.

Osservazione 1.18. *Data una retta r, un vettore $\vec{u}$ è un* vettore direzione *della retta r se è parallelo alla retta, cioè se ha la sua stessa direzione. Ovviamente se $\vec{u}$ è un vettore direzione di r, gli altri vettori direzione della retta r sono i vettori della forma $c\vec{u}$ con $c \in \mathbb{R}$.*

Teorema 1.19. *Sia C la traiettoria descritta da un punto in moto e siano*

$$x = x(t),\ \ y = y(t)$$

le equazioni del moto.

Supponiamo che le funzioni $x(t), y(t)$ siano derivabili, che le derivate $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ siano continue e mai entrambe nulle.

Allora esiste la retta tangente alla curva nel punto $P(t_0)$; essa è la retta che passa per $P(t_0)$ e ha vettore direzione

$$\vec{V}(t_0) := (\frac{dx}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0)).$$

A proposito della dimostrazione di questo teorema, limitiamoci a dire che è una conseguenza della Proposizione 1.7.

Presi due punti P e Q sulla curva C consideriamo la retta r_{PQ} che li congiunge. Fissato P faccio tendere $Q \to P$, qual è la posizione limite (se esiste) della retta r_{PQ}?

Conviene tradurre il problema, considerando la curva C come la traiettoria descritta da un punto in moto. Sia $P(t)$ la sua posizione all'istante t , inoltre siano $x(t), y(t)$ le coordinate di $P(t)$. Fissiamo t e consideriamo la retta $r_{P(t)P(t+h)}$ che passa per il punto $P(t)$ e il punto $P(t+h)$. Si tratta di capire qual è la posizione limite di questa retta per $h \to 0$.

Siccome tutte queste rette passano per $P(t)$, ciascuna è univocamente determinata da un suo vettore direzione. In particolare il vettore $\frac{1}{h}(P(t+h) - P(t))$ è un vettore direzione[1] di $r_{P(t)P(t+h)}$. Ne segue che il vettore direzione della retta limite è

$$\frac{dP}{dt}(t) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big(P(t+h) - P(t)\big).$$

Ma facciamo un ulteriore passo. Naturalmente:

$$\frac{1}{h}\big(P(t+h) - P(t)\big) = \Big(\frac{x(t+h) - x(t)}{h},\ \frac{y(t+h) - y(t)}{h}\Big);$$

e dunque, passando al limite per $h \to 0$ e ricordando il Teorema:

$$\frac{dP}{dt}(t) = \vec{V}(t).$$

Dunque la retta limite ha vettore direzione $\vec{V}(t)$, dunque coincide con la retta tangente in $P(t)$.

La conclusione è la seguente:

Teorema 1.20. *Sia data la curva $\mathcal{C}$ ed un suo punto P.* **Supponiamo** *che esista la retta tangente t in P. Preso un punto Q della curva, $Q \neq P$, consideriamo la retta r_{PQ} che congiunge i due punti. Al tendere di P a Q la retta r_{PQ} tende alla retta tangente.*

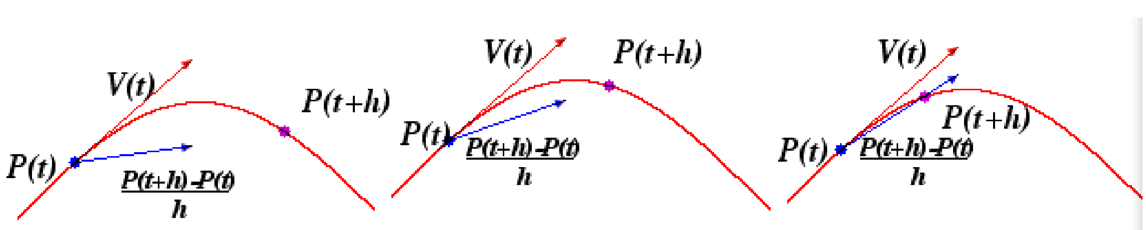


Figure 15

[1]Infatti esso ha la stessa direzione del segmento $\overline{P(t)P(t+h)}$ e dunque della retta che congiunge i due punti.

Esercizio 1.21. *Consideriamo la Fig. 16; da essa dovrebbe essere chiaro che mentre il punto Q sulla cuspide si avvicina al vertice P, la retta r_{PQ} tende alla retta verticale t passante per P. Dunque possiamo concludere che tale retta t è tangente alla cuspide nel vertice P?*

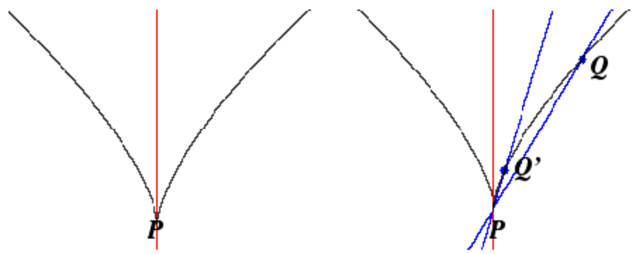


FIGURE 16

Soluzione. Potrebbe sembrare che ci sia una contraddizione con l'Esempio 1.15, dove abbiamo osservato che la cuspide non possiede tangente nel vertice P. In realtà dobbiamo semplicemente concludere che la proprietà del Teorema 1.20 è necessaria, ma non sufficiente, all'esistenza della tangente.

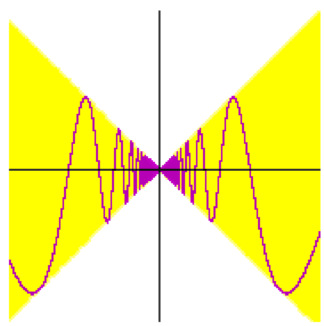


FIGURE 17

Vediamo un esempio in cui il Teorema 1.20 è utile:

Esercizio 1.22. *Si consideri il grafico della funzione $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ in Fig. 17. Si mostri che non esiste tangente nell'origine.*

Soluzione. Si osservi che

$$|f(x)| = |x\sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$$

quindi $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e dunque possiamo estenderla ad una funzione continua anche per $x = 0$. Inoltre la curva è compresa tra le bisettrici degli assi (la regione gialla in figura). Sia $P = (0,0)$.

Come si vede dalla Fig. 17 il grafico di $f(x)$ tocca infinite volte, mentre x si avvicina a 0, le due bisettrici degli assi, quindi per infiniti valori di Q prossimi a P, la retta r_{PQ} coincide ora con l'una ora con l'altra bisettrice. Pertanto non esiste una posizione limite di r_{PQ}. Ma il Teorema 1.20 afferma che se esiste la tangente tale posizione limite esiste, dunque dobbiamo concludere che non esiste la tangente[2] in P.

1.5. **Tangenti alle coniche.** Sarebbe necessario provare che la nozione di retta tangente, introdotta in questo capitolo (Definizione 1.1) per una curva qualsiasi, coincide nel caso delle coniche con quella precedentemente introdotta per ellisse, parabola e iperbole.

Una dimostrazione che utilizzi strumenti elementari e geometrici è possibile, ma troppo complicata. Invece una dimostrazione rigorosa e con qualche calcolo esiste, ma mi limito ad esporla per sommi capi, evitando di fare espressamente i calcoli necessari.

Esercizio 1.23. *Mostrare che le due definizioni che abbiamo dato di retta tangente ad una conica non degenere coincidono.*

Soluzione. **a)** Per prima cosa osserviamo che le coniche non degeneri possiedono la retta tangente (nel senso della Definizione 1.1) in ogni loro punto.

Per la parabola è facile: essa ha equazione $2py = x^2$ e dunque è il grafico della funzione $f(x) = x^2/2p$. Poiché $f(x)$ è una funzione derivabile, la Proposizione 1.7 ci dice che la parabola possiede la retta tangente in ogni suo punto.

Per l'iperbole, che ha equazione $\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1$, conviene descrivere ciascuno dei due rami come grafico di una funzione della y (e non della x). Ricaviamo la x dall'equazione dell'iperbole e otteniamo $x = \pm p\sqrt{1 + \frac{y^2}{q^2}}$. Dunque due rami sono i grafici delle funzioni $g^{\pm}(y) = \pm p\sqrt{1 + \frac{y^2}{q^2}}$ che sono funzioni derivabili. Allora di nuovo la Proposizione 1.7 ci dice che l'iperbole possiede la retta tangente in ogni suo punto.

Per l'ellisse consideriamo l'equazione parametrica $x(t) = p\,cos(t), y(t) = q\,sin(t)$. Le funzioni $x(t), y(t)$ sono derivabili e le loro derivate sono $dx/dt = -psin(t), dy/dt = qcos(t)$. Esse sono continue e mai contemporaneamente nulle, quindi per il Teorema 1.19, anche l'ellisse possiede la tangente in ogni suo punto.

b) Per semplificare limitiamoci al caso dell'ellisse. Sia P un suo punto. Per a) sappiamo che esiste la retta t tangente (definizione nuova) in P. Sia t' la tangente in P secondo la vecchia definizione. Proviamo che $t = t'$.

Il Teorema 1.19 dice che il vettore direzione della retta t è $\vec{V} = (dx/dt, dy/dt)$ e sappiamo che la retta t' biseca le rette che congiungono P ai fuochi F ed F'. Si tratta di verificare (cfr. Fig. 18) che il vettore $\vec{V}$ forma angoli uguali con i vettori $P - F$ e $F' - P$.

Il calcolo consiste nel determinare, a partire dall'equazione, le coordinate dei fuochi, poi, confrontando i prodotti scalari $< \vec{V}, P - F >$ e $< \vec{V}, F' - P >$, si conclude.

---

[2] Il Teorema 1.20 afferma

$$\text{esiste la tangente} \Rightarrow \text{essa è il} \lim_{Q\to P} r_{PQ}.$$

Nell'Esercizio 1.21 abbiamo visto che la freccia non si può invertire. Nell'Esercizio 1.22 abbiamo utilizzato questa implicazione formulandola in altro (equivalente) modo:

$$\text{non esiste} \lim_{Q\to P} r_{PQ} \Rightarrow \text{non esiste la retta tangente.}$$

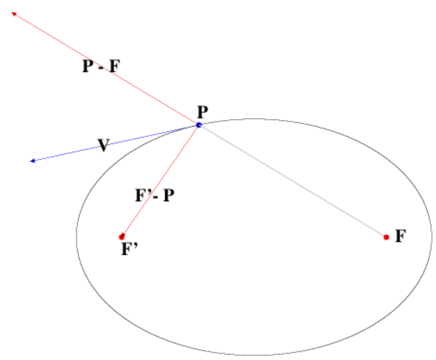


FIGURE 18

2. LUNGHEZZA DI UNA CURVA

2.1. **Introduzione.** Che cos'è la lunghezza di una curva? Potremmo proporre una definizione *operativa* dicendo che la lunghezza di una curva si misura facendo aderire alla curva un metro flessibile (come un metro da sartoria) ed inestensibile.

Ma si può obiettare che non è chiaro cosa significhi l'inestensibilità. Ovvero si potrebbe sostenere che tutti i metri sottoposti ad una flessione modificano la loro lunghezza e poi, di nuovo tesi e rettilinei, riacquistano la lunghezza originaria. È difficile confutare questa ipotesi, per quanto possa apparire bizzarra, senza sapere a priori che cos'è la lunghezza di una curva.

In altri termini la definizione proposta si fonda su un argomento circolare: l'inestesibilità di un metro serve a definire la lunghezza di una curva, ma il concetto di lunghezza di una curva è necessario per definire l'inestensibilità di un metro.

Altra obiezione che si può sollevare è che le curve sono definibili in modo astratto ad es. usando due funzioni $x(t), y(t)$ che danno le coordinate di un punto che descrive la curva (ad es. la curva $C = \{(t, \sin(1/t); 0 < t < 1\}$ è la curva dell'Esercizio 1.22). Pertanto sarebbe preferibile disporre di una definizione di lunghezza che sia altrettanto astratta.

Per risolvere il problema procederemo come segue:

• troviamo due proprietà che il concetto di lunghezza di una curva deve ragionevolmente soddisfare;

• mostriamo che da queste due proprietà discende logicamente un'unica possibile definizione di lunghezza (cfr. Definizione 2.1);

• osserviamo che questa definizione è poco utile in pratica;

• dimostriamo una formula che permette di calcolare la lunghezza di una curva (cfr. Teorema 2.2).

2.2. **Una prima proprietà che la lunghezza di una curva deve possedere.** Cominciamo ad individuare una proprietà che la lunghezza di una curva deve soddisfare. Consideriamo due punti, A e B, di una curva C e prendiamo sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ alcuni punti $P_1, P_2, \ldots, P_n$ disposti in successione da A verso B come in Fig. 19a. Sia S la linea spezzata che ha per vertici i punti $A, P_1, \ldots, P_n, B$, presi nell'ordine; vale a dire S ha per lati i segmenti $AP_1, P_1P_2, \ldots, P_nB$. La lunghezza $L(S)$ ovviamente è la somma

$$L(S) = ||P_1 - A|| + ||P_2 - P_1|| + \cdots + ||B - P_n||$$

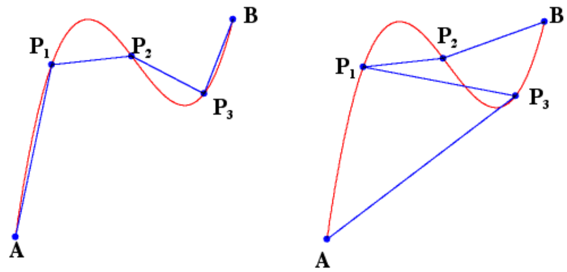


FIGURE 19. a - b

delle lunghezze dei lati. Siamo tutti d'accordo che, qualunque cosa sia la lunghezza $L(\widehat{AB})$ dell'arco, essa è maggiore della lunghezza $L(S)$ della spezzata.

Qui è opportuna una piccola precisazione. È necessario prendere i lati della spezzata nell'ordine dato dai vertici che sono disposti in successione sull'arco di curva; in Fig. 19b vediamo la spezzata S' che ha gli stessi vertici ma i cui lati sono presi in ordine diverso. La lunghezza $L(S')$ può essere maggiore della lunghezza $L(\widehat{AB})$ dell'arco.

In conclusione
(i) *dati un arco di curva $\widehat{AB}$ e una spezzata S i cui vertici sono disposti ordinatamente sull'arco da A a B e i cui lati seguono lo stesso ordine, risulta*

$$L(S) \leq L(\widehat{AB}).$$

N.B. È necessario usare $\leq$ piuttosto che $<$, perché la curva potrebbe essere una retta e in quel caso varrebbe l'uguaglianza.

2.3. **Una seconda proprietà che la lunghezza di una curva deve possedere.** Osserviamo anche che è ragionevole pensare (cfr. Fig. 20) che, prendendo un

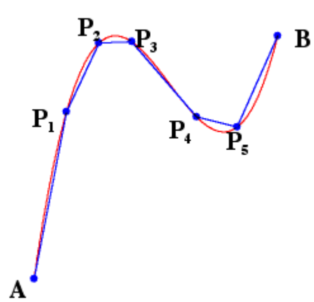


FIGURE 20

numero sufficiente di vertici e disponendoli ben distribuiti sull'arco di curva, la lunghezza $L(S)$ della spezzata approssimi molto bene la lunghezza $L(\widehat{AB})$ dell'arco. Questo significa che

(ii) *dati un arco di curva* $\overset{\frown}{AB}$ *e un numero* $M < L(\overset{\frown}{AB})$, *esiste*[3] *una spezzata* S *(i cui vertici sono disposti ordinatamente sull'arco da* A *a* B *e i cui lati seguono lo stesso ordine) tale che*

$$M < L(S) \leq L(\overset{\frown}{AB}).$$

2.4. **La definizione di lunghezza.** Mostriamo che le proprietà (i) e (ii) conducono logicamente ad una definizione della lunghezza di un arco di curva.

Ricordo che ogni insieme Ω di numeri reali possiede un estremo superiore, indicato con $\sup(\Omega)$, che è a sua volta un numero reale oppure $+\infty$ ed è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

(i') Se $x \in \Omega$, allora $x \leq \sup(\Omega)$.
(ii') Se $M < \sup(\Omega)$, allora esiste $x \in \Omega$ tale che $M < x \leq \sup(\Omega)$.

Assegnato un arco $\overset{\frown}{AB}$ di curva, consideriamo l'insieme Ω delle lunghezze $L(S)$ di tutte spezzate S costruite, come descritto sopra, sull'arco $\overset{\frown}{AB}$. Per questo insieme Ω le proprietà (i) e (ii) corrispondono esattamente alle proprietà (i') e (ii'), pertanto

$$\sup(\Omega) = L(\overset{\frown}{AB}).$$

In conclusione, concordando che lunghezza di un arco di curva deve soddisfare le proprietà (i) e (ii), siamo logicamente costretti a dare la seguente

Definizione 2.1. *Data una curva* C *e presi su di essa due punti distinti* A *e* B, *la lunghezza dell'arco* $\overset{\frown}{AB}$ *è l'estremo superiore di tutte le possibili lunghezze di spezzate* S *i cui vertici sono disposti ordinatamente sull'arco da* A *a* B *e i cui lati seguono lo stesso ordine.*

Mi pare interessante rilevare che questo problema *filosofico*, relativo al concetto di lunghezza di una curva, sia trattabile in modo molto pulito e convincente in termini matematici: osservato che questo concetto deve soddisfare certe proprietà, ricaviamo in modo univoco e preciso la sua definizione.

2.5. **Scarsa utilità della Definizione 2.1.** A titolo d'esempio proviamo a calcolare la lunghezza di una circonferenza di raggio R. Una spezzata S i cui vertici sono disposti ordinatamente su una circonferenza è il perimetro di un poligono iscritto. È ragionevole pensare che se ci limitiamo a considerare poligoni regolari iscritti nella circonferenza (Fig. 21) sarà più facile calcolare la lunghezza dei loro perimetri.

Sia P_n un poligono regolare con n lati iscritto nella nostra circonferenza. È ragionevole pensare che la lunghezza $L(P_n)$ del suo perimetro cresca al crescere del numero n dei lati. Questa affermazione non è completamente ovvia, tuttavia è chiaro che con qualche calcolo non dovrebbe essere difficile dimostrarla e possiamo prenderla per vera.

Con calcoli più laboriosi si può calcolare $L(P_n)$ e cercare di calcolare la lunghezza $L(C)$ della circonferenza come

$$L(C) = \lim_{n \to \infty} L(P_n).$$

[3]Deve esistere un spezzata S la cui lunghezza è così vicina a quella del'arco da essere maggiore di M.

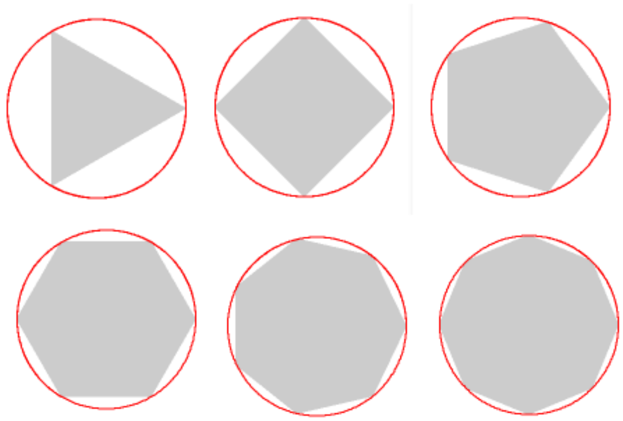


FIGURE 21

Tuttavia quest'ultima formula, per quanto rispondente alla nostra intuizione, sembra meno facile da dimostrare. Si osservi infatti che, poiché la successione $L(P_n)$ è crescente, esiste il $\lim_{n\to\infty} L(P_n)$. Inoltre, poiché il perimetro di P_n è una spezzata con vertici sulla circonferenza e lati ben ordinati, vale $L(P_n) < L(C)$, quindi possiamo concludere

$$L(C) \geq \lim_{n\to\infty} L(P_n).$$

Infine, per provare l'uguaglianza, dovremmo stabilire che per un qualunque numero M, tale che $M < L(C)$, esiste un poligono regolare P_n il cui perimetro è maggiore di M; dalla Definizione 2.1 sappiamo che esiste una spezzata S con $M < L(S) < L(C)$, ma non si vede perché questa spezzata debba essere un poligono regolare.

Più in generale dato un arco di curva $\widehat{AB}$ vorremmo disporre di un criterio che ci consenta di costruire una successione S_n di spezzate tale che

$$L(\widehat{AB}) = \lim_{n\to\infty} L(S_n).$$

Senza di questo criterio la Definizione 2.1 appare priva di ogni utilità.

2.6. **Una formula per la lunghezza.** L'idea è che se prendiamo un numero sufficiente di vertici disposti in modo che i lati siano sufficientemente piccoli, allora la spezzata fornisce un'ottima approssimazione della curva. In altri termini la congettura è la seguente:

Congettura: *data una successione di spezzate S_n (i cui vertici sono disposti ordinatamente sull'arco da A a B e i cui lati seguono lo stesso ordine) tali che il massimo*[4] *d_n della lunghezza dei lati di S_n converga a 0 per $n \to \infty$, allora*

$$L(\widehat{AB}) = \lim_{n\to\infty} L(S_n).$$

[4]Questa condizione significa che tutti i lati della spezzata S_n hanno lunghezza inferiore a d_n e la successione d_n converge a 0 per $n \to \infty$. A titolo d'esempio questa condizione è soddisfatta dai poligoni regolari iscritti in una circonferenza di raggio R; infatti ogni poligono P_n ha n lati tutti uguali di lunghezza a_n e la lunghezza del perimetro è $L(P_n) = na_n < L(C) = 2\pi R$, quindi $a_n < 2\pi R/n \to 0$.

È opportuno osservare che se la curva possiede autointersezioni la congettura è falsa. Ad esempio si consideri la Fig. 22; infittendo i vertici della spezzata in figura,

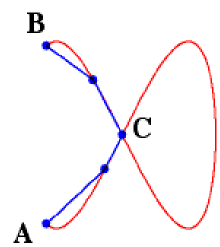


FIGURE 22

senza prendere vertici sul laccio $\overset{\frown}{CC}$, otteniamo una spezzata S i cui lati possono essere molto piccoli. Essa ci fornirà un'ottima approssimazione di $L(\overset{\frown}{AC}) + L(\overset{\frown}{CB})$ ma non della lunghezza di tutta la curva.

D'altro canto, come si comprende dall'esempio appena fatto, aggiungere l'ipotesi che la curva non abbia autointersezioni non dà nessun sostanziale fastidio: per calcolare la lunghezza della'arco $\overset{\frown}{AB}$ in Fig. 22 basta osservare che

$$L(\overset{\frown}{AB}) = L(\overset{\frown}{AC}) + L(\overset{\frown}{CC}) + L(\overset{\frown}{CB}).$$

Il vero problema è che il teorema seguente ha ipotesi più restrittive ancora:

Teorema 2.2. *Sia dato un arco di curva $\overset{\frown}{AB}$ che possiede in ogni suo punto la retta tangente ed essa dipende continuamente dal punto. Descriviamo l'arco come la traiettoria del moto di un punto $P(t)$ che, nell'intervallo di tempo (a, b), percorre l'arco da A a B sempre nello stesso verso. Allora*

$$L(\overset{\frown}{AB}) = \int_a^b ||\frac{dP}{dt}||dt.$$

Inoltre, data una successione di spezzate S_n (i cui vertici sono disposti ordinatamente sull'arco da A a B e i cui lati seguono lo stesso ordine) tali che il massimo d_n della lunghezza dei lati di S_n converga a 0 per $n \to \infty$, vale

$$\lim_{n\to\infty} L(S_n) = L(\overset{\frown}{AB})$$

Osservazione 2.3. L'ipotesi del Teorema. L'ipotesi richiede che la retta tangente esista in ogni punto dell'arco (che dunque non ha auotintersezioni) e dipenda continuamente dal punto, vale a dire variando in punto P sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ l'inclinazione della retta tangente t_P all'arco nel punto P varia con continuità. In altri termini, fissato un sistema di coordinate cartesiane, il coefficiente angolare della retta t_P dipende continuamente da P. Ancora, se descriviamo l'arco come grafico di una funzione $f(x)$, allora la funzione f deve essere derivabile (cioè esiste la retta tangente in ogni punto dell'arco) e la derivata (cioè il coefficiente angolare della tangente) deve essere continua. Infine questa condizione equivale al fatto che descrivendo l'arco come traiettoria percorsa dal punto $P(t) = (x(t), y(t))$ le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ siano derivabili e le loro derivate continue.

Esercizio 2.4. *Dare un esempio di curva che ammette la tangente in ogni punto ma, almeno in un punto, essa non dipenda continuamente dal punto.*

Soluzione. Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 \sin(1/x).$$

Per $x \neq 0$ non c'è nessun problema: la funzione è derivabile quante volte si vuole perché composta di funzioni buone ($\sin(x)$e $1/x$) moltiplicate per x^2.

Come sappiamo dall'Esercizio 1.10 il grafico è compreso tra due parabole e quindi $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e dunque possiamo definire la funzione anche nello 0; inoltre il grafico possiede la retta tangente nell'origine ed essa è l'asse delle ascisse. Vale[5] a dire $\frac{df}{dx}(0) = 0$.

Tuttavia la derivata non è continua nell'origine, perché non esiste $\lim_{x\to 0} \frac{df}{dx}(x)$, cioè per $x \to 0$ il coefficiente angolare della retta tangente non ha limite.

Per verificarlo calcoliamo $\frac{df}{dx} = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$; per $x \to 0$ il primo addendo, $2x\sin(1/x)$, converge a 0, mentre il secondo, $\cos(1/x)$, oscilla. Quindi la derivata oscilla. In Fig. 23 è rappresentato in nero il grafico di $f(x)$ e in rosso

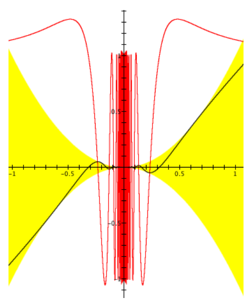


FIGURE 23

quello della sua derivata; si vede chiaramente che quest'ultima oscilla senza avere limite per $x \to 0$.

Osservazione 2.5. La tesi del Teorema. L'enunciato fornisce una formula:

$$L(\widehat{AB}) = \int_a^b ||\frac{dP}{dt}||dt$$

che consente di calcolare la lunghezza di una curva a patto di conoscere l'equazione del moto di un punto che la percorre. Più espilictamente se $P(t) = (x(t), y(t))$, allora

$$||\frac{dP}{dt}|| = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}$$

e la formula diventa:

$$L(\widehat{AB}) = \int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}dt$$

Infine il Teorema dice che la congettura sulla lunghezza di una curva è vera, vale a dire la lunghezza si può approssimare bene usando spezzate i cui lati siano piccoli.

[5] la cosa può essere verificata con un calcolo: $\frac{df}{dx}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\sin(1/h)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin(1/h) = 0$.

Riporto qui di seguito per completezza la dimostrazione del Teorema 2.2 che non è stata esposta a lezione.

Dimostrazione del Teorema 2.2 Poiché il punto $P(t)$ percorre l'arco $\widehat{AB}$ nell'intervallo (a,b) sarà

$$P(a) = A, P(b) = B.$$

Inoltre i vertici della spezzata S_n saranno raggiunti in certi istanti $t_1, \ldots, t_n$ con

$$a < t_1 < \cdots < t_n < b.$$

Vale a dire i vertici della spezzata sono $P(a), P(t_1), \ldots, P(t_n), P(b)$ e la lunghezza della spezzata sarà

$$L(S_n) = ||P(t_1) - P(a)|| + ||P(t_2) - P(t_1)|| + \ldots ||P(b) - P(t_n)||$$

che possiamo riscrivere:

$$= \frac{||P(t_1) - P(a)||}{t_1 - a}(t_1 - a) + \frac{||P(t_2) - P(t_1)||}{t_2 - t_1}(t_2 - t_1) + \cdots + \frac{||P(b) - P(t_n)||}{b - t_n}(b - t_n).$$

Ricordiamo il Teorema del valor medio che dice che se $f(x)$ è una funzione derivabile con derivata continua, allora dati $a < b$ esiste un c, $a < c < b$, tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{df}{dx}(c).$$

Questo risultato vale anche per $P(t) = (x(t), y(t))$ benché siano coinvolte due funzioni ($x(t)$ e $y(t)$) e non una sola; quindi esistono $\tau_1 \in (a, t_1), \tau_2 \in (t_1, t_2), \ldots, \tau_{n+1} \in (t_n, b)$ taliche

$$L(S_n) = ||\frac{dP}{dt}(\tau_1)||(t_1 - a) + ||\frac{dP}{dt}(\tau_2)||(t_2 - t_1) + \cdots + ||\frac{dP}{dt}(\tau_{n+1})||(b - t_n).$$

Infine ricordiamo che data una funzione $f(x)$ continua in un intervallo (a,b) vale

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{df}{dx}(\xi_1).(x_1 - a) + \frac{df}{dx}(\xi_2).(x_2 - x_1) + \cdots + \frac{df}{dx}(\xi_{n+1}).(b - x_n)$$

dove $a < x_1 < \cdots < x_n < b$ è una suddivisione dell'intervallo, tale che il massimo delle distanze tende a 0 per $n \to \infty$, e i punti $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n+1}$ sono scelti arbitrariamente in ciascun intervallo della partizione.

Applicando questo risultato alla funzione $t \mapsto ||\frac{dP}{dt}(t)||$ si ottiene:

$$\lim_{n\to\infty} L(S_n) = \int_a^b ||\frac{dP}{dt}||dt.$$

D'altra parte dalla proprietà (i) sappiamo che

$$L(S_n) \leq L(\widehat{AB}).$$

Ne segue

$$\int_a^b ||\frac{dP}{dt}||dt \leq L(\widehat{AB}).$$

Supponiamo, per assurdo che sia

$$\int_a^b ||\frac{dP}{dt}||dt < L(\widehat{AB});$$

allora per la Definizione 2.1 esiste una spezzata S tale che

$$\int_a^b ||\frac{dP}{dt}||dt < L(S) < L(\widehat{AB}).$$

Ma aggiungendo via via dei vertici ad S posso costruire una successione di spezzate S_n con

$$L(S) < L(S_n) < L(S_{n+1})$$

e con il massimo delle lunghezze dei lati d_n che tende a 0. Allora

$$\lim_{n\to\infty} L(S_n) = \int_a^b ||\frac{dP}{dt}||dt < L(S) < L(S_n)$$

il che è assurdo. □

2.7. **Esempi ed esercizi.**

Esempio 2.6. Una curva di lunghezza infinita. In Fig. 24 sono riportate le

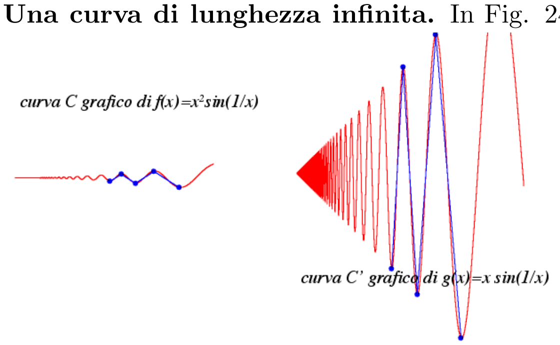


FIGURE 24

curve C e C' che rappresentano un tratto (da un certo punto fino all'origine) dei grafici delle funzioni $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ e $g(x) = x \sin(1/x)$ che già conosciamo. Su ciascuna di esse è tracciata una spezzata i cui vertici sono punti di massimo e minimo relativo, quindi queste spezzate approssimano in un certo senso la massima oscillazione di entrambe le curve.

Queste spezzate possono essere prolungate quanto si vuole, aggiungendo ulteriori lati, seguendo le infinite oscillazioni che conducono all'origine. Si costruisce così una successione S_n di spezzate per ciascuna curva. Un calcolo accurato consentirebbe di provare che per la curva C (grafico di $x^2 \sin(1/x)$) la lunghezza delle spezzate si può stimare con

$$L(S_n) \simeq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Da ciò si potrebbe desumere che la lunghezza della curva è finita. Questo è interessante perché (cfr. Esercizio 2.4) la curva non soddisfa le ipotesi del Teorema 2.2 che dunque non è immediatamente applicabile.

Per la curva C' la lunghezza delle spezzate si stima con

$$L(S_n) \simeq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

il che prova (la lunghezza è il sup delle lunghezze delle spezzate) che la lunghezza della curva è finita.

La conclusione è che questi due casi sono profondamente diversi e che solo uno studio quantitativo consente di verificarlo, mentre superficiali considerazioni del tipo *ci sono inifnite oscillazioni e quindi le curve sono infinite* sono del tutto fuori luogo.

Esercizio 2.7. *Esporre la definizione di lunghezza di un arco di curva e le ragioni che inducono a dare proprio questa definizione.*

Esercizio 2.8. *Enunciare, con le opportune ipotesi, la formula che permette di calcolare la lunghezza di una curva.*

Esercizio 2.9. *Spiegare come si potrebbe calcolare la lunghezza di una circonferenza utilizzando i poligoni regolari iscritti, mettendo in evidenze i passaggi che necessitano di precise dimostrazioni.*

Esercizio 2.10. *Ricordo che le funzioni coseno iperbolico e seno iperbolico, che si indicano rispettivamente con* cosh *e* sinh, *sono così definite:*

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

e

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

I loro grafici sono in Fig. 25 . Il cosh *è una funzione sempre positiva, mentre* sinh

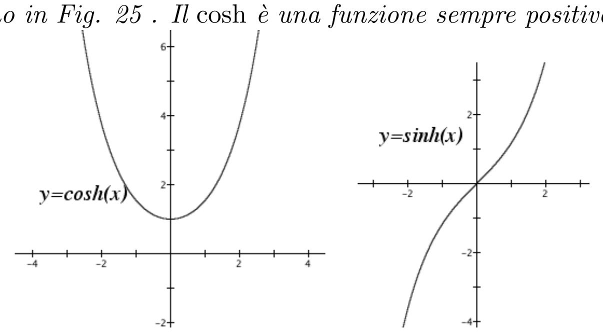


FIGURE 25

è una funzione crescente e biunivoca $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *quindi ammette la funzione inversa arcoseno iperbolico che si indica con* $asinh(x)$.

Ricordo anche alcune relazioni fondamentali:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1,$$

$$\frac{d\cosh}{dx} = \sinh(x) \quad e \quad \frac{d\sinh}{dx} = \cosh(x).$$

Si consideri il grafico del coseno iperbolico e si calcoli la sua lunghezza nell'intervallo (a, b)*; vale (Fig. 26) a dire la lunghezza dell'arco* $\overset{\frown}{AB}$*, dove* $A = (a, \cosh(a))$ *e*

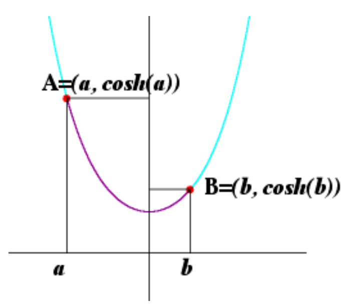


FIGURE 26

$B = (b, \cosh(b))$.

<u>Soluzione</u>. Osserviamo che la funzione $\cosh(x)$ è derivabile quante volte si vuole, infatti le derivate successive di $\cosh(x)$ sono alternativamente il seno e il coseno iperbolico. Quindi il grafico del coseno iperbolico non solo ha tangente in ogni

punto, ma questa dipende in modo continuo dal punto. Dunque è soddisfatta l'ipotesi del Teorema 2.2 che afferma

$$L(\widehat{AB}) = \int_a^b ||\frac{dP}{dt}||dt.$$

Ricordo (cfr. l'enunciato del teorema) che in questa formula il punto $P(t)$ percorre nell'intervalIo (a, b) l'arco $\widehat{AB}$ da A a B senza mai cambiare verso.

In generale il grafico di una funzione $y = f(x)$ è la traiettoria del punto $P(t) = (t, f(t))$. Nel nostro caso

$$P(t) = (t, \cosh(t)).$$

Evidentemente al crescere di t il punto si muove verso destra sul grafico andando, nell'intervallo (a, b), da A a B.

Dunque possiamo applicare il teorema. Risulta

$$\frac{dP}{dt} = (1, \sinh(t)),$$

quindi

$$||\frac{dP}{dt}|| = \sqrt{1 + \sinh^2(t)} = \sqrt{\cosh^2(t)} = \cosh(t).$$

(L'ultima uguaglianza vale perché il coseno iperbolico è sempre positivo.) Allora

$$L(\widehat{AB}) = \int_a^b ||\frac{dP}{dt}||dt = \int_a^b \cosh(t)dt.$$

Ma una primitiva del coseno iperblico è il seno iperbolico, quindi

$$L(\widehat{AB}) = \sinh(b) - \sinh(a).$$

Esempio 2.11. Spirali. Una spirale è la traiettoria descritta da un punto che ruota attorno ad un punto fisso O, detto centro della spirale, sempre nello stesso senso (antiorario od orario), allontanandosi da esso.

Data una spirale antioraria S, fissiamo un sistema di coordinate cartesiane in modo che il centro O della spirale coincida con l'origine. Preso un punto P della spirale S consideriamo l'angolo orientato θ che la semiretta positiva dell'asse delle ascisse forma con il segmento OP. In Fig. 27 sono rappresentati i punti che

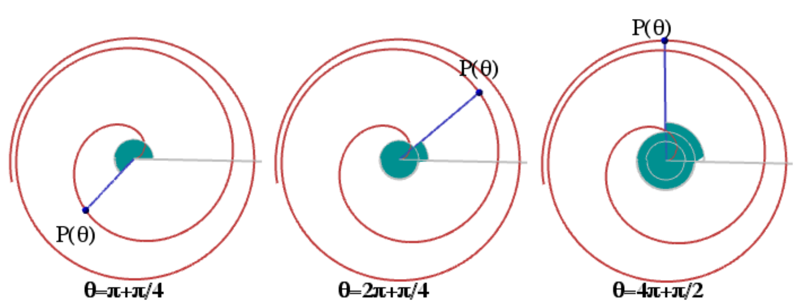


FIGURE 27

corrispondono agli angoli $\theta = \pi + \frac{\pi}{4}$, $\theta = 2\pi + \frac{\pi}{4}$, $\theta = 4\pi + \frac{\pi}{2}$.

Poiché il punto ruota sempre in senso antiorario ad ogni valore di $\theta > 0$ corrisponde un unico punto $P(\theta)$ e poiché il punto si allontana dal centro la lunghezza del segmento $OP(\theta)$, ovvero $||P(\theta)||$, cresce con θ. Converrà definire

$$r(\theta) := ||P(\theta)||;$$

così il punto $P(\theta)$ avrà coordinate (Fig. 28)

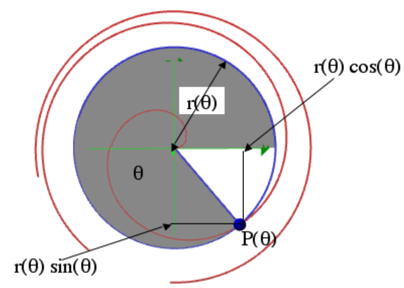


Figure 28

$$x(\theta) = r(\theta)\cos(\theta),\ \ y(\theta) = r(\theta)\sin(\theta).$$

Se ci fa piacere possiamo identificare θ con il tempo e pensare quindi che

$$P(t) = \big(r(t)\cos(t), r(t)\sin(t)\big)$$

è la posizione, all'istante t, del punto che descrive la spirale.

Quindi per descrivere una spirale tutto quello che ci serve è la funzione **crescente** $r(t)$ che indica la distanza dal centro all'istante t.

Esercizio 2.12. *Si consideri la spirale logaritmica*[6] S *in Fig. 29 .*

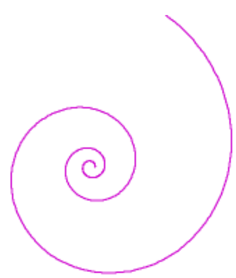


Figure 29

Essa è definita da

$$r(t) = e^t.$$

Calcolare la lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{P(0)P(t)}$ *per ogni* $t > 0$.

[6]Il termine deriva dal fatto che $\ln r(t) = t$.

<u>Soluzione</u>. Dunque il punto $P(t)$ che descrive la spirale ha cordinate:

$$P(t) = \big(e^t \cos(t), e^t \sin(t)\big).$$

Possiamo applicare la formula del Teorema 2.2 perché le funzioni coinvolte sono derivabili quante volte si vuole e il punto $P(t)$ percorre la spirale sempre nello stesso senso. Dunque

$$L(P(0)\overset{\frown}{,}P(t)) = \int_0^t ||\frac{dP}{dt}||dt.$$

Ora

$$||\frac{dP}{dt}|| = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}.$$

Ma

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}\big(e^t \cos(t)\big) = e^t \cos(t) - e^t \sin(t)$$

e

$$\dot{y} = \frac{d}{dt}\big(e^t \sin(t)\big) = e^t \sin(t) + e^t \cos(t).$$

Ne segue

$$\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} = \sqrt{2(e^t)^2} = \sqrt{2}e^t.$$

Pertanto:

$$L(P(0)\overset{\frown}{,}P(t)) = \int_0^t \sqrt{2}e^t dt = e^t - e^0 = \sqrt{2}(e^t - 1) = \sqrt{2}e^t - \sqrt{2}.$$

3. Ascissa curvilinea.

3.1. **Il caso della retta.** Come dovrebbe essere noto un sistema di ascisse su una retta si determina fissando un punto O della retta, detto origine, e scegliendo un verso; vale a dire scegliendo una delle due semirette, in cui la retta è divisa da O, come semiretta positiva. Se un punto P sta sulla semiretta positiva la sua ascissa

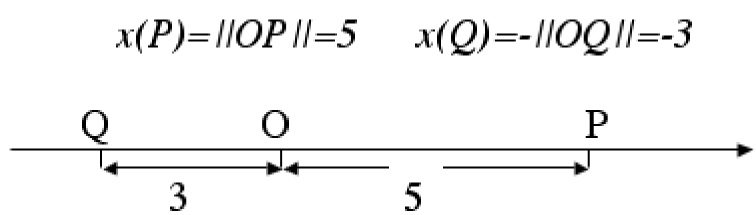


Figure 30

$x(P)$ è la lunghezza del segmento OP, altrimenti la sua ascissa $x(P)$ è l'opposto della lunghezza del segmento OP; in altri termini (Fig. 30)

$$x(P) = \begin{cases} \;\;||OP|| \text{ se P è nella semiretta positiva,} \\ -||OP|| \text{ se P è nell'altra semiretta.} \end{cases}$$

Un sistema di ascisse stabilisce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti della retta e i numeri reali, facendo corrispondere ad ogni punto P la sua ascissa $x(P)$.

3.2. **Il caso di una curva. La definizione di ascissa curvilinea e una prima proprietà.** Per una curva diamo la seguente definizione.

Definizione 3.1. *Data una curva, fissato un suo punto O - detto origine - e scelto un verso di percorrenza, vale a dire una parte positiva ed una negativa della curva, l'*ascissa curvilinea $s(P)$ *di un punto P è la lunghezza dell'arco che lo congiunge all'origine, se P si trova nella parte positiva; altrimenti $s(P)$ è l'opposto di tale lunghezza. In altri termini:*

$$s(P) = \begin{cases} L(\overset{\frown}{OP}) \text{ se } P \text{ è dopo il punto } O \\ -L(\overset{\frown}{OP}) \text{ se } P \text{ è prima del punto } O. \end{cases}$$

*(Prima e dopo si intendono secondo il verso prefissato).*Cfr. Fig. 31

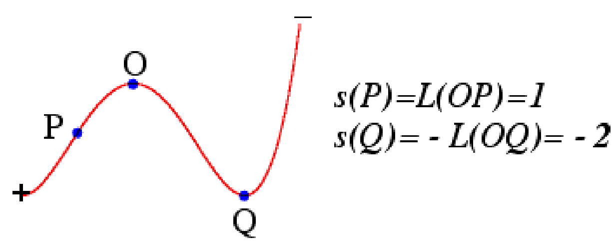


FIGURE 31

Per comprendere meglio che cos'è l'ascissa curvilinea conviene considerare il seguente esempio. Già gli antichi romani ponevano sulle strade le pietre miliari ad indicare la distanza da Roma. Prendiamo ad esempio l'Autostrada del Sole e supponiamo di mettere dei cartelli che ad ogni chilometro indicano la distanza (ovviamente non misurata in linea retta, ma seguendo l'autostrada) da Roma, con l'avvertenza di usare i numeri negativi a sud di Roma e i positivi a nord. Questo significa aver scelto Roma come origine O e i verso di percorrenza da sud a nord. L'unica differenza con un sistema di ascisse curvilinee è che in quest'ultimo caso il cartello c'è in ogni punto della curva.

In realtà la Definizione 3.1 è difettosa; ad esempio se C è una circonferenza non è chiaro che cosa sia la parte positiva e quella negativa e due punti si possono congiungere con due archi diversi. Per risolvere il problema è sufficiente eliminare un punto Q e considerare la curva $C' := C \setminus Q$. Analogo argomento vale se C è una curva a otto. Converrà considerare o uno degli archi che si determinano eliminando il punto di autointersezione, ovvero, se si vuole ragionare vicino al punto di autointersezione, limitarsi a considerare uno dei due archi che passano per esso. In conclusione questi esempi mostrano che *restringendosi ad un arco opportuno di C la defınzione ha senso.*

La costruzione dell'ascissa curvilinea è analoga a quella dell'ascissa su di una retta. In una retta, dati due punti P e Q risulta: $x(P) - x(Q)$ è uguale a $\pm$ la lunghezza del segmento QP, a seconda che andando da Q a P si segua o meno il verso prefissato sulla retta. Allo stesso modo:

Proposizione 3.2. *Fissato un sistema di ascisse curvilinee su una curva C e dati due punti P, Q di C risulta: $s(P) - s(Q)$ è, a seconda che andano da Q a P si segua o meno il verso di percorrenza prefissato, $\pm$ la lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{QP}$ (cfr. Fig. 32) .*

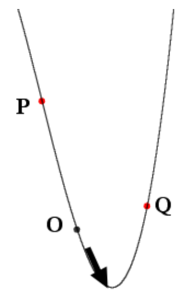


FIGURE 32. IL punto O è l'origine, la freccia indica il verso di percorrenza. In questo caso $s(P) - s(Q) = -L(\overset{\frown}{QP})$

Ritornado all'esempio precedente abbiamo $s(Bologna) = 400$ e $s(Napoli) = -150$, quindi

$$s(Bologna) - s(Napoli) = 550.$$

Il fatto che il numero risulti positvo vuol dire che andando da Napoli a Bologna percorro 550 km. in direzione nord. Invece da $s(Firenze) = 250$ e $s(Milano) = 600$ ricavo

$$s(Firenze) - s(Milano) = -350;$$

dunque andando da Milano a Firenze percorro 350 km. in direzione sud, perché il numero è negativo.

3.3. **Come calcolare l'ascissa curvilinea.** Supponiamo di aver stabilito sulla curva C un'ascissa curvilinea. Ovviamente *il calcolo* dell'ascissa curvilinea di un certo punto è un problema che si pone nel momento in cui possediamo una descrizione della curva. Supponiamo allora di aver descritto la curva come traiettoria di un punto $P(t)$. La seguente proposizione dice che per calcolare l'ascissa curvilinea di un punto $P(t_1)$ basta calcolare l'integrale $\int_{t_0}^{t_1} ||\frac{dP}{dt}||dt$. Nell'enunciato ci sono alcune precisazioni importanti, evidenziate in neretto.

Proposizione 3.3. *Sia assegnato un sistema di ascisse curvilinee sulla curva C e supponiamo che* **essa abbia tangente in ogni punto e che essa dipenda con continuità dal punto**. *Supponiamo inoltre che la curva sia descritta dal moto di un punto $P(t)$,* **moto che avviene nel verso prefissato di percorrenza**. *Allora* **esiste un istante t_0 in cui il punto passa per** *O (cioè $P(t_0) = O$) e*

$$s(P(t_1)) = \int_{t_0}^{t_1} ||\frac{dP}{dt}||dt.$$

<u>Dimostrazione</u>. Se $t_0 < t_1$ allora, poiché $P(t)$ si muove secondo il verso prefissato, $P(t_1)$ viene dopo $P(t_0) = O$, quindi (cfr. Definizione 3.1),

$$s(P(t_1)) = L(\overset{\frown}{OP(t_1)}).$$

Sono soddisfatte le ipotesi del Teorema 2.2, pertanto

$$L(O\overset{\frown}{P}(t_1)) = \int_{t_0}^{t_1} ||\frac{dP}{dt}||dt.$$

Se invece $t_1 < t_0$, allora

$$\int_{t_0}^{t_1} ||\frac{dP}{dt}||dt = -\int_{t_1}^{t_0} ||\frac{dP}{dt}||dt;$$

e per il Teorema 2.2

$$-\int_{t_1}^{t_0} ||\frac{dP}{dt}||dt = -L(P(\overset{\frown}{t_1})O) = s(P(t_1)).$$

□

Vediamo un'applicazione di questa proposizione calcolando l'ascissa curvilinea di una spirale logaritmica.

Esempio 3.4. Consideriamo la spirale logaritmica S definita da (cfr. Esercizio 2.12)

$$r(t) = e^t.$$

Come sappiamo $P(t) = \big(e^t \cos(t), e^t \sin(t)\big)$ si muove sulla spirale. Scegliamo

$$O := P(0) = (1, 0).$$

L'ascissa curvilinea è

$$s(P(t)) = \int_0^t ||\frac{dP}{dt}||dt = \sqrt{2}e^t - \sqrt{2}.$$

4. Velocità

4.1. **Velocità media.** Presentiamo la nozione di velocità media ed una formula per calcolarla.

Come noto la velocità è il rapporto tra spazio percorso e tempo impiegato; in particolare se ho fatto 210 km. in 3 ore vuol dire che sono andato mediamente a $210/3 = 70$ km./h. Precisamente:

Definizione 4.1. *La velocità media v_m in un certo intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ è il rapporto tra lo spazio percorso nell'intervallo e il tempo $t_2 - t_1$ impiegato.*

È importante notare che lo spazio percorso non è in generale uguale alla lunghezza dell'arco che congiunge il punto di partenza con il punto d'arrivo. Ad esempio se vado, lungo la via Emilia, da Parma a Piacenza e poi torno a Fidenza sempre per la stessa strada, l'arco di curva (cioè il tratto di via Emilia) tra Parma e Fidenza è molto più breve dell'intero percorso. Lo spazio percorso coincide con l'arco che congiunge il punto di partenza con quello d'arrivo solo se il moto avviene sempre nello stesso verso.

Per semplificare conviene supporre che **il punto $\mathbf{P(t)}$ percorra la curva** C **sempre nello stesso verso**. Allora, fissato un sistema di ascisse sulla curva, risulta che, nell'intervallo tra gli istanti t e t', il punto percorre l'arco che congiunge $P(t)$ a $P(t')$. La lunghezza di questo percorso è (cfr. Proposizione 3.2)

$$L(P(t)\overset{\frown}{P}(t')) = |s(P(t')) - s(P(t))|.$$

Per semplificare la formula, fissato il moto di $P(t)$, scriveremo semplicemente $s(t)$, invece di $s(P(t))$, vale a dire $s(t)$ è l'ascissa curvilinea di $P(t)$.

Dunque la velocità media è data da:

$$v_m = \frac{\text{spazio}}{\text{tempo}} = \frac{L(P(t)\overset{\frown}{P}(t'))}{|t' - t|} = |\frac{s(t') - s(t)}{t' - t}|.$$

Riassumendo

Proposizione 4.2. *Assumiamo, come detto, che il punto $P(t)$ percorra la curva sempre nello stesso verso. La velocità media nell'intervallo tra gli istanti t e t' è:*

$$v_m = |\frac{s(t') - s(t)}{t' - t}|.$$

Vediamo un'applicazione di questa Proposizione:

Esercizio 4.3. *Consideramo il moto definito da*

$$P(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t)).$$

Calcolare la velocità media nell'intervallo tra gli istanti t e t'. (Suggerimento: il punto percorre una spirale logaritmica per la quale sappiamo che l'ascissa curvilinea è (cfr. Esercizio 3.4) $s(t) = \sqrt{2}e^t - \sqrt{2}$)

Soluzione. Usando la formula della Proposizione 4.2 otteniamo:

$$v_m = |\frac{s(t') - s(t)}{t' - t}| = \sqrt{2}\,|\frac{e^{t'} - e^t}{t' - t}|.$$

4.2. **Velocità istantanea. La definizione.** Discutiamo la nozione di velocità istantanea, per giustificare intuitivamente la Definizione 4.4.

Se il tachimetro dell'auto, in un certo istante t_0 segna 60 km./h., noi riteniamo che l'auto abbia in quell'istante quella velocità. Il tachimetro utilizza due dati: il numero di giri delle ruote al minuto (supponiamo ad esempio 1000 giri/min.) e la lunghezza della circonferenza dei pneumatici (diciamo ad es. 1 m.); dunque in quel minuto l'auto percorre 1000 m., cioè 1 km.; dunque a quella velocità, in un ora, percorrerebbe 60 km.

Se effettivamente il tachimetro utilizza il numero di giri nel minuto immediatamente precedente all'istante t_0, esso in realtà ci fornisce la velocità media in quel minuto, pari appunto a 60 km./h.

Se stiamo accelerando, allora, nei 10 sec. (pari a 1/6 di min.) che precedono l'istante t_0, il numero di giri delle ruote sarà maggiore di $1000/6 \simeq 166$; per esempio 200. Questo corrisponde a 1200 giri/min. ed a una velocità media di 72 km./h nell'intervallo $[t_0 - 10sec., t_0]$.

E nel secondo che precede l'istante t_0 i giri delle ruote saranno maggiori di $200/10 = 20$; ad esempio 25. Questo corrisponde a 25 m. percorsi in quel secondo e dunque ad una velocità media[7] di 90 km./h. nell'intervallo $[t_0 - 1sec., t_0]$.

Come si comprende da questo discorso, se disponessimo di una successione di tachimetri T_n, ciascuno dei quali misura il numero di giri in un intervallo di $1/10^n$ min., otterremmo da questi tachimetri le velocità medie $v_m(n)$ in intervalli di tempo sempre più piccoli della forma $[t_0 - 10^{-n}sec., t_0]$. Queste velocità potrebbero essere tutte diverse tra loro; ad esempio se nel minuto precedente a t_0 accelero, allora $\cdots < v_m(n) < v_m(n+1) < \ldots$.

Dunque è falso che un tachimetro indichi la velocità in un certo istante t_0, piuttosto la velocità all'istante t_0 dovrebbe essere *il limite delle velocità medie calcolate in intervalli sempre più piccoli e immediatamente precedenti l'istante t_0.*

In conclusione, prima di formulare una definizione precisa di velocità istantanea, conviene fare le seguenti osservazioni.

a) I tachimetri potrebbero anche misurare il numero dei giri in intervalli immediatamente successivi all'istante t_0; in questo caso fornirebbero il dato relativo a t_0 con un po' di ritardo, ma questo poco ci importa.

Dunque siamo interessati alla velocità media v_m negli intervalli tra t_0 e $t_0 + h$ con $|h| \neq 0$ piccolo (ma h può essere positivo o negativo). Tale velocità media è

$$v_m = \left|\frac{s(t+h) - s(t)}{h}\right|$$

(sia per h positivo che negativo) e dunque la velocità all'istante t_0 sarebbe

$$\lim_{h\to 0} \left|\frac{s(t+h) - s(t)}{h}\right|.$$

b) Indipendentemente dal segno di h, la quantità

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

è positiva o negativa a seconda che il moto del punto $P(t)$ avvenga nel verso delle ascisse curvilinee o nel verso opposto[8]. Quindi il segno di

$$\lim_{h\to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

fornisce informazione circa il verso del moto.

c) Fissato un istante t_0, a meno che il punto non compia infinite oscillazioni avanti e indietro per la curva, vicino all'istante t_0 (cosa fisicamente impossibile), certo in un piccolo intervallo $[t_0, t_0 + \epsilon]$ il punto si muoverà in un certo verso sulla curva e lo stesso dicasi per un intervallo $[t_0 - \epsilon, t_0]$. (Questo non esclude che in t_0 ci sia un'inversione di marcia, sto solo escludendo che vicino a t_0 ci siano infinite inversioni di marcia).

Poichè, per la velocità all'istante t_0, ci interessano solo intervalli di tempo molto piccoli, non è più necessario supporre, come richiesto per la velocità media (cfr.

[7] 25 m. in 1 secondo vogliono dire $25 \times 60 \times 60 = 90000$ metri in un'ora.

[8] Se $P(t)$ si muove nello stesso (risp. opposto) verso delle ascisse, questo vuol dire che $s(t)$ cresce (risp. decresce) al crescere di t, quindi il numeratore $s(t+h) - s(t)$ ha il segno di h (risp. segno opposto). Pertanto il rapporto $\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$ è positivo (risp. negativo) qualunque sia $h \neq 0$.

Proposizione 2.6) che il moto avvenga sempre nello stesso verso, ma dobbiamo escludere solo la patologia di infinite oscillazioni, per altro fisicamente impossibili.

Pertanto possiamo dare la seguente

Definizione 4.4. *Sia assegnato il moto $P(t)$ di un punto su di una curva C. Fissato un sistema di ascisse sulla curva, la* velocità istantanea $v(t)$ *all'istante t è*

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \frac{ds}{dt}(t).$$

4.2.1. *Velocità uguale a* 0. Se in un certo intervallo temporale la velocità è nulla allora il punto è fermo. Matematicamente: "$v = ds/dt$ è nulla in un certo intervallo" vuol dire che la funzione $s(t)$ in quell'intervallo è costante, ma se l'ascissa $s(t)$ del punto $P(t)$ non cambia, vuol dire che il punto è fermo.

Se invece v si annulla in un certo istante t_0 (ma non in tutti gli istanti vicini), allora $ds/dt = 0$ è nulla in t_0 e t_0 potrebbe essere un massimo o un minimo relativo, oppure un punto di flesso.

Se t_0 è un punto di massimo o di minimo relativo vuol dire che in quell'istante il punto $P(t)$ inverte il senso di marcia.

Ad esempio se $s(t_0)$ è massimo relativo e $0 < s(t_0)$, vuol dire che per $t \simeq t_0$ vale $0 < s(t) \leq s(t_0)$; cioè i punti $P(t)$ sono più vicini a O di quanto non sia $P(t_0)$; dunque prima di t_0 mi stavo allontanando da O nel verso positivo e all'istante t_0 inverto la marcia dirigendomi verso O.

Se invece $s(t_0)$ è massimo relativo e $s(t_0) < 0$, allora per $t \simeq t_0$ vale $s(t) \leq s(t_0) < 0$. Dunque prima di t_0 mi sto avvicinando all'origine O e in t_0 inverto la marcia per tornare ad allontanarmi nel verso negativo.

Aprendo il filmato di Fig.1 33 si vede un punto rosso che si muove su una retta

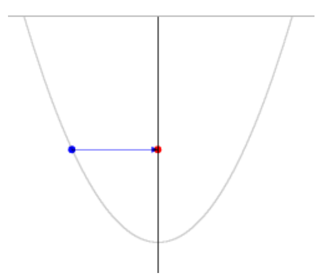


FIGURE 33

verticale prima in un verso poi nel verso opposto. Nell'istante in cui inverte la marcia la velocità è necessariamente nulla, tuttavia il punto non è fermo. Per sincerarsene si osservi che il punto rosso è la proiezione ortogonale sulla retta verticale del punto blu che si muove su una parabola. Anche ad occhio appare evidente che il punto blu non si ferma e dunque lo stesso fa il punto rosso.

Per avere un esempio di flesso consideriamo il filmato della Fig. **??** in cui si vede un punto rosso che si muove su una retta verticale. È evidente che il punto prima

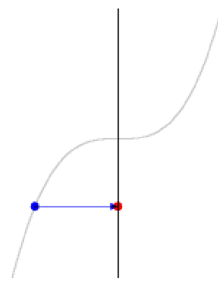


Figure 34

decelera poi accelera. In un certo istante ha in verità velocità nulla, ma guardando al moto del punto blu (che si muove sulla cubica $y = x^3$ e di cui il punto rosso è la proiezione rtogonale) ci si rende ben conto che il punto rosso non si ferma.

Si noti che, come risulta anche dalla discussione fatta, se la velocità si annulla all'istante t_0, ma non in un intervallo, il punto non si ferma. In altri termini se nei pressi di uno stop il vostro moto è $x(t) = 3t^2$, anche se avete frenato fino ad avere velocità 0 allo stop, subito dopo accelerate. Poiché non vi siete fermati vi possono multare!

4.2.2. *Velocità identicamente uguale ad* 1. Fissato un sistema di ascisse curvilinee su una curva consideriamo il moto $P(t)$ per cui $s(t) = t$. Questo significa che in ogni istante t il punto $P(t)$ è il punto della curva con ascissa t. (Ad esempio parto da Roma a mezzanotte - cioè alle 00:00 - sull'Autostrada del Sole in direzione nord con la velocità costante di 60 km./h. Al minuto 27 del mio viaggio, cioà alle 00:27 sono al chilometro 27. Ho la velocità di 1km./min.). Dunque $v = ds/dt = 1$ e la velocità di $P(t)$ è costanemente 1.

Poiché in questo caso l'ascissa curvilinea coincide con il tempo, **quando consideriamo un moto che avviene a velcoità costante 1 scriveremo $P(s)$ invece di $P(t)$.** (Si tratta di un semplice promemoria, infatti poiché il tempo è una variabile posso indicarlo con una qualunque lettera).

Infine se la velocità del moto $Q(t)$ è $v = ds/dt = 1$, allora $s(t) = t + c$, quindi il moto di $Q(t)$ differisce da quello di $P(s)$ solo di una costante c, vale a dire i due punti si muovono allo stesso modo, ma passano per ciascun punto della curva ad una certa distanza di tempo, precisamente dopo un lasso di tempo c.

4.3. **Il vettore velocità.** In questo paragrafo consideriamo il vettore dP/dt. Come tutti i vettori è caratterizzato da *direzione, verso e lunghezza*. Dimostriamo la seguente

Proposizione 4.5. *Sia $P(t)$ un punto che si muove su una curva C. Allora*

(i) *la direzione di dP/dt all'istante t è la direzione della retta tangente alla curva C nel punto $P(t)$;*

(ii) *il verso di dP/dt all'istante t è quello del moto in quell'istante;*

(iii) *la lunghezza $||dP/dt||$ all'istante t è pari al valore assoluto $|v(t)|$ della velocità in quell'istante.*

Dimostrazione. L'affermazione (i) è il contenuto del Teorema 1.19. Il Teorema 1.20 afferma che la retta tangente è la posizione limite della retta che congiunge $P(t)$ a $P(t+h)$ per $h \to 0$. Il vettore $\frac{P(t+h)-P(t)}{h}$ è vettore direzione di questa retta e il suo verso è da $P(t)$ a $P(t+h)$ se h è positivo, da $P(t+h)$ a $P(t)$ se h è negativa (cioè quando $P(t+h)$ precede $P(t)$). Dunque ha sempre verso prossimo a quello del moto. Passando al limite per $h \to$ otteniamo

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{P(t+h)-P(t)}{h},$$

dunque il verso di dP/dt è quello del moto.

Infine consideriamo un sistema di ascisse curvilinee sulla curva e sia $s(t)$ l'ascissa curvilinea di $P(t)$. Consideriamo poi il punto $Q(s)$ che si muove a velocità 1 (e che ha ascissa s). Allora all'istante t il punto $P(t)$ ha ascissa $s(t)$ e dunque coincide con $Q(s(t))$. Dunque

$$P(t) = Q(s(t));$$

e per la regola della derivata della composta:

$$\frac{dP}{dt}(t) = \frac{dQ}{ds}(s(t)).\frac{ds}{dt}(t),$$

cioè

$$dP/dt = dQ/ds.v$$

quindi

$$||dP/dt|| = |v|||dQ/dt|| = |v|.$$

□

In ragione di queste affermazioni diamo la seguente

Definizione 4.6. *Sia $P(t)$ un punto che si muove su una curva C. Il* vettore velocità*, che indicheremo con $\vec{V}(t)$, è, per definizione, il vettore dP/dt all'istante t.*

4.4. **Il versore tangente.** In ogni punto P di una curva C (supponendo che in quel punto esista la retta tangente) esistono due versori (cioè vettori di lunghezza 1) che hanno la direzione della retta tangente, opposti uno all'altro. in Fig. 35 vediamo nei punti P e Q della curva i due possibili versori tangenti. Per fare una

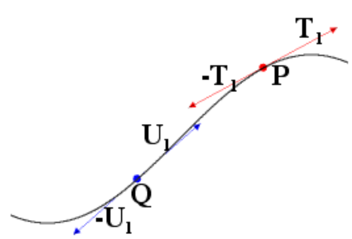


FIGURE 35

scelta in ciascun punto di un unico versore tangente, in modo che la scelta sia in qualche modo coerente nei diversi punti, conviene descrivere la curva come la traiettoria di un punto $P(t)$ in moto, moto che avviene sempre nello stesso verso (in modo che il punto non ripassi per la stessa posizione con versi opposti) e con velocità sempre diversa da 0 (in modo che il vettore velocità $\vec{V} = dP/dt$ sia sempre $\neq 0$. Possiamo allora definire

$$\vec{T}(t) := \frac{1}{||\vec{V}(t)||}\vec{V}(t);$$

e $\vec{T}(t)$ sarà il versore tangente nel punto $P(t)$.

Se in particolare il punto si muove con velocità 1, e dunque come convenuto scriviamo $P(s)$, allora più semplicemente

$$\vec{T}(s) := \frac{dP}{ds}(s).$$

Per comprendere subito l'interesse del versore tangente, consideriamo una curva C, descritta dal moto del punto $P(s)$, che ha velocità costante 1. Possiamo applicare il versore tangente $\vec{T}(s)$ nel punto $P(s)$, oppure applicarlo nell'origine. In quest'ultimo caso il punto $T(s)$, i.e. il secondo estremo del versore, descriverà un'arco di circonferenza di raggio 1 e centro nell'origine. In Fig. 36

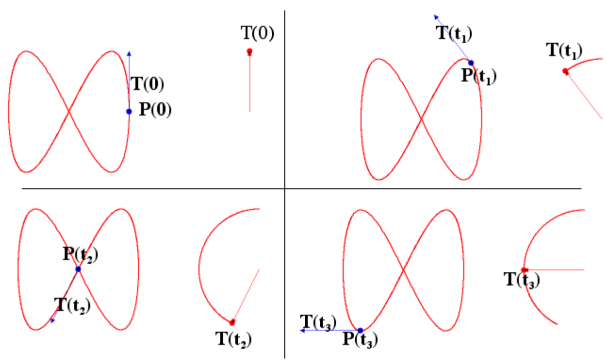


FIGURE 36

vediamo 4 immagini successive agli istanti $0, t_1, t_2, t_3$. Inizialmente il punto curva verso sinistra e il versore tangente si muove in verso antiorario. All'istante t_2 il punto comincia a girare verso destra (la curva ha un flesso) e contestualmente il versore tangente inverte il proprio senso di marcia e comincia a girare in senso orario. Poi, all'istante t_3, mentre il punto continua a girare verso destra, il versore tangente continua a muoversi in senso orario e sta ripercorrendo lo stesso arco di circonferenza percorso prima.

La conclusione è che il moto del versore tangente, poiché il punto $P(s)$ si muove a velocità 1, dipende solo dalla forma della curva e descrive quanto la curva gira verso sinistra o verso destra.

L'unica avvertenza è che il versore tangente dipende dalla scelta di un verso di percorrenza sulla curva e quindi dalla curva stessa (cioè dalla geometria della curva) è determinato solo a meno del segno.

5. Curvatura.

Veniamo al concetto più importante nella teoria delle curve.

5.1. **Curvatura media.**

Definizione 5.1. *La* curvatura media *di un arco* $\widehat{AB}$ *di curva la indicheremo con* $k_m(\widehat{AB})$ *ed è così definita. Sia* $P(s)$ *un punto che percorre l'arco a velocità unitaria*[9] *e sia* $\vec{T} = dP/ds$ *il versore tangente così determinato; sia* θ *l'angolo tra i versori tangenti* $\vec{T}_A$ *e* $\vec{T}_B$ *negli estremi dell'arco, allora*

$$k_m(\widehat{AB}) := \frac{\theta}{L(\widehat{AB})}.$$

In Fig. 37 , a titolo d'esempio, si vede un arco di curva $\widehat{AB}$, i versori $\vec{T}_A$ e $\vec{T}_B$

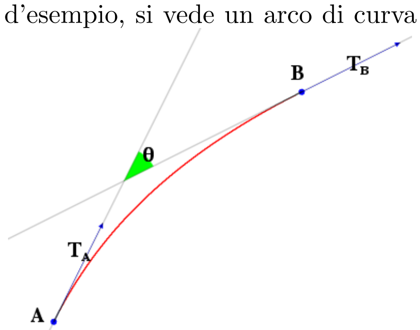


FIGURE 37

e l'angolo θ da essi formato. La curvatura media $k_m(\widehat{AB})$ è il rapporto tra quanto ha *girato* la curva e quanto spazio è stato necessario per girare.

Ma ora consideriamo i seguenti esempi.

Esempio 5.2. Consideriamo la spirale in Fig. 38 . I versori tangenti $\vec{T}_A$ e $\vec{T}_B$

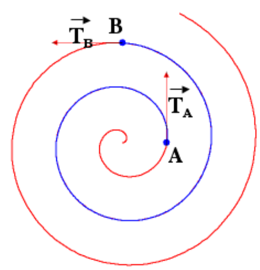


FIGURE 38

formano un angolo di $\pi/2$, mentre andando da A a B il versore tangente $\vec{T}$ ha evidentemente girato di $2\pi + \frac{\pi}{2}$. È chiaro che, per la curvatura media dell'arco $\widehat{AB}$, in contrasto con la Definizione 5.1, è di quest'ultimo angolo che si dovrebbe tener conto.

---

[9] Ciò serve a definire in modo coerente il versore tangente negli estremi dell'arco. Tuttavia la definizione non dipende dalla scelta del moto $P(s)$, infatti considerando un altro punto $Q(s)$ che percorre la curva a velocità unitaria, al più i versori $\vec{T}_A$ e $\vec{T}_B$ cambieranno **entrambi** di verso e dunque non cambia l'angolo θ da essi formato.

Esempio 5.3. In Fig. 39 si vede un arco $\overset{\frown}{AB}$ del grafico della funzione seno. I versori $\vec{T}_A$ e $\vec{T}_B$ hanno la stessa direzione e verso, dunque l'angolo θ da essi formato è nullo. Tuttavia il versore tangente da A a C ha girato di $\pi/4$ a sinistra e da C a B di $\pi/4$ q destra. In contrasto con la Definizione 5.1, sembrerebbe corretto considerare la somma $\pi/2$ di questi due angoli per la curvatura media dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ invece che l'angolo $\theta = 0$.

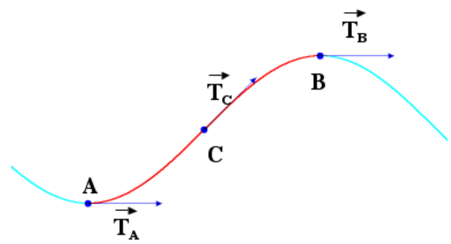


FIGURE 39

Questi due esempi mettono in luce che la Definizione 5.1 presenta dei problemi. In realtà siamo interessati al concetto di curvatura media solo per piccoli archi, archi in cui possiamo supporre il versore tangente si muova sempre verso sinistra o sempre verso destra e compia un angolo piccolo. Con questa precisazione escludiamo i casi dei due esempi precedenti.

5.2. **Curvatura.**

Definizione 5.4. *Sia P un punto di una curva C. Preso un punto Q della curva vicino a P, consideriamo la curvatura media dell'arco $\overset{\frown}{PQ}$. Definiamo la curvatura $k(P)$ nel punto P come limite della curvatura media al tendere di Q a P; cioè*

$$k(P) := \lim_{Q \to P} k_m(\overset{\frown}{PQ}).$$

Esercizio 5.5. *Calcolare la curvatura di un punto P di una circonferenza di raggio R.*

Soluzione. Si tratta innanzi tutto di calcolare la curvatura media di un piccolo arco $\overset{\frown}{PQ}$ di circonferenza. Consideriamo la Fig. 40. Pioché il versore $\vec{T}_P$ è ortogonale al raggio OP e il versore $\vec{T}_Q$ è ortogonale al raggio OQ, l'angolo formato dai due versori è uguale all'angolon θ formato dai due raggi. Pertanto

$$k_m(\overset{\frown}{PQ}) = \frac{\theta}{L(\overset{\frown}{PQ})}.$$

Ma se θ è la misura in radianti dell'angolo, allora il corrispondente arco $\overset{\frown}{PQ}$ misura $R\theta$, quindi $R\theta = L(\overset{\frown}{PQ})$ e dunque

$$k_m(\overset{\frown}{PQ}) = \frac{\theta}{R\theta} = \frac{1}{R}.$$

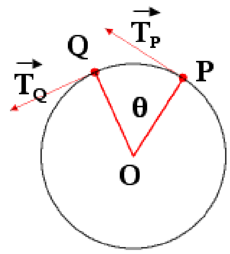


FIGURE 40

Dunque la curvatura media di un arco di circonferenza di raggio R è sempre pari ad $1/R$. In particolare
$$k(P) = \lim_{Q \to P} k_m(\overset{\frown}{PQ}) = \frac{1}{R}.$$
Questa formula dice che la curvatura in un punto di una circonferenza di raggio R è pari a $1/R$ e dunque non dipende dal punto. In altre parole *ogni circonferenza ha curvatura costante pari al reciproco del raggio.*

5.3. **Calcolo della curvatura.** Dimostriamo una formula che consente di calcolare la curvatura, conoscendo l'equazione del moto di un punto che percorre la curva a velocità 1.

Teorema 5.6. *Sia data una curva C e sia $P(s)$ un punto che percorre la curva a velocità unitaria. Riesce*
$$k(P(s)) = ||\frac{dT}{ds}(s)||.$$
<u>Dimostrazione</u>. Come sappiamo
$$k(P) = \lim_{Q \to P} k_m(\overset{\frown}{PQ}).$$
Ora se Q è vicino a $P(s)$, esso sarà della forma
$$Q = P(s+h),$$
dove h è un numero piccolo in valore assoluto. Dunque
$$k(P(s)) = \lim_{h \to 0} k_m(\overset{\frown}{P(s)P(s+h)}).$$
Ricordo che
$$k_m(\overset{\frown}{P(s)P(s+h)}) = \frac{\theta}{L(\overset{\frown}{P(s)P(s+h)})} = \frac{\theta}{|h|},$$
perché, essendo il moto di $P(s)$ a velocità unitaria la lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{P(s)P(s+h)}$ è esattamente pari al tempo impiegato a percorrerlo, cioè $|h|$. Dunque
$$k(P(s)) = \lim_{h \to 0} \frac{\theta}{|h|}. \tag{5.1}$$
Consideriamo i versori $\vec{T}(s)$ e $\vec{T}(s+h)$ applicati nell'origine (cfr. Fig. 41). Essi formano un angolo θ e i punti $T(s)$ e $T(s+h)$, che stanno sulla circonferenza

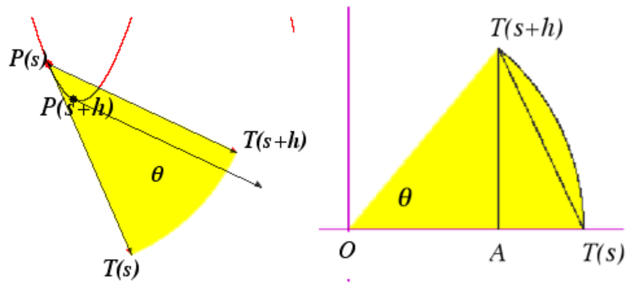


FIGURE 41. a - b

di centro O e raggio 1, determinano su di essa un arco $T(s)\widehat{T(s+h)}$ che è lungo esattamente θ. Dunque dalla Fig. 41b

$$\sin(\theta) = ||\overline{AT(s+h)}|| < ||\overline{T(s)T(s+h)}|| < L(T(s)\widehat{T(s+h)}) = \theta;$$

e dividendo per θ:

$$\frac{\sin(\theta)}{\theta} < \frac{||T(s+h) - T(s)||}{\theta} < \frac{\theta}{\theta} = 1.$$

Passiamo al limite per $h \to 0$, osservando che quando $h \to 0$ anche l'angolo θ tende a 0 e che $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$. Per il teorema dei due carabinieri concludiamo che

$$\lim_{h\to 0} \frac{||T(s+h) - T(s)||}{\theta} = 1. \tag{5.2}$$

D'altra parte

$$\frac{||T(s+h) - T(s)||}{|h|} = \frac{||T(s+h) - T(s)||}{\theta} \frac{\theta}{|h|}$$

e, passando al limite, dalla formula (5.2) segue

$$\frac{dT}{ds} = \lim_{h\to 0} \frac{||T(s+h) - T(s)||}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{\theta}{|h|}. \tag{5.3}$$

Confrontando le equazioni (5.1) e (5.3) si ha la tesi. □

Osservazione 5.7. a) Come abbiamo già osservato nella sezione 4.5 il moto del versore tangente dipende dalla forma della curva (si torni a considerare la Fig. 36). Poiché il moto di $P(s)$ avviene a velocità unitaria, la velocità con cui il punto $T(s)$ ruota sulla circonferenza unitaria verso sinistra o verso destra, dipende da quanto è accentuata la curvatura. Precisamente se la curvatura è grande $T(s)$ si muove velocemente, se la curvatura è piccola, allora $T(s)$ si muove lentamente. Dunque *la velocità con cui $T(s)$ si muove è strettamente correlata alla curvatura.*

b) Abbiamo anche visto (cfr. Proposizione 4.5(iii)) che il valore assoluto $|v|$ della velocità scalare di un punto $P(t)$ è pari a $||dP/dt||$. Mutatis mutandis *il valore assoluto della velocità scalare con cui $T(s)$ si muove sulla circonferenza unitaria è $||d\vec{T}/ds||$.*

Mettendo insieme le due cose la formula $k = ||d\vec{T}/ds||$ dovrebbe apparire naturale.

Possiamo dunque affermare che il significato del Teorema 5.6 è il seguente:

se un punto $P(s)$ si muove su una curva a velocità unitaria la curvatura $k(P(s))$ è il valore assoluto della velocità scalare $||d\vec{T}/ds||$ del punto $T(s)$ che si muove sulla circonferenza unitaria.

5.4. **Versore normale.**

Definizione 5.8. *Sia data una curva C. Il versore normale (normale alla curva in un suo punto) $\vec{N}$ è così definito:*

$$\vec{N} = \frac{1}{||\frac{d\vec{T}}{ds}||}\frac{d\vec{T}}{ds}.$$

A proposito di qesta definizione sono opportune alcune precisazioni.
a) Innanzi tutto supponiamo che la curva sia descritta dal moto di un punto $P(s)$ che avviene a velocità unitaria, in modo che sia prescelto un verso e sia ben definito il versore tangente $\vec{T}(s)$ in tutti i punti della curva. La Definizione 2.6 dice che, dividendo il vettore $\frac{d\vec{T}}{ds}(s)$ per la sua lunghezza, troviamo il versore $\vec{N}(s)$ che perciò ha la stessa direzione e verso di $\frac{d\vec{T}}{ds}(s)$, ma lunghezza 1.
b) Attenzione: il versore $\vec{N}(s)$ è ben definito se e solo se il vettore $\frac{d\vec{T}}{ds}(s) \neq 0$.
c) Poiché il punto $T(s)$ si muove sulla circonferenza unitaria, il suo vettore velocità $\frac{d\vec{T}}{ds}(s)$ è perpendicolare al raggio cioè al versore $\vec{T}(s)$ (cfr. Fig. 40). Pertanto il versore $\vec{N}(s)$, che ha la stessa direzione di $\frac{d\vec{T}}{ds}(s)$, è a sua volta perpendicolare a $\vec{T}(s)$ (cioè alla tangente alla curva) e per questo motivo si chiama versore normale.
d) Infine la lunghezza del vettore $\frac{d\vec{T}}{ds}(s)$ è, per il Teorema 5.6, la curvatura $k = k(P(s))$ della curva nel punto $P(s)$. Pertanto $\vec{N} = \frac{1}{k}\frac{d\vec{T}}{ds}$, vale a dire $k\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{ds}$.
Riassumendo

Proposizione 5.9. *Il versore normale $\vec{N}(s)$ in un punto $P(s)$ della curva è ben definito solo se la curvatura $k(P(s)) \neq 0$. Il versore $\vec{N}$ è perpendicolare alla direzione tangente; esso ha la stessa direzione e verso del vettore $d\vec{T}/ds$ e lunghezza pari ad 1. Inoltre*

$$k\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{ds},$$

vale a dire il vettore $\frac{d\vec{T}}{ds}$ è normale alla curva e la sua lunghezza è pari alla curvatura.

In Fig. 42 vediamo tre punti $P(s_0), P(s_1)$ e $P(s_2)$ di una curva (il grafico del

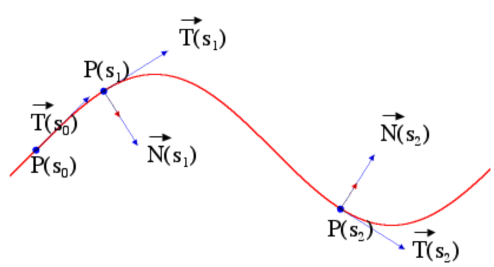


FIGURE 42

seno). Nel punto $P(s_1)$ vediamo applicati il versore tangente $\vec{T}(s_1)$ e il versore normale $\vec{N}(s_1)$ ad esso perpendicolare; in rosso vediamo anche il vettore $\frac{d\vec{T}}{ds}(s_1) = k(P(s_1))\vec{N}(s_1)$. (Il fatto che questo vettore sia più piccolo dice che la curvatura $k(P(1)) < 1$). Le stesse cose vediamo nel punto $P(s_2)$. Mentre nel punto $P(s_0)$ è rappresentato solo il versore tangente $\vec{T}(s_0)$, perché in questo la curvatura è nulla e non è percioò definito il versore normale.

5.5. **Comportamento della curva in ragione della curvatura.** Osserviamo ora le Figg. 43a. Nel punto $P(s_1)$ il piano è diviso dalla retta tangente in due

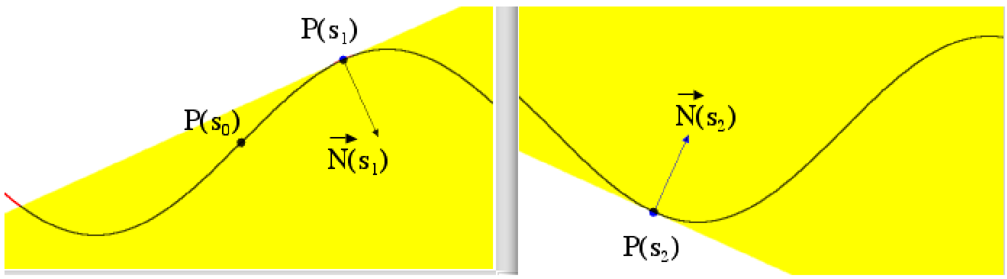


FIGURE 43. a - b

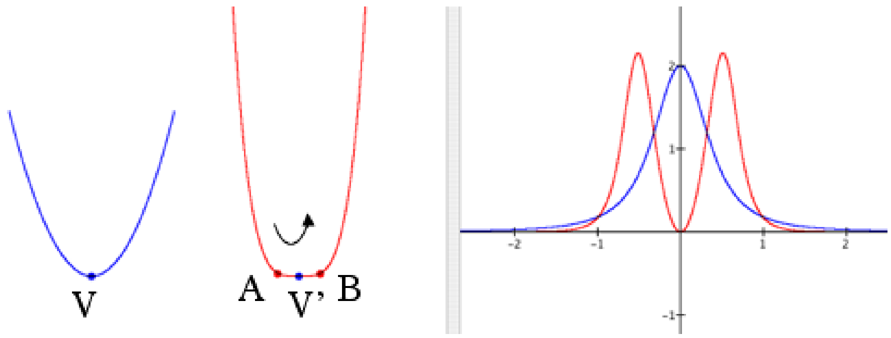
semipiani, in uno di essi giace il versore normale $\vec{N}(s_1)$ e tutto un arco di curva che contiene il punto $P(s_1)$, il versore normale giace dalla parte della concavità della curva. Come si vede in Fig. 43b, nel punto $P(s_2)$ avviene lo stesso. Questo è un fatto generale come stabilisce la seguente

Proposizione 5.10. *Sia P un punto di una curva C in cui la curvatura k è $\neq 0$. La tangente nel punto P divide il piano in due semipiani, il versore normale $\vec{N}_P$ nel punto P giace in uno di questi ed esiste tutto un arco della curva C che contiene il punto P che giace nello stesso semipiano. Dunque il versore normale $\vec{N}_P$ giace dalla parte della convessità della curva.*

La dimostrazione è un po' tecnica e la omettiamo. È importante notare che mentre il verso del versore tangente $\vec{T}$ dipende dal verso con cui decidiamo di percorrere la curva, il verso del versore normale $\vec{N}$ è indipendente da ciò, perché esso è sempre diretto verso la concavità.

Domandiamoci cosa succede nel caso che la curvatura sia nulla. Come si vede dal filmato in Fig. 43 quando c'è un punto di flesso (ad es. il punto $P(s_0)$ in Fig. 42), vale a dire la curva cambia direzione (prima gira a sinistra poi a destra o viceversa), il punto $T(s)$ che si muove sulla circonferenza unitaria, cambia verso di rotazione (da antiorario ad orario oppure viceversa), vale a dire inverte il proprio senso di marcia sulla circonferenza e quindi il suo vettore velocità $d\vec{T}/ds$ necessariamente in quell'istante si annulla (altrimenti cambierebbe bruscamente il proprio verso contraddicendo il fatto che dipende con continuità da s). E dunque la curvatura $k = ||d\vec{T}/ds||$ è in quell'istante nulla.

Esiste tuttavia un'altra possibilità che dipende in effetti da ragioni quantitative. Consideriamo le curve in Fig. 44a. Quella blu è una parabola di equazione $y = x^2$, mentre quella rossa è una quartica di equazione $y = x^4$. I grafici di Fig. 44b sono



i grafici delle curvature. Come si vede dal grafico blu la curvatura della parabola ha un massimo nel vertice V e diminuisce man mano che ci si allontana dal vertice. Mentre la quartica ha due punti A e B di massima curvatura; muovendoci da questi punti la curvatura diminuisce, tende a zero se ci allontaniamo verso l'infinito, mentre raggiunge il valore 0 in V'. Questo significa che muovendoci lungo la quartica, ad es. da sinistra verso destra (come indicato dalla freccia), la curva gira sempre verso sinistra, quindi il versore tangente $\vec{T}$ si muove sulla circonferenza unità sempre in senso antiorario. In Fig. 45 (ma conviene aprire il filmato) vediamo, a sinistra, il

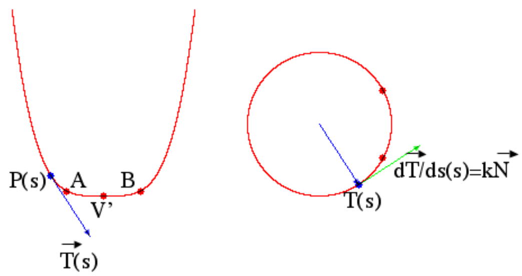


Figure 45

punto $P(s)$ che si muove sulla quartica e il suo versore tangente $\vec{T}(s)$; mentre a destra è rappresentato il versore $\vec{T}(s)$ applicato nell'origine e il suo vettore velocità $d\vec{T}/ds$. Si nota che quando $P(s)$ raggiunge i punti A e B di massima curvatura il punto $T(s)$ si sta muovendo con velocità massima (la curvatura, lo ripeto ancora è $||d\vec{T}/ds||$) e invece quando $P(s)$ passa per V' il punto $T(s)$ ha velocità 0. Queste osservazioni sulla velocità di $T(s)$ si possono fare sia osservandone il movimento nel filmato, sia osservando la lunghezza del vettore $d\vec{T}/ds$.

6. Accelerazione

La relazione (cfr. Proposizione 5.9)

$$\frac{d\vec{T}}{ds}(s) = k(s)\vec{N}(s)$$

consente di calcolare la curvatura, tuttavia ben raramente si ha disposizione un moto che avviene a velocità 1, come richiesto dalla formula. Le considerazioni necessarie a ricavare un metodo di più facile applicazione sono interessanti di per sè e dunque vale la pena di esporle.

6.1. **Stato di quiete e di moto rettilineo uniforme.** Uno degli aspetti fondamentali della rivoluzione, rispetto alle concezioni dell'antichità, attuata da Galileo e Newton, consiste nel considerare il moto rettilineo uniforme, cioè a velocità costante, alla stregua dello stato di quiete; così come in generale non andiamo ad indagare le ragioni per cui un corpo è fermo (a meno che non ci siano precisi motivi per farlo, come ad esempio il caso di un corpo posto su di un piano inclinato, che per attrito resti fermo) allo stesso modo non dobbiamo indagare il perché un corpo che si trova in moto rettilineo uniforme permanga in quel moto.

Questa concezione non corrisponde per nulla alle nostre percezioni, infatti una boccia che sia fatta rotolare in piano, prima o poi si ferma e constatiamo che la velocità che ha la boccia nel momento che lascia la nostra mano diminuisce fino all'arresto. Anzi la lunghezza del percorso dipende dalla velocità iniziale. (Tuttavia esperimenti più raffinati, che riducono grandemente l'attrito - ad esempio un disco lanciato su di un piano ghiacciato e levigato - consentono di verificare che per un certo tratto la velocità si mantiene inalterata). La comprensione dei moti viene mutata radicalmente; a titolo esemplificativo se ruotando il braccio lanciamo un sasso, esso compirà inizialmente un moto circolare solidalmente con la nostra mano, e nell'istante in cui lo lasciamo andare si dirigerà in direzione tangenziale a questa circonferenza, con la velocità che avevano mano e sasso in quell'istante; solo la forza di gravità, l'attrito con l'aria e l'urto con il terreno interverranno a modificarne e infine ad arrestare il moto.

Il moto è rettilineo se la tangente alla traiettoria è sempre la stessa, cioè se il vettore velocità $\vec{V}(t)$ ha direzione costante. Il moto è rettilineo uniforme se, in più, anche la velocità, si mantiene costante, cioè la lunghezza $||\vec{V}(t)||$ del vettore velocità è costante. Dunque *rettilineo + uniforme = il vettore velocità $\vec{V}(t)$ è costante.*

In particolare lo stato di quiete si ha quando $\vec{V}(t) = 0$. Questa osservazione consente di accumunare lo stato di quiete al moto rettilineo uniforme: sempre di vettore velocità costante si tratta e ciò spiega quanto dicevamo circa la concezione galileiana.

6.2. **Accelerazione e forza.** Un corpo che non si trova nè in stato di quiete, nè in stato di moto rettilineo uniforme, deve trovarsi soggetto a qualche perturbamento che causa il mutare nel tempo del vettore velocità $\vec{V}(t)$. Individuiamo una grandezza che misura la variazione del vettore velocità.

Definizione 6.1. *Il vettore accelerazione $\vec{A}(t)$ di un punto $P(t)$ in moto è:*

$$\vec{A}(t) := \frac{d\vec{V}}{dt}(t).$$

Ovviamente $\vec{V}(t)$ è costante se e solo se il vettore accelerazione $\vec{A}(t)$ è sempre nullo. Il perturbamento dello stato di quiete o di moto rettilineo uniforme è dovuto alla presenza di accelerazione.

Si osserva sperimentalmente che medesime cause producono su corpi di massa diversa effetti diversi. Precisamente l'accelerazione impressa ad un corpo è, a parità di causa, inversamente proporzionale alla sua massa m. A queste cause dell'accelerazione si dà il nome di forza. La relazione che lega la forza alla massa è

$$\vec{F} = m\vec{A}$$

Si noti che poiché l'accelerazione è un vettore e la massa uno scalare, anche la forza $\vec{F}$ è un vettore.

Teorema 6.2. Formula per l'accelerazione *Sia dato un punto $P(t)$ in moto. Allora*
$$\vec{A} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + kv^2\vec{N}$$

Dimostrazione. Fissiamo sulla traiettoria C percorsa da $P(t)$ un'ascissa curvilinea e, al solito, indichiamo con $s(t)$ l'ascissa del punto $P(t)$. Consideriamo poi sulla curva C il punto $Q(s)$ che ha ascissa s. Al variare di s il punto $Q(s)$ si muove sulla curva a velocità unitaria (cfr. 4.2.2) e, per ogni t,
$$Q(s(t)) = P(t)$$
perché i due punti hanno la stessa ascissa $s(t)$. Allora
$$\vec{V}(t) = \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}Q(s(t)) = \frac{dQ}{ds}.\frac{ds}{dt} = \vec{T}(s(t))v(t).$$
Dunque
$$\vec{A}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\vec{T}}{ds}.\frac{ds}{dt}.v(t) + \vec{T}(s)\frac{dv}{dt} = k(s)\vec{N}(s)v^2(t) + \frac{dv}{dt}\vec{T}(s).$$
□

Cerchiamo di capire cosa dice la formula: possiamo decomporre il vettore accelerazione $\vec{A}(t)$ all'istante t come somma di due vettori: una
$$\text{componente tangenziale } = \frac{dv}{dt}\vec{T}$$
che dipende dalla variazione della velocità e una
$$\text{componente normale } = kv^2\vec{N}$$
che dipende dalla curvatura e dal quadrato della velocità.

Supponiamo di tenere un sasso con una fune e di farlo ruotare a velocità costante. Il sasso descrive una circonferenza di curvatura $1/R$ dove R è la lunghezza della fune. La componente tangenziale è assente. Il versore $\vec{N}$ è diretto verso il centro (i.e verso la concavità della traiettoria), dunque la componente radiale $kv^2\vec{N}$del vettore $\vec{A}$ è sempre diretta verso il centro. Questo significa che per far ruotare il sasso dobbiamo esercitare una forza diretta (ovviamente) verso il centro (a trattenere il sasso) proporzionale al quadrato della velocità e inversamente proporzionale alla lunghezza della fune.

Se poi vogliamo aumentare la velocità dobbiamo esercitare una forza che non dipende dalla lunghezza della fune (tuttavia si osservi che stiamo misurando la velocità linearmente, se invece ragioniamo in termini di giri al minuto sarà più facile aumentare il numero di giri se la fune è corta, perché la circonferenza percorsa è piú breve e un piccolo aumento della velocità lineare può significare svariati giri al minuto in più).

7. Curvatura con segno

7.1. **La definizione.** L'idea è la seguente: in un punto P di una curva C definiamo la *curvatura con segno*
$$k^*(P) := \begin{cases} k(P) \text{ se nel punto } P \text{ la curva sta girando verso sinistra} \\ -k(P) \text{ se nel punto } P \text{ la curva sta girando verso destra} \end{cases}$$

Dunque la curvatura con segno $k^*(P)$ è positiva se sto girando verso sinistra e negativa se sto girando verso destra.

È banale osservare che se da casa, per andare dal tabaccaio, devo girare a sinistra, quando torno indietro girerò verso destra; perciò la curvatura con segno dipende dal verso di percorrenza, mentre la curvatura dipende solo dalla geometria della curva. Dunque per dare una definizione corretta bisogna enunciarla così

Definizione 7.1. *Fissato un verso di percorrenza su una curva C, la* curvatura con segno *$k^*(P)$ in un suo punto P è definita da:*

$$k^*(P) = \begin{cases} k(P) & \textit{se nel punto } P \textit{ la curva sta girando verso sinistra} \\ -k(P) & \textit{se nel punto } P \textit{ la curva sta girando verso destra} \end{cases}$$

Dunque $|k^*| = k$. Se $P(s)$ si muove sulla curva con velocità unitaria, allora, per l'Osservazione 1.3, la curvatura $k(P(s))$ è il valore assoluto della velocità scalare di $T(s)$. Dunque $k^*(P(s)) = \pm$ la velocità scalare di $T(s)$. Precisamente

Osservazione 7.2. *Se sulla circonferenza unitaria consideriamo come positivo il verso di percorrenza antiorario, allora la curvatura con segno $k^*(P(s))$ coincide con la velocità scalare del punto $T(s)$.*

Infatti tale velocità è positiva/negativa a seconda che $T(s)$ si stia muovendo in senso antiorario/orario. Il che equivale a dire che nel punto $P(s)$ la curva sta girando a sinistra/destra. Il che equivale a dire che la curvatura con segno $k^*(P(s))$ è positiva/negativa.

Per ben comprendere l'Osservazione 7.2 conviene osservare il filmato della Fig. 46 in cui si vede: in alto un punto $P(s)$ che si muove descrivendo una certa curva, il suo

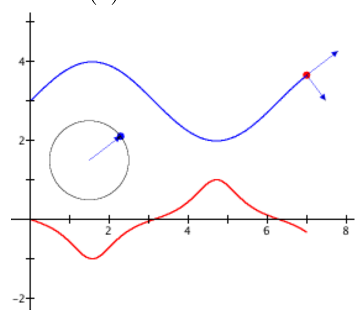


Figure 46

versore tangente $\vec{T}(s)$ e il versore normale $\vec{N}(s)$; in mezzo il versore $\vec{T}(s)$ applicato in un punto fisso, che descrive una circonferenza di raggio 1; in basso il grafico della funzione $k^*(P(s))$. Come si può vedere dal filmato quando il punto gira a sinistra i valori di k^* sono positivi, quando gira a destra sono negativi. Quando la curvatura k^* assume valori massimi o minimi, il versore $\vec{T}(s)$ si muove più rapidamente sulla circonferenza in verso ripettivamente antiorario ed orario. Quando $k^* = 0$ il versore $\vec{T}(s)$ inverte il proprio senso di marcia sulla circonferenza; si noti anche che quando $k^* = 0$ il versore noramle $\vec{N}$ inverte bruscamente il proprio verso e più precisamente nel punto P in cui $k^*(P) = 0$ il versore normale $\vec{N}$ non è definito[10].

[10](Cfr. Definizione 5.8, b)

7.2. **La forma della curva dipende dalla curvatura con segno.** Cominciamo con l'osservare che

Lemma 7.3. *Se sappiamo che il punto $P(t)$ percorre una certa curva C e conosciamo la sua velocità scalare e sappiamo dove esso si trova in un certo istante t_0, allora conosciamo il moto del punto sulla curva, vale a dire sappiamo in ogni istante t dove si trova $P(t)$.*

Dimostrazione. Sulla curva C fissiamo un sistema di ascisse curvilinee. Sia $s(t)$ l'ascissa del punto $P(t)$; essa nel nostro problema rappresenta la funzione incognita. Infatti conoscere $s(t)$ significa sapere dove sta il punto $P(t)$. La velocità scalare (cfr. Definizione 4.4) è ds/dt. Dunque, per ipotesi, conosciamo la derivata della funzione $s(t)$. Inoltre sappiamo chi è $P(t_0)$, dunque conosciamo la sua ascissa $s(t_0)$. Ma

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{dt}(t')dt' + s(t_0).$$

Questa formula esprime la funzione incognita $s(t)$ in termini di ds/dy e di $s(t_0)$ che ci sono note, dunque il Teorema è provato. □

Esercizio 7.4. *Consideriamo il punto $P(t)$ che si muove sulla retta con velocità $v(t) = t + \cos t$ e all'istante 3 si trova nel punto A. Determinare il moto di $P(t)$.*

Soluzione. Fissiamo un sistema di ascisse sulla retta con origine in A, allora $s(3) = 0$ perchè l'ascissa del punto $A = P(3)$ è 0. Dunque $ds/dt = v(t) = t + \cos t$. Pertanto dal Teorema 7.3:

$$s(t) = \int_3^t t' + \cos t' dt' + 0 = \big(\frac{t'^2}{2} + \sin t'\big)\Big|_3^t = \frac{t^2}{2} + \sin t - 9/2 - \sin 3.$$

Lemma 7.5. *Se conosciamo in ogni istante la velocità vettoriale $\vec{V}(t)$ di un punto in moto $P(t)$ e sappiamo anche la sua posizione $P(t_0)$ in un certo istante t_0, allora conosciamo la sua traiettoria; vale a dire conosciamo in ogni istante la posizione del punto $P(t)$.*

Dimostrazione. Basta ricordare che $\vec{V}(t) = \frac{dP}{dt}(t)$, vale a dire:

$$\vec{V}(t) = \big(\dot{x}(t), \dot{y}(t)\big)$$

dove

$$P(t) = \big(x(t), y(t)\big).$$

Quindi

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \dot{x}(t')dt' + x(t_0)$$

e

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} \dot{y}(t')dt' + y(t_0).$$

Vale a dire

$$P(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{V}(t')dt' + P(t_0).$$

□

N.B. Si noti la differenza tra gli enunciati dei Lemmi 7.3 e 7.5, nel primo sono note traiettoria e velocità scalare, nel secondo è nota la velocità vettoriale.

Esercizio 7.6. *Sapendo che il punto $P(t)$ ha velocità*

$$\vec{V}(t) = (\cos t, 1)$$

e che $P(0) = (0,0)$ determinare la traiettoria di $P(t)$.

<u>Soluzione</u>. Dalla finale della dimostrazione del Teorema 7.5 ricaviamo:

$$P(t) = \int_0^t \big(\cos t', 1\big)dt' + (0,0).$$

Vale a dire: $x(t) = \int_0^t \cos t' dt' + 0 = \sin t - \sin 0 = \sin t$ e $y(t) = \int_0^t dt' + 0 = t$. Pertanto

$$P(t) = \big(\sin t, t\big)$$

dunque la sua traiettoria è il grafico della funzione seno.

Possiamo così concludere:

Teorema 7.7. *Assegnati una funzione $f(s)$, un punto A ed un versore $\vec{T}_A$ esiste un'unica curva C che passa per A con tangente che in A ha la direzione di $\vec{T}_A$ e ha curvatura con segno $k^*(s) = f(s)$. Precisamente questa curva è la traiettoria di un punto $P(s)$ che si muove con velocità 1 e che nell'istante 0 passa per il punto A con il verso e direzione tangente del versore T_A e la cui curvatura con segno in ogni istante s è $k^*(s) = f(s)$.*

<u>Dimostrazione</u>. L'incognita del problema è il moto del punto $P(s)$. Il suo versore tangente $\vec{T}(s)$ descrive la circonferenza unitaria con velocità $f(s)$ e sappiamo che $\vec{T}(0) = \vec{T}_A$. Pertanto per il Lemma 7.3 conosciamo in ogni istante il punto $T(s)$.

Ma $\vec{T} = dP/ds$ è il vettore velocità del punto $P(s)$ e sappiamo anche che $P(0) = A$, quindi per il Lemma 7.5 consociamo il moto $P(s)$. □

Osservazione 7.8. *Il Teorema 7.7 afferma che la curvatura con segno determina la forma della curva.* Per meglio comprendere questo aspetto, supponiamo di aver assegnato una funzione $f(s)$. Fissiamo un punto A nel piano e un versore $\vec{T}_A$. Per il Teorema esiste un'unica curva C che passi per A con retta tangente diretta come $\vec{T}_A$ e tale che, prendendo A come origine dell'ascissa curvilinea e il verso di $\vec{T}_A$, abbia curvatura con segno $k^*(s) = f(s)$. In Fig. 47 vediamo un esempio.

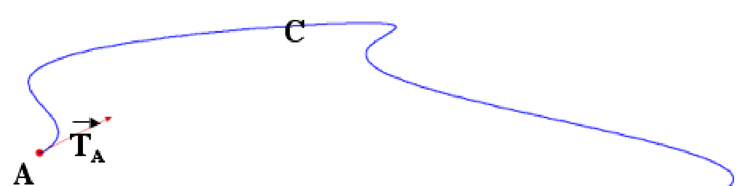


FIGURE 47

Ora si osservi che, se spostiamo rigidamente la curva C muovendo il punto A e il versore $\vec{T}_A$, come in Fig. 48 (ma si apra il file per vedere il movimento) otteneniamo una curva C'. Se i punti $P(s)$ e $P'(s)$ percorrono le due curve a velocità unitaria i rispettivi versori tangenti $\vec{T}(s)$ e $\vec{T}'(s)$ avranno la stessa velocità scalare, vale a dire le due curve hanno la stessa curvatura con segno.

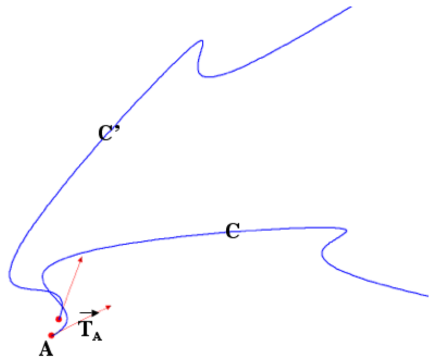


FIGURE 48

Corollario 7.9. *Le uniche curve con curvatura costante sono le circonferenze e la retta.*

Dimostrazione. Sia $c > 0$. Una circonferenza di raggio $1/c$ ha curvatura k costante ed uguale a c (cfr. Esercizio 5.5). Se la percorriamo in senso antiorario la sua curvatura con segno sarà $k^* = k = c$; ma la curvatura con segno determina la forma della curva, quindi la circonferenza di raggio $1/c$ è l'unica curva con curvatura c.

Una segmento ha curvatura media nulla (le tangenti agli estremi del segmento hanno la stessa direzione del segmento e formano un angolo nullo). Dunque una retta ha curvatura nulla. Dunque ha curvatura con segno nulla e, poiché la curvatura con segno determina la forma della curva, è l'unica curva con curvatura nulla.

Esercizio 7.10. *Rispondere con adeguate giustificazioni alla seguente domanda: chi sono le uniche curve con curvatura costante.*

8. Formule per il calcolo della curvatura. Esempi.

Ricordo che se $\vec{U} = (a, b)$ e $\vec{W} = (c, d)$, allora

$$\vec{U} \times \vec{W} = ad - bc.$$

Dal Teorema 6.2 segue il seguente:

Corollario 8.1.

$$k = \frac{\vec{V} \times \vec{A}}{v^3} \quad e \quad k^* = \frac{\vec{V} \times \vec{A}}{|v|^3}$$

Possiamo riscrivere in una forma più esplicita la formula ottenuta nel Corollario 8.1:

Proposizione 8.2. **(i)** *Se le equazioni del moto sono*

$$x = x(t),\ \ y = y(t),$$

allora la curvatura con segno nel punto $P(t)$ è

$$k^*(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\big((\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2\big)^{3/2}}. \tag{8.1}$$

(ii) *Se la curva sia è il grafico della funzione $f(x)$ allora percorrendo la curva nella direzione delle x crescenti (cioè da sinistra verso destra) la curvatura con segno nel punto $(x, f(x))$ è*

$$k^*(x) = \frac{f''(x)}{\left(1 + (f'(x))^2\right)^{3/2}}. \tag{8.2}$$

Esercizio 8.3. *Utilizzando la Fig. 49 tracciare approsimativamente il grafico della*

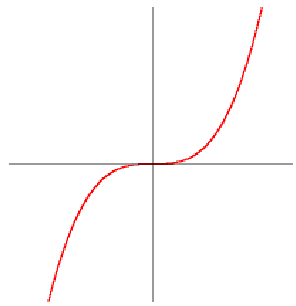


FIGURE 49

curvatura con segno della cubica $\mathcal{C}$ di equazione $y = x^3$ (essendo un grafico intendiamo sempre che lo si percorra da sinistra verso destra).

Soluzione. Percorrendo la curva da sinistra verso destra si gira prima e destra, poi passata l'origine, si gira a sinistra. Quindi

$$k^*(x) \begin{cases} < 0 \text{ se } x < 0 \\ = 0 \text{ se } x = 0 \\ > 0 \text{ se } x > 0 \end{cases}.$$

Allontanandosi verso le estremità la curva si raddrizza sempre di più, quindi

$$\lim_{x \to \pm\infty} k^*(x) = 0.$$

Inoltre l'origine è centro di simmetria della curva, dunque

$$k^*(x) = -k^*(-x)$$

pertanto la funzione $k^*(x)$ avrà un andamento del tipo rappresentato in Fig. 50.

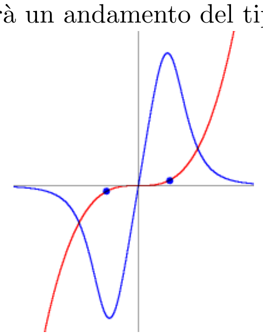


FIGURE 50

In realtà la Fig. 50 è stata realizzata utilizzando la formula (8.2). Infatti posto $f(x) = x^3$, ne segue $f'(x) = 3x^2$ e $f''(x) = 6x$ da cui si ricava $k^*(x) = \frac{6x}{(1+9x^4)^{3/2}}$.

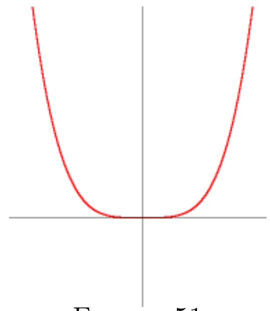


FIGURE 51

Esercizio 8.4. *Utilizzando la Fig. 51 e l'esercizio precedente, tracciare approsimativamente il grafico della curvatura con segno della quartica* $\mathcal{Q}$ *di equazione* $y = x^4$*. (Essendo un grafico intendiamo sempre che lo si percorra da sinistra verso destra).*

Soluzione. A prima vista sembrerebbe che l'andamento della curvatura con segno della quartica $\mathcal{Q}$ debba essere simile a quello della parabola $\mathcal{P}$. In effetti la curva gira sempre a sinistra, quindi la curvatura con segno è positiva. La curva è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, quindi

$$k^*(x) = k^*(-x).$$

Inoltre la curva si raddrizza alle estremità, quindi

$$\lim_{x \to \pm\infty} k^*(x) = 0.$$

Appare evidente che ci sono due punti A e B, simmetrici rispetto all'asse delle ordinate in cui la curvatura è massima. Quindi c'è un punto di minimo tra A e B che per ragioni di simmetria è sull'asse delle ordinate. Pertanto il grafico della curvatura dovrebbe avere l'andamento in Fig. 52a.

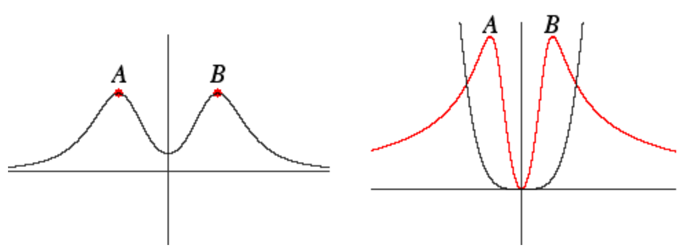


FIGURE 52. a - b

Tuttavia in Fig. 52b è rappresentata la curva $\mathcal{Q}$ e l'esatta curvatura $k^*(x)$, perché la quartica $\mathcal{Q}$ ha nell'origine un punto di curvatura 0. Cerchiamo di capire con un ragionamento qualitativo[11] il motivo.

Confrontiamo la cubica $\mathcal{C}$ e la quartica $\mathcal{Q}$ nella regione immediatamente a destra dell'origine (la zona grigia di Fig. 53). Si vede che la curvatura della quartica è inferiore a quella della cubica, ma sappiamo che la cubica ha curvatura 0 nell'origine,

[11] In realtà se si utilizza la formula (8.2) si ottiene $k^*(x) = \frac{12x^2}{\left(1+16x^9\right)^{3/2}}$ (infatti $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$ e $f''(x) = 12x^2$); perciò il valore minimo nell'origine è $k^*(0) = 0$.

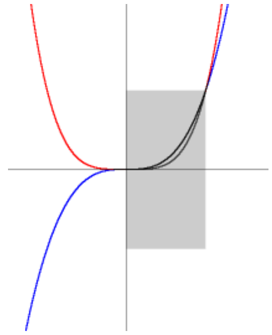


Figure 53

perché è un punto di flesso. Dunque a maggior ragione la quartica ha curvatura 0 nell'origine.

Esercizio 8.5. *Si considerino gli archi in Fig. 54. Sapendo che l'arco C è un arco*

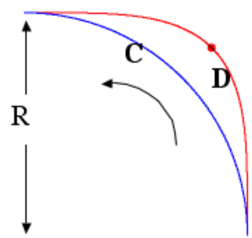


Figure 54

di circonferenza di raggio R e che entrambi gli archi vengono percorsi nel senso della freccia, si tracci un grafico approssimativo della curvatura con segno di entrambi.

Soluzione. La curvatura k^* dell'arco di circonferenza C è ovviamente costante e vale $1/R$.

Evidentemente la curvatura con segno dell'arco D è positiva (si ruota verso sinistra) e agli estremi è minore di $1/R$, mentre è massima nel punto evidenziato in Fig. 54. Quindi i grafici di k^* per i due archi sono approssimativamente[12] quelli in Fig. 55 .

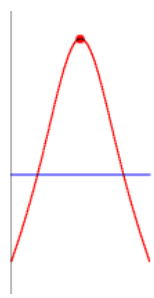


Figure 55

[12] In realtà l'arco D ha equazione $x(t) = \sqrt{\cos t}, y(t) = \sqrt{\sin t}$; da ciò si potrebbe ricavare che la curvatura agli estremi è nulla.

Esercizio 8.6. *Calcolare la curvatura con segno k^* delle curve di equazione $y = x^2$ e $y = x^4$, utilizzando la formula*

$$k^*(x) = \frac{f''(x)}{\big(1 + f'(x^2)\big)^{3/2}}.$$

<u>Soluzione</u>. In Fig. 44 sono riportsti i grafici delle due curve e delle rispettive curvature. Vediamo il calcolo:

a) Prendendo $f(x) = x^2$, riesce $f'(x) = 2x$ e $f''(x) = 2$, quindi la formula dà:

$$k^*(x) = \frac{2}{\big(1 + (2x)^2\big)^{3/2}} = \frac{2}{\big(1 + 4x^2\big)^{3/2}}$$

che ha evidentemente un massimo in 0 (valore per cui il denominatore ha minimo) e tende a 0 per $x \to \pm\infty$.

b) Prendendo $f(x) = x^4$, riesce $f'(x) = 4x^3$ e $f''(x) = 12x^2$, quindi la formula dà:

$$k^*(x) = \frac{12x^2}{\big(1 + (4x^3)^2\big)^{3/2}} = \frac{12x^2}{\big(1 + 16x^6)\big)^{3/2}}$$

che evidentemente si annulla in 0. Inoltre è chiaro che tende a 0 per $x \to \pm\infty$, quindi deve avere almeno un punto di massimo relativo a destra e a sinistra di 0.

Esempio 8.7. In Fig. 56 è rappresentata un'ellisse e il grafico della sua cur-

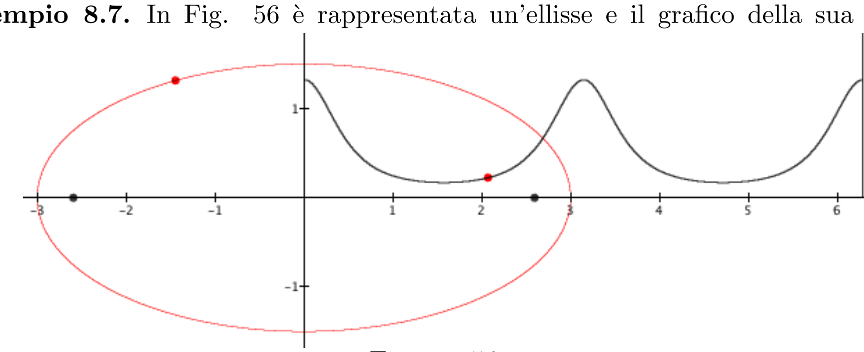


FIGURE 56

vatura con segno (si intende che il verso di percorrenza positivo è quello antiorario). Aprendo il file si vede il punto muoversi sull'ellisse e il corrispondente valore della curvatura è evidenziato sul grafico. Così si può verificare che i vertici dell'ellisse sono, come si poteva intuire, punti di massimo e di minimo della curvatura. Il file consente anche di modificare la forma dell'ellisse. Le formule necessarie per realizzare la figura sono le equazioni parametriche dell'ellisse e la formula 1(8.1).

Esercizio 8.8. *Data la curva $\mathcal{C}$ in Fig. 57, tracciare un grafico approssimativo della curvatura con segno k^*, indicando sulla curva $\mathcal{C}$ i punti di massimo e minimo relativo e i punti in cui la curvatura si annulla (al solito si intende che il verso di percorrenza è da sinistra verso destra).*

Ripetere lo stesso esercizio per la curvatura k.

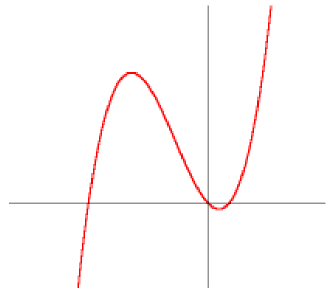


Figure 57

<u>Soluzione</u>. Alle estremità dei rami la curva tende a raddrizzarsi, quindi

$$\lim_{x\to\pm\infty} k^*(x) = 0.$$

Inizialmente (venendo da sinistra) la curva gira a destra, duque la curvatura sarà negativa. Poi comincia a girare verso destra e diventa positiva. Poiché i limiti per $x \to \pm\infty$ sono nulli, la funzione $k^*(x)$ è inizialmente decrescente, ha un minimo negativo, risale a 0 (in corrispondenza del flesso della curva $\mathcal{C}$), poi cresce, ha un massimo positivo, poi decresce a 0 andando $x \to +\infty$. In Fig. 58 la soluzione esatta.

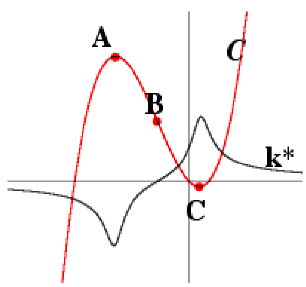


Figure 58

(Naturalmente il disegno esatto del grafico di $k^*(x)$ può essere fatto solo calcolando con precisione la funzione, tuttavia un disegno approssimativo e l'individuazione sulla curva dei punti di massima e minima curvatura e di flesso è possibile senza calcoli). Nei punti A, B e C evidenziati si ha: A è un punto di minimo per k^*, B è un punto di flesso della curva e quindi $k^*(B) = 0$, infine C è un punto di massimo per k^*.

Poiché $k = |k^*|$ il grafico di k si ricava subito (Fig. 59)e A e C sono punti di

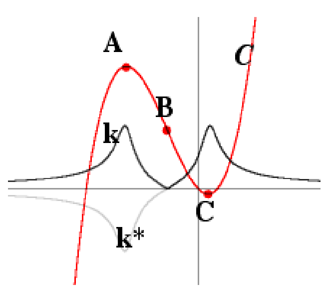


Figure 59

massimo relativo per k, mentre B è di minimo.

N.B. Il fatto che in questo caso i punti di massima e minima curvatura coincidano (scambiati) con i punti di massimo e minimo della curva come grafico è del tutto casuale. Basta considerare il caso della quartica, trattato prima, per rendersene conto.

Esercizio 8.9. *Consideriamo la curva $\mathcal{C}$ in Fig. 60. Essa è ricavata dalla parabola*

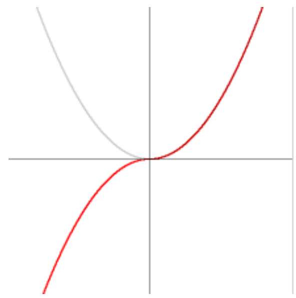


FIGURE 60

$\mathcal{P}$ (la curva più chiara in figura); precisamente $\mathcal{C}$ è il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & se\ x < 0 \\ x^2 & se\ x \geq 0 \end{cases} .$$

Come sappiamo (cfr. Fig. 44) la parabola non ha curvatura nulla nel vertice e - per costruzione - la nostra curva deve avere la stessa curvatura della parabola[13] *(sto parlando di curvatura non di curvatura con segno). Ma questo non è possibile, perché $\mathcal{C}$ ha un flesso nell'origine e quindi nell'origine ha curvatura nulla. Dove sta l'errore?*

Soluzione. Il fatto è che la funzione $f(x)$ non è derivabile due volte nell'origine. Infatti la derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = \begin{cases} -2x \text{ se } x < 0 \\ 2x \text{ se } x \geq 0 \end{cases} ,$$

quindi

$$f''(x) = \begin{cases} -2 \text{ se } x < 0 \\ 2 \text{ se } x \geq 0 \end{cases} .$$

Pertanto la derivata seconda nell'origine non può essere continua (in effetti non è neppure definita.) In Fig. 61 vediamo i grafici della derivata prima e seconda di f. Dunque per la curva $\mathcal{C}$ la curvatura non è definita nell'origine.

A riprova di questo fatto si consideri la Fig. 62 dove sono rappresentate due superfici cilindriche costruite rispettivamente sulla parabola $\mathcal{P}$ e sulla curva $\mathcal{C}$. Come si nota questo secondo cilindro presenta una riga di riflesso anomalo in corrispondenza del punto in cui la curvatura non è definita.

Esercizio 8.10. *Mostrare che la curvatura, diversamente dalla curvatura con segno non caratterizza la forma di una curva.*

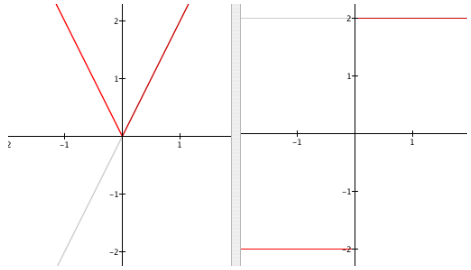


Figure 61

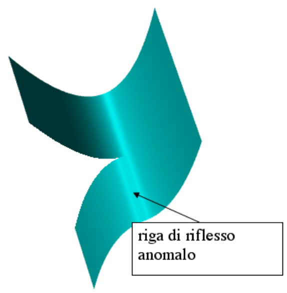


Figure 62

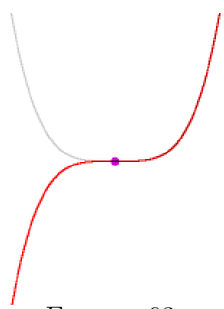


Figure 63

<u>Soluzione</u>. Si consideri la curva $\mathcal{C}$ in Fig. 63. Essa è ricavata dalla quartica $\mathcal{Q}$ (la curva più chiara in figura); precisamente $\mathcal{C}$ è il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^4 \text{ se } x < 0 \\ x^4 \text{ se } x \geq 0 \end{cases} .$$

Poiché la curvatura della quartica $\mathcal{Q}$, come sappiamo, è nulla nel vertice le due curve $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{C}$ hanno nei punti corrispondenti la stessa curvatura eppure sono diverse. In Fig. 64 sono rappresentati i grafici delle curvature.

Infine in Fig. 65 sono rappresentate le due superfici cilindriche costruite rispettivamente sulla quartica $\mathcal{Q}$ e sulla curva $\mathcal{C}$. Come si nota questo secondo cilindro non presenta nessun riflesso anomalo, il che mostra che la curvatura è continua.

[13]Si intende nei punti corrispondenti, cioè che hanno la stessa ascissa e ordinata opposta od uguale

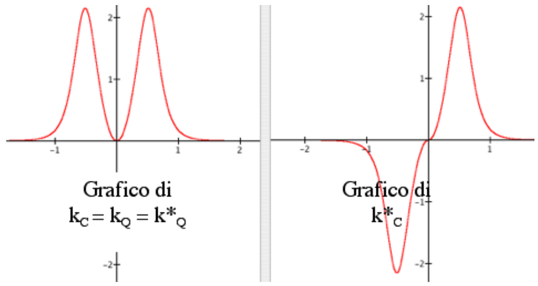


FIGURE 64

FIGURE 65