CAPITOLO V - CURVE

1. Lunghezza di una curva

Sarà sufficiente la nozione intuitiva di curva che ciascuno possiede. Se necessario faremo delle precisazioni in merito.

1.1. **Lunghezza di una curva.** Anche la lunghezza di una curva è un concetto che potremmo dare per noto, almeno a livello intuitivo; tuttavia preferiamo fornire una definizione matematica precisa. A questo scopo consideriamo una curva $\mathcal{C}$ e due suoi punti A e B; ci interessa definire la lunghezza $L(A, B)$ dell'arco di curva compreso tra A e B.

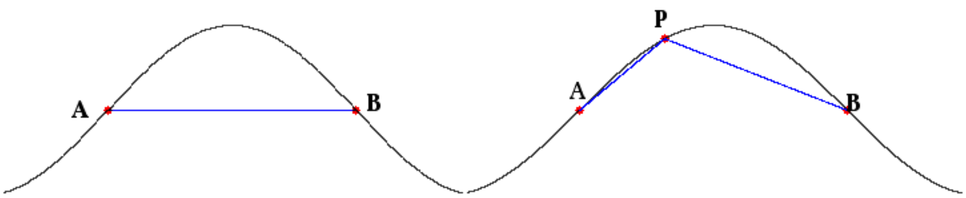

Figure 1. a - b

Certamente

$$|AB| \leq L(A, B)$$

perché la linea retta è la più breve tra due punti (cfr. Fig. 1a).

Se scegliamo un punto P sull'arco AB allora

$$|AB| \leq |AP| + |PB| \leq L(A, B);$$

vale a dire la lunghezza della spezzata formata dai segmenti AP e PB dà una migliore approssimazione per difetto della lunghezza $L(A, B)$ dell'arco (cfr. Fig. 1b). Se aggiungiamo un ulteriore punto Q vediamo (cfr. Fig. 2) che la nuova

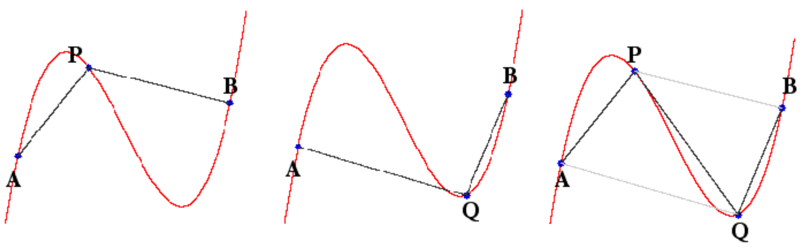

Figure 2

spezzata $APQB$ è più lunga di entrambe le spezzate APB e AQB.

E continuando ad aggiungere punti l'approssimazione migliora.

Inoltre è da notare che non ha molta importanza come iniziamo il procedimento: infatti date le spezzate $AP_1P_2 \dots P_nB$ e $AQ_1Q_2 \dots Q_kB$ (dove si intende che i punti di ciascuna spezzata sono disposti in successione sulla curva) possiamo mettere insieme tutti i punti $P_1, P_2, \dots, P_n, Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ e, riordinandoli, costruire una nuova spezzata che fornisce una migliore approssimazione per difetto della lunghezza $L(A, B)$.

Diamo dunque la seguente definizione:

Definizione 1.1. *Data una curva $\mathcal{C}$ e due suoi punti A, B, la lunghezza $L(A, B)$ dell'arco di curva compreso tra i due punti è l'estremo superiore delle lunghezze di tutte le possibili spezzate $AP_1P_2 \dots P_nB$.*

2. La funzione $s(t)$

Il modo più conveniente per considerare una curva è di pensarla come traiettoria del moto di un punto. Supponiamo che il moto avvenga in un certo intervallo di tempo I.

Conviene fissare un istante iniziale t_0 in cui il moto inizia. Supponiamo che il punto si muova lungo la curva, cioè percorra la traiettoria sempre nello stesso verso, senza mai tornare indietro e, in ogni istante t, indichiamo con $s(t)$ la lunghezza dell'arco di curva percorso fino a quell'istante, a partire dall'istante iniziale t_0. Se indichiamo con $P(t)$ la posizione del punto mobile all'istante t, allora

$$s(t) = L\big(P(t_0), P(t)\big),$$

lunghezza dell'arco percorso tra il punto di partenza $P(t_0)$ e la posizione raggiunta all'istante t.

In altri termini immaginiamo di andare in auto da Parma a Borgotaro, partendo alle 9 di mattina. In partenza azzeriamo il contachilometri e, in ogni istante t del nostro viaggio, il contachilometri segnerà esattamente il numero $s(t)$.

Usiamo la lettera s per ricordarci che $s(t)$ è lo **s**pazio percorso fino all'istante t.

Si noti che $s(t)$ non è la distanza tra la posizione iniziale e la posizione occupata dal punto all'istante t; ad es. è chiaro che per andare in auto da Parma a Borgotaro compiamo un percorso molto più lungo della distanza (in linea retta) tra Parma e Borgotaro.

3. velocità media e velocità istantanea

A che velocità sei andato nel tuo viaggio da Parma a Borgotaro? Forse a questa domanda risponderemmo: sono partito alle 9, sono arrivato alle 9,45 e sono 60 km; fanno 60 km in 3/4 d'ora, quindi sono 80 km all'ora. Sì sono andato ad 80 all'ora.

In realtà 80 km all'ora è la velocità media. La velocità media è lo spazio diviso per il tempo, più precisamente:

Definizione 3.1. *La velocità media di un certo moto in un dato intervallo di tempo è data dalla lunghezza del percorso effettuato in quel lasso di tempo, divisa per la lunghezza dell'intervallo.*

In effetti lungo il percorso da Parma a Borgotaro abbiamo un primo tratto con traffico cittadino che ci rallenta, poi un tratto più rapido ed infine un ultimo tratto più lento per la sinuosità della strada. Quindi la velocità media nel tratto centrale sarà maggiore che negli altri due. Cioè la velocità media dipende dall'intervallo di tempo in cui la calcolo.

La lunghezza del percorso compiuto nell'intervallo di tempo (t, t') sarà

$$L\big(P(t), P(t')\big) = s(t') - s(t)$$

(ricordo che $s(t)$ è lo spazio percorso dall'istante iniziale t_0, perciò devo fare la differenza) e dunque *la velocità media nell'intervallo* (t, t') *è*

$$v_m = \frac{s(t') - s(t)}{t' - t}.$$

E la velocità istantanea che cos'è? Si potrebbe rispondere è la velocità che in un certo istante segna il tachimetro. La risposta potrebbe sembrare soddisfaciente, ma, visto che non tutti i moti avvengono in auto, vediamo di approfondire per vedere se riusciamo a dare una definizione meno legata alle circostanze del nostro esempio.

Non ha molta importanza conoscere i dettagli tecnici, comunque è chiaro che il tachimetro misura il numero di giri delle ruote e, tenuto conto della lunghezza della circonferenza di una ruota, cioè del percorso che corrisponde ad un giro di ruota, indica la velocità. Quando parliamo di numero di giri delle ruote, intendiamo numero di giri al minuto, cioè la frequenza con cui questi giri avvengono. In un minuto ci sono 60 secondi e dunque 6.000 centesimi di secondo. Ad esempio 2.000 giri al minuto, segnati dal tachimetro, corrispondono a 1 giro ogni 3 centesimi di secondo. Per quanto precisa possa essere l'apparecchiatura misurerà al minimo 1 giro, vale a dire questo è il *quantum* minimo registrabile e dunque il tachimetro sta calcolando la velocità media in un intervallo di 3 centesimi di secondo!

Dunque quella che credevamo essere la velocità istantanea si è rivelata essere una velocità media, sia pure in un intervallo molto piccolo. La strada è giusta, bisogna calcolare il limite della velocità media quando l'intervallo tende a 0.

Definizione 3.2. *La velocità istantanea $v(t)$ all'istante t è il limite delle velocità medie calcolate nell'intervallo (t, t') per $t' \to t$. Cioè:*

$$v(t) = \lim_{t' \to t} \frac{s(t') - s(t)}{t' - t} = \frac{ds}{dt}(t).$$

4. Retta tangente

4.1. **Definizione di retta tangente.** Abbiamo già visto la nozione di retta tangente ad una conica non degenere, ora diamo la definizione di retta tangente ad una curva in un punto nel caso generale. Nel caso delle coniche, come mostreremo più avanti, è vero, ma non è ovvio, che le due definizioni coincidono.

In Fig. 3 vediamo una serie di ingrandimenti di una curva $\mathcal{C}$ e di una certa retta t passanti per P. Poiché le immagini hanno tutte lo stesso formato, la regione che compare in ciascuna di esse in realtà è sempre più piccola; precisamente in ciascuna immagine è evidenziata in grigio la regione che è compresa nell'ingrandimento successivo. Come si vede, via via che si procede la curva $\mathcal{C}$ si avvicina sempre di più alla retta t, fino ad essere indistinguibile da essa.

È bene chiarire che la curva non è composta di pezzettini minuscoli di segmenti di retta. Infatti da qualche parte si vedrebbero degli spigoli; inoltre, come mostra

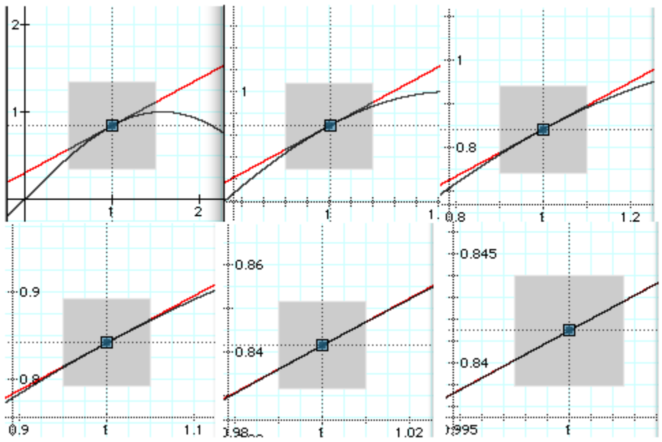

FIGURE 3

la Fig. 4, se si sposta leggermente il centro dell'immagine (in questo caso sul bordo della regione grigia) e si fa un ulteriore ingrandimento, subito retta e curva

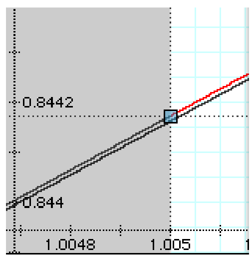

FIGURE 4

si separano.

Possiamo dare la seguente

Definizione 4.1. *Data una curva $\mathcal{C}$ ed un suo punto P, diremo che una retta t passante per P è* tangente alla curva C in P *se essa approssima al meglio la curva, vale a dire se, considerando immagini sufficientemente ingrandite, centrate nel punto, non è più possibile distinguere tra curva e retta.*

Più precisamente, **comunque** *sia fissato il formato $L \times L$ della ''fotografia'', esiste un fattore N di ingrandimento, sufficientemente grande, tale che nella "fotografia" $L \times L$ scattata con fattore di ingrandimento N e centrata in P, curva e retta siano indistinguibili.*

Osservazione 4.2. La definizione è piuttosto intuitiva, ma è delicata. La precisazione circa il fatto che possiamo prendere fotografie di formato grande quanto vogliamo è necessaria, altrimenti non saremmo in grado di distinguere due rette che passano per P e formano un angolo θ molto piccolo. Infatti l'immagine delle due rette non cambia qualunque sia il fattore di ingrandimento (!) e se prendiamo θ molto piccolo, le due rette sono talmente vicine in un breve tratto vicino a P che appaiono coincidenti. Per "vedere" che le due rette sono distinte è inutile fare degli ingrandimenti, è invece necessario allontanarsi abbastanza da P, cioè prendere una fotografia di formato abbastanza grande.

4.2. **Esempi in cui non esiste tangente.** Prima di dare qualche esempio in positivo, vediamo alcuni casi in cui la tangente non esiste.

Esempio 4.3. *Spezzata.* Se la curva $\mathcal{C}$ è una spezzata e P è uno dei vertici, allora, dopo qualche ingrandimento resteranno solo il punto P e i due lati della spezzata che passano per P; cioè due semirette uscenti da P. Perciò nei vertici di una spezzata non esiste la retta tangente.

Esempio 4.4. *Arco a sesto acuto.* Se la curva $\mathcal{C}$ è un arco a sesto acuto e P è il vertice dell'arco, allora doppo qualche ingrandimento (cfr. Fig. 5), vediamo due archi uscenti da P, via via più simili a delle semirette, fino a vedere solo due semirette uscenti da P. Esattamente come nel caso della spezzata.

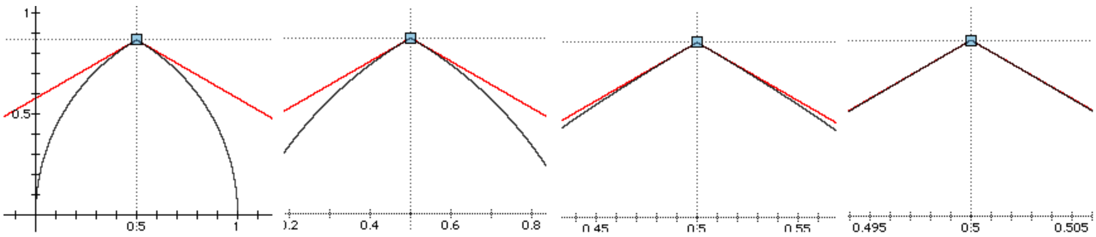

FIGURE 5

4.3. **Grafico di una funzione.** Passiamo a considerare un caso particolare, storicamente importantissimo, in cui siamo in grado di determinare in modo esplicito la retta tangente.

Assumiamo che la curva $\mathcal{C}$ sia il grafico di una funzione $f(x)$, ciò significa che i punti di $\mathcal{C}$ hanno coordinate $(x, f(x))$. Fissato un valore x_0, il punto $P = (x_0, f(x_0))$ sta sulla curva. Ci domandiamo chi è la retta tangente alla curva $\mathcal{C}$ nel punto P.

A questo scopo consideriamo una qualunque retta r passante per P. Essa ha equazione cartesiana

$$y = m(x - x_0) + f(x_0)$$

dove m è il coefficiente angolare. Per rispondere alla domanda dobbiamo determinare il valore di m per cui la retta r è la retta tangente.

Teorema 4.5. *Se $\mathcal{C}$ è il grafico di una funzione $f(x)$, $P = (x_0, f(x_0))$ e f è derivabile in x_0, allora la retta tangente a $\mathcal{C}$ in P ha coefficiente angolare $f'(x_0)$.*

Dimostrazione. Prendiamo una retta verticale vicina a P; essa taglia la curva $\mathcal{C}$ in due punti: Q sulla curva e R sulla retta r. Essi hanno la stessa ascissa x, dunque hanno coordinate (cfr. Fig. 6)

$$Q = (x, f(x)) \text{ e } R = (x, m(x - x_0) + f(x_0)).$$

La distanza tra i due punti è

$$\Delta = \big|f(x) - (m(x - x_0) + f(x_0))\big| = |x - x_0|.\Big|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m\Big|.$$

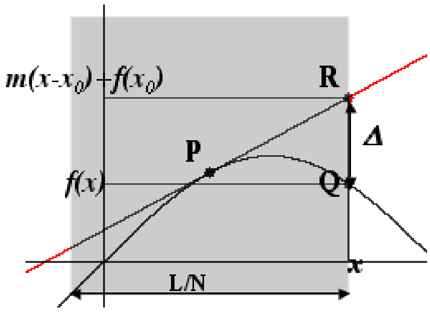

FIGURE 6

Scattiamo una fotografia di formato $L \times L$ con fattore d'ingrandimento N molto grande. La regione che fotografiamo è un quadratino K di lato L/N, quindi se prendo

$$|x - x_0| = \frac{L}{2N}$$

i due punti stanno sul bordo della fotografia. Le loro immagini nella fotografia distano

$$N\Delta = \frac{L}{2}\,\Big|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m\Big|.$$

Se la retta r è la retta tangente, allora a patto di prendere il fattore d'ingrandimento N abbastanza grande esse sono indistinguibili, cioè $\lim_{N\to\infty} N\Delta = 0$. Dunque se r è la retta tangente risulta:

$$m = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

□

Questo teorema è di fondamentale importanza perché consente di calcolare la tangente ad una curva (che sappiamo descrivere come grafico di una funzione). Vediamo un facile esempio.

Esercizio 4.6. *Sia $\mathcal{C}$ il grafico della funzione $sin(x)$. Calcolare l'equazione della retta tangente nel punto $P = (1, sin(1))$.*

<u>Soluzione</u>. La retta tangente nel punto $P = (1, sin(1))$ è una retta che passa per P e quindi ha equazione

$$y = m(x - 1) + sin(1).$$

Il coefficiente angolare è $m = \frac{d\ sin(x)}{dx}\Big|_{x=1} = cos(1)$. Quindi l'equazione cercata è

$$y = cos(1)(x - 1) + sin(1).$$

Come si vede in Fig. 7a dando al computer questa equazione viene disegnata la retta tangente.

Vedremo poi che, nel caso delle coniche, la definizione di tangente definita a suo tempo coincide con quella ora introdotta. Al momento limitiamoci ad applicare la definizione appena data per risolvere il seguente

Esercizio 4.7. *Si consideri la parabola di equazione $y = x^2$. Si calcoli la retta tangente nell'origine.*

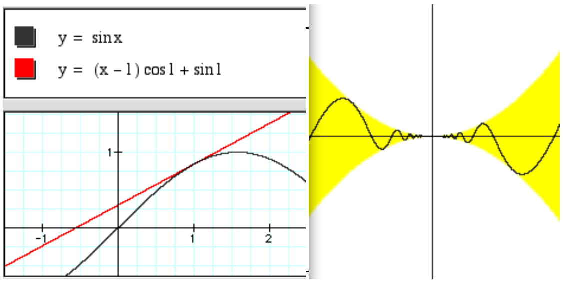

FIGURE 7. a - b

Soluzione. L'equazione cartesiana $y = x^2$ descrive già la curva come grafico della funzione $f(x) = x^2$. La retta tangente nell'origine ha equazione:

$$y = m(x - 0) + f(0)$$

cioè

$$y = mx$$

dove $m = f'(0) = 2x\big|_{x=0} = 0$. Dunque la tangente è l'asse delle ascisse.

Esercizio 4.8. *Mostrare che il grafico della funzione* $f(x) = x^2 sin\frac{1}{x}$ *ha come tangente nell'origine l'asse delle ascisse.*

Soluzione. Si potrebbe ragionare come nell'esercizio precedente: vale a dire verificare con un calcolo verificare che $f'(0) = 0$; ma procediamo diversamente. Risulta:

$$\big|f(x)\big| = \big|x^2 sin\frac{1}{x}\big| \leq x^2$$

questo significa che il grafico di $f(x)$ è compreso nella regione tra le due parabole in Fig. 7b. Come sappiamo dall'esercizio precedente, la retta delle ascisse è tangente alle due parabole nell'origine. Questo significa che la retta approssima bene le due parabole vicino all'origine; a maggior ragione approssima la nostra curva che è compresa tra le due parabole. Più precisamente, per definizione di tangente, prendendo un ingrandimento opportuno vediamo le due parabole coincidere con la retta delle ascisse; questo significa che la regione compresa tra le due parabole appare ridotta alla sola retta delle ascisse; a maggior ragione la nostra curva, che sta in quella regione, appare coincidere con l'asse delle ascisse.

Esempio 4.9. *Il caso della cuspide.* Consideriamo la curva in Fig. 8 che si chiama *cuspide.* Ingrandimenti successivi centrati nel vertice mostrano che la curva è approssimata da una semiretta!

Dunque, secondo la nostra definizione non esiste retta tangente nel vertice. Si osservi che la cuspide è il grafico della funzione $f(x) = x^{2/3}$ che non è derivabile nell'origine (e dunque non si può applicare il Teorema 4.5).

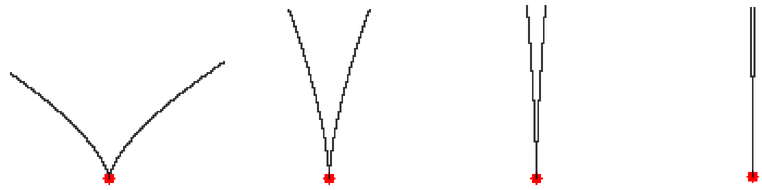

FIGURE 8

4.4. **Tangente ad una traiettoria.** Ora trattiamo il caso generale. Descriviamo la curva $\mathcal{C}$ come traiettoria del moto di un punto. Se indichiamo con $x(t)$ e $y(t)$ le coordinate del punto all'istante t, diremo che

$$x = x(t), \;\; y = y(t)$$

sono le equazioni del moto.

Esempio 4.10.

$$x = R\cos(t), \;\; y = R\; sin(t)$$

sono le equazioni del moto di un punto che percorre una circonferenza di centro l'origine e raggio R.

Esempio 4.11. Sia $f(x)$ una funzione.

$$x = t, \;\; y = f(t)$$

sono le equazioni del moto di un punto che si muove sul grafico della funzione.

Se la curva è una traiettoria possiamo descrivere la retta tangente come segue:

Teorema 4.12. *Sia $\mathcal{C}$ la traiettoria descritta dal moto di un punto e siano*

$$x = x(t), \;\; y = y(t)$$

le equazioni del moto.

Supponiamo che le funzioni $x(t), y(t)$ siano derivabili, che le derivate $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ siano continue e mai entrambe nulle.

Allora esiste la retta tangente alla curva nel punto $P(t_0)$; essa è la retta di equazione

$$\big(y - y(t_0)\big) . \Big(\frac{dx}{dt}(t_0)\Big) = \big(x - x(t_0)\big) . \Big(\frac{dy}{dt}(t_0)\Big) \tag{4.1}$$

4.5. **Vettore velocità.** Non diamo la dimostrazione del Teorema 4.12, ma facciamo alcune osservazioni in merito al vettore $\left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t)\right)$.

Osservazione 4.13. Ricordo che un vettore v è un *vettore direzione* di una retta r se ha la stessa direzione della retta. Se r ha equazione

$$ax + by = c.$$

allora il vettore $v = (-b, a)$ è un vettore direzione di r. Allora dall'equazione (4.1) della retta tangente si ricava facilmente che *il vettore*

$$V(t) := \Big(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t)\Big),$$

che per ipotesi è $\neq 0$*, è il vettore direzione della retta tangente. Il vettore* $V(t)$*, per ragioni che vedremo poi, si chiama* vettore velocità*.*

Definizione 4.14. *Se, come detto,* $P(t)$ *è la posizione all'istante* t *di un punto che descrive la traiettoria* $\mathcal{C}$*, poniamo*

$$\frac{dP}{dt}(t) := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(P(t+h) - P(t)\big).$$

Ne segue che $\frac{dP}{dt}(t)$ è un altro modo per scrivere il vettore velocità $V(t)$, infatti:

Proposizione 4.15.

$$\frac{dP}{dt}(t) = V(t)$$

<u>Dimostrazione</u>. È sufficiente fare il calcolo:

$$\frac{1}{h}\big(P(t+h) - P(t)\big) = \Big(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \ \frac{y(t+h) - y(t)}{h}\Big);$$

passando al limite per $h \to 0$ troviamo:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt}(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(P(t+h) - P(t)\big) = \\ &= \Big(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t)\Big) = V(t).\end{aligned}$$

$\square$

4.6. **Un'altra interpretazione della retta tangente.** Vediamo una conseguenza importante della Proposizione 4.15 che dice che il limite $\frac{dP}{dt}$ del rapporto incrementale $\frac{P(t+h)-P(t)}{h}$ è il vettore velocità, cioè il vettore direzione della tangente.

Consideriamo la sequenza di Fig. 9. Al tendere di $h \to 0$ il punto $P(t+h)$ si avvicina al punto $P(t)$ e il vettore *rapporto incrementale* $\frac{P(t+h)-P(t)}{h}$ converge al vettore $V(t)$.

Possiamo interpretare questo osservando che la retta che congiunge i punti $P(t)$ e $P(t+h)$, come si vede dalla Fig. 9, converge, per $h \to 0$, alla retta tangente. Possiamo così concludere che:

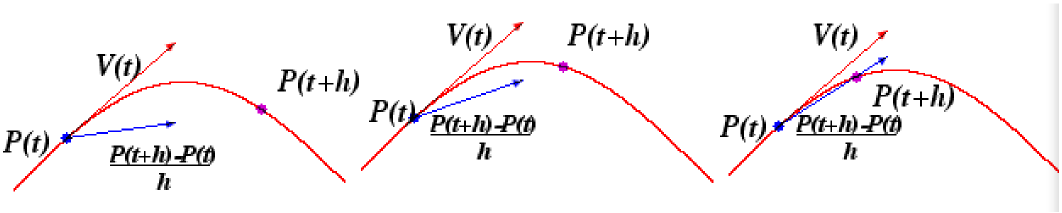

FIGURE 9

Teorema 4.16. *Sia data la curva $\mathcal{C}$ ed un suo punto P.* **Supponiamo** *che esista la retta tangente t in P. Preso un punto Q della curva, $Q \neq P$, consideriamo la retta r_{PQ} che congiunge i due punti. Al tendere di P a Q la retta r_{PQ} tende alla retta tangente.*

In formula

$$\lim_{Q \to P} r_{PQ} = t.$$

Come corollario di questo risultato otteniamo:

Corollario 4.17. *Il verso del vettore velocità $V(t)$ è quello di percorrenza della curva.*

Dimostrazione. Se $h > 0$, allora il vettore $P(t+h) - P(t)$ ha verso concorde con quello di percorrenza e dividendo per h il verso non cambia.

Invece, se $h < 0$, allora il vettore $P(t+h) - P(t)$ ha verso disconcorde con quello di percorrenza, ma il vettore $\frac{P(t+h)-P(t)}{h}$ ha verso opposto, cioè di nuovo concorde.

Quindi, comunque sia $h \neq 0$, $\frac{P(t+h)-P(t)}{h}$ ha verso concorde con quello di percorrenza. $\square$

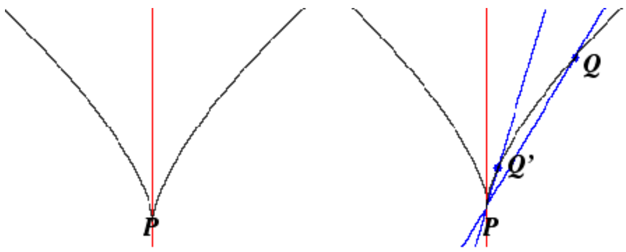

FIGURE 10

Esempio 4.18. *Ancora la cuspide.* Consideriamo la Fig. 10; da essa dovrebbe essere chiaro che all'avvicinarsi del punto Q sulla cuspide al vertice P, la retta r_{PQ} tende alla retta verticale t passante per P. Dunque

$$\lim_{Q \to P} r_{PQ} = t.$$

Potrebbe sembrare che ci sia una contraddizione con l'Esempio 4.9, dove abbiamo osservato che la cuspide non possiede tangente nel vertice P. In realtà dobbiamo semplicemente concludere che la proprietà del Teorema 4.16 è necessaria, ma non sufficiente, all'esistenza della tangente.

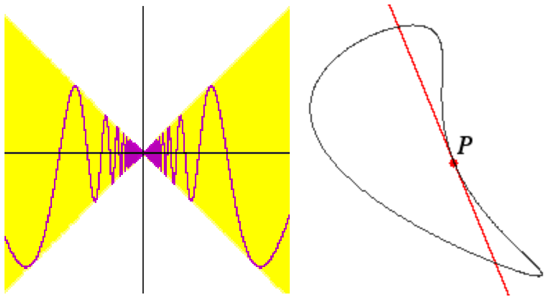

FIGURE 11. a - b

Vediamo un esempio in cui questa proprietà è utile:

Esempio 4.19. *Si consideri il grafico della funzione $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$. Vediamo che non esiste tangente nell'origine.*

Si osservi che

$$|f(x)| = |x\sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$$

quindi $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e dunque possiamo estenderla ad una funzione continua anche per $x = 0$. Inoltre la curva è compresa tra le bisettrici degli assi (la regione gialla in figura). Sia $P = (0, 0)$.

Come si vede dalla Fig. 11a il grafico di $f(x)$ tocca infinite volte, mentre x si avvicina a 0, le due bisettrici degli assi, quindi per infiniti valori di Q prossimi a P, la retta r_{PQ} coincide ora con l'una ora con l'altra bisettrice. Pertanto non esiste una posizione limite di r_{PQ}. Ma il Teorema 4.16 afferma che se esiste la tangente tale limite esiste, dunque dobbiamo concludere che non esiste la tangente in P.

4.7. **Tangenti alle coniche.** In questo paragrafo vediamo che la nozione di tangente introdotta in questo capitolo coincide, per le coniche, con la vecchia nozione introdotta a suo tempo. Cominciamo con la

Proposizione 4.20. *Supponiamo che*

(i) esista la retta tangente t alla curva $\mathcal{C}$ nel punto P,

(ii) non ci sia nessun segmento vicino a P che è contenuto nella curva

(iii) la curva $\mathcal{C}$ racchiuda una regione convessa.

Allora la retta tangente tocca la curva solo in P.

<u>Dimostrazione</u>. Prendiamo un punto Q sulla curva, $Q \neq P$, ma vicino a P. Poichè esiste la retta t tangente in P, la retta r_{PQ} tende a t. Sia A la regione racchiusa dalla curva. Poiché A è convesso taglia sulla retta r_{PQ} un segmento, che necessariamente è il segmento PQ. La lunghezza di questo segmento, quando Q tende a P converge a 0, quindi la retta tangente t interseca A, e quindi C, solo in P. □

In Fig. 11b si vede una curva che non soddisfa la condizione (iii) del Teorema ed è evidente che non solo la retta tangente nel punto P tocca la curva in 3 punti, ma nessuna retta passante per P tocca la curva solo in P.

Come sappiamo le equazioni

$$x = p\cos(t),\ \ y = q\sin(t)$$

sono le equazioni del moto di un punto che percorre un'ellisse di centro l'origine e semiassi p e q. Le funzioni $x(t) = p\cos(t),\ y(t) = q\sin(t)$ sono derivabili e

$$\frac{dx}{dt} = -p\sin(t),\ \frac{dy}{dt} = q\cos(t).$$

Queste sono a loro volta funzioni continue. Inoltre $sin^2(t) + cos^2(t) = 1$, dunque $sin(t)$, $cos(t)$ non sono mai contemporaneamente nulle. Così sono soddisfatte tutte le ipotesi del Teorema 4.12; ne viene che la retta tangente (nel senso della nuova definizione) all'ellisse nel punto $P(t)$ esiste.

L'iperbole ha equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

che può essere facilmente riscritta:

$$x = a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}} \text{ oppure } x = -a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}.$$

I due casi corrispondono ai due rami dell'iperbole e queste formule significano che possiamo considerare i due rami come grafici di funzioni della y. Sono funzioni derivabili, quindi per il Teorema 4.5 l'iperbole possiede la tangente (secondo la nuova definizione) in ogni punto. Lo stesso discorso vale per la parabola $y = 2px^2$.

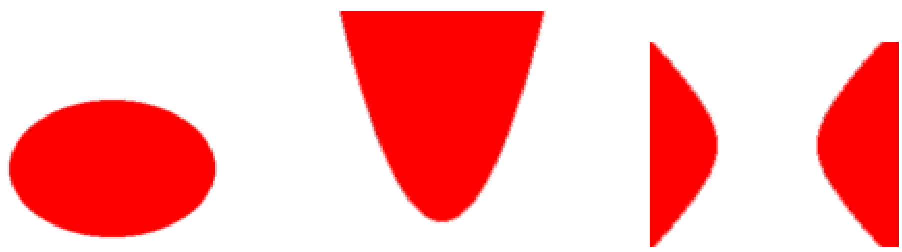

FIGURE 12

D'altra parte le regioni racchiuse dall'ellisse, da ciascuno dei due rami dell'iperbole e dalla parabola sono convesse (cfr. Fig. 12). Dunque le coniche non degeneri soddisfano tutte le ipotesi della Proposizione 4.20 (è chiaro che le coniche soddisfano l'ipotesi (ii)). Ne segue che ogni conica non degenere possiede tangente (secondo la nuova definizione) in ogni suo punto e che questa tangente tocca la conica in un solo punto; dunque essa è la tangente secondo la vecchia definizione.

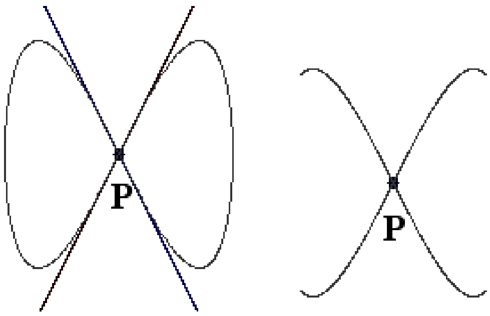

FIGURE 13. a - b

4.8. **Due tangenti: incrocio.** Una situazione delicata è quella in cui in un punto P si tagliano due archi di curva, ciascuno dei quali possiede in P una tangente (cfr. Fig. 13a). È evidente che la Definizione 4.1 non è soddisfatta, vale a dire se procediamo a degli ingrandimenti con centro nel punto P vediamo i due archi di curva adagiarsi sulle due "tangenti" per P e non su una sola retta.

La cosa migliore è considerare una regione vicina al punto P (cfr. Fig 13b) in cui si vedono due curve distinte che si tagliano in P ciascuna delle quali ha una tangente vera e propria in P.

La cosa non deve destare troppa preoccupazione, infatti la definizione di retta tangente è, come tutte le definizioni un modo per stabilire l'uso di una certa terminologia; perciò ogni definizione è almeno in parte una convenzione, uno strumento per intendersi.

5. Velocità e lunghezza di una curva. Versore tangente.

Vale la seguente formula

Teorema 5.1.

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \big|V(u)\big| du$$

Vale a dire: la lunghezza dell'arco di traiettoria percorso in un certo intervallo di tempo è pari all'integrale, nel medesimo intervallo, della lunghezza del vettore velocità.

Rinunciamo ad esporre la dimostrazione un po' troppo tecnica. Conviene piuttosto spendere un po' d'impegno a capire le conseguenze.

Innanzi tutto questa formula consente di determinare la lunghezza di una curva, mentre la Definizione 1.1 non è applicabile praticamente se non in casi molto particolari. Ci sono altre conseguenze per noi più rilevanti

Corollario 5.2. *(i) La lunghezza del vettore velocità è pari alla velocità, cioè*

$$\big|V(t)\big| = v(t).$$

(ii) Se il moto si svolge con velocità unitaria (cioè $v(t) = 1$ in ogni istante t) allora spazio percorso e tempo trascorso (dall'istante iniziale t_0) coincidono, cioè

$$s(t) = t - t_0.$$

Dimostrazione. (i) Il lettore ricorderà almeno questo: in generale per calcolare un integrale si procede così: dato l'integrale $\int_a^x f(u)du$ si cerca una funzione $F(u)$, detta primitiva, tale che $F'(u) = f(u)$ e riesce

$$\int_a^x f(u)du = F(x) - F(a).$$

Quindi derivando:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(u)du = F'(x) = f(x),$$

cioè *la derivata dell'integrale è la funzione integranda.*

Ricordiamoci la Definizione 3.2 di velocità:

$$v(t) := \frac{ds}{dt}(t)$$

Ma, per il Teorema 5.1, $s(t) = \int_{t_0}^t \left|V(u)\right|du$, quindi

$$\frac{ds}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^t \left|V(u)\right|du = \left|V(t)\right|.$$

(ii) Sia $v = 1$. Per l'affermazione (i): $v = |V|$; allora $s(t) = \int_{t_0}^t 1du = t - t_0$. $\square$

Dunque conosciamo tutto del vettore velocità $V(t)$: la direzione è quella della tangente, il verso è concorde con il verso di percorrenza della curva, la lunghezza è pari alla velocità $v(t)$. Naturalmente è per quest'ultimo fatto che l'abbiamo chiamato *vettore velocità*.

Definizione 5.3. *Si chiama* versore tangente *il vettore*

$$T(t) = \frac{1}{\left|V(t)\right|}V(t).$$

È un vettore di lunghezza 1, che ha la direzione della tangente in $P(t)$ e il verso concorde con quello di percorrenza.

Esempio 5.4. Nella sequenza in Fig. 14 è rappresentato un punto che si muove su una curva. Il vettore rosso è il vettore velocità $V(t)$, il vettore scuro è il versore tangente $T(t)$. Si noti come il vettore $V(t)$ si allunga nei rettilinei e si accorcia in curva, coerentemente con la velocità del punto.

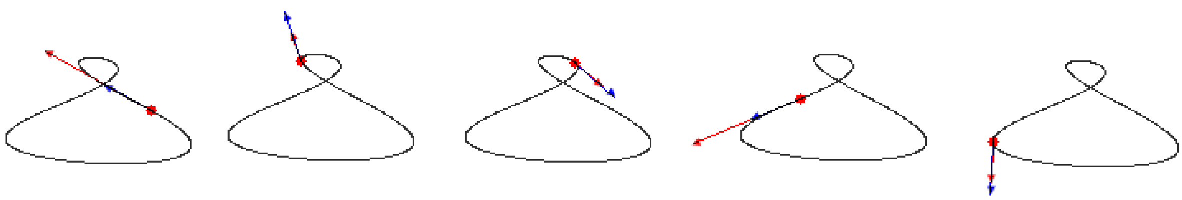

FIGURE 14. Aprire il file per vedere il filmato

Esempio 5.5. Supponiamo che la curva $\mathcal{C}$ sia percorsa da due punti distinti a velocità diverse. Ad esempio le equazioni

$$x(t) = cos(t),\ y(t) = sin(t)$$

e

$$x'(u) = cos(2u+),\ y'(t) = sin(2u+)$$

sono le equazioni del moto di due punti $P(t)$ e $P'(u)$ rispettivamente che percorrono la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 in modo diverso. Il loro moto è visibile aprendo il filmato della Fig. 15a (in figura sono visibili i due punti in un certo istante

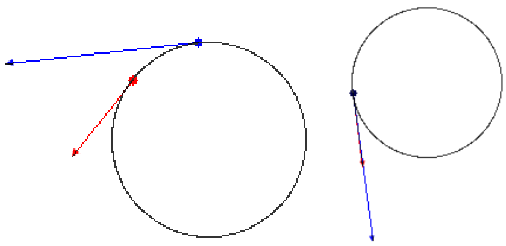

Figure 15. a - b Aprire il file per vedere il filmato

e i rispettivi vettori velocità). In particolare il secondo punto si muove a velocità doppia del primo, infatti

$$\left|\frac{dP}{dt}(t)\right| = \sqrt{sin^2(t) + cos^2(t)} = 1$$

e

$$\left|\frac{dP'}{du}(u)\right| = \sqrt{4sin^2(2u+3) + 4cos^2(2u+3)} = 2.$$

Assegnato un punto Q della circonferenza, questo sarà raggiunto in istanti diversi dai due punti mobili, cioè

$$Q = P(t_1) = P'(u_1)$$

per certi istanti $t_1 \neq u_1$. Tuttavia nel punto Q i vettori velocità $\frac{dP}{dt}(t_1)$ e $\frac{dP'}{du}(u_1)$ sono entrambi diretti come la tangente alla circonferenza e, poiché i punti si muovono entrambi in senso antiorario, i due vettori velocità hanno lo stesso verso (cfr. Fig. 15b). Ne segue che i versori tangenti, definiti nel punto Q dai due moti, coincidono. Naturalmente se uno dei due punti si muove in senso orario, il corrispondente versore tangente ha verso opposto. In conclusione

Osservazione 5.6. *Se una curva $\mathcal{C}$ è la traiettoria del moto di un punto $P(t)$ allora il versore tangente $T(t)$ è determinato, a meno del verso (che è concorde al verso del moto), dal punto $P(t)$ e non dal moto.*

Esercizio 5.7. Si consideri la curva in Fig. 16a. Sapendo che la curva è percorsa da sinistra verso destra si disegni nei punti indicati il versore tangente.

<u>Soluzione</u> I vettori da disegnare (vedi Fig. 16b) sono di lunghezza 1, tangenti alla curva e con il verso concorde al moto.

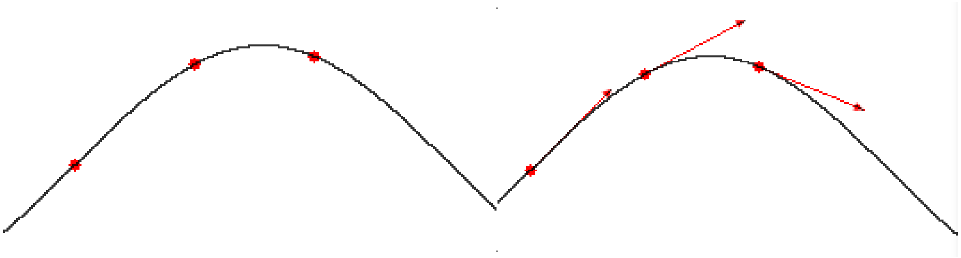

FIGURE 16. a - b

Osservazione 5.8. *Se la velocità v è unitaria, allora $|V| = v = 1$ e quindi $V(t) = T(t)$. In tal caso, a patto di scegliere l'istante iniziale del moto $t_0 = 0$, la lunghezza del percorso coincide con il tempo, cioè $s(t) = t$* (cfr. Corollario 5.2(ii))*; dunque non c'è nessun rischio di confusione indicando con la lettera s il parametro temporale, cioè scriveremo $P(s)$ invece di $P(t)$, $T(s) = V(s) = dP/ds$. L'uso della lettera s servirà a ricordarci che stiamo considerando un moto che ha velocità costante 1.*

6. Curvatura

Consideriamo le curve in Fig. 17a. . Le curve C e C' sono archi di circonferenza

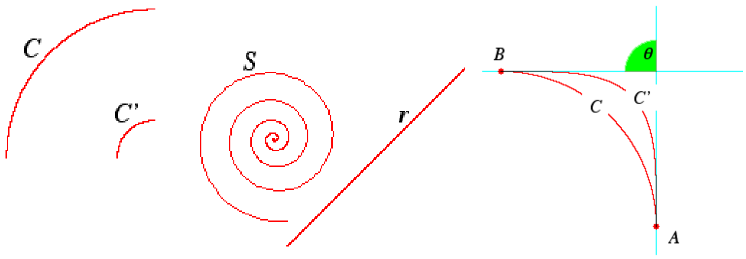

FIGURE 17. a - b

e, intuitivamente, C è *meno curva* di C'; la *curvatura* della spirale S aumenta avvicinandosi al *centro*; la retta r è *diritta* e quindi priva di *curvatura*. Vogliamo definire la nozione di curvatura in modo di dar conto di queste osservazioni grossolane.

6.1. **Curvatura media.** Consideriamo gli archi C e C' in Fig. 17b. Nei punti A e B gli archi hanno le stesse tangenti e passando da A a B la tangente gira di un angolo θ, ma la lunghezza di C è minore di quella di C' (è intuitivo, anche se per provarlo sarebbe necessaria qualche accortezza) quindi, in un certo senso, C impiega meno percorso a girare di θ e perciò è più curvo di C'. Questa affermazione può apparire strana, guardando la figura sembra quasi vero il contrario. Ma qui stiamo parlando di curvatura nel complesso di tutto l'arco, mentre il nostro sguardo si focalizza sulla parte centrale della curva. Possiamo formalizzare questa osservazione con la seguente

Definizione 6.1. *Sia $\mathcal{C}$ una curva e A, B due suoi punti. La* curvatura media *dell'arco AB è*

$$K(A, B) = \frac{\theta}{L(A, B)}$$

dove θ l'angolo formato dalle rette tangenti a $\mathcal{C}$ nei punti A e B e $L(A,B)$ è la lunghezza dell'arco.

Con riferimento alla Fig. 17b, possiamo ora dire confermare quello che dicevamo, poiché

$$\text{lunghezza di } \ C < \text{lunghezza di } \ C'$$

si ha:

$$\text{curv. media di } C = \frac{\theta}{\text{lunghezza di } \ C} > \frac{\theta}{\text{lunghezza di } \ C'} = \text{curv. media di } C'$$

Osservazione 6.2. Le rette tangenti nei punti A e B formano, ovviamente, quattro angoli, dua a due uguali; tuttavia come mostra la successione di immagini in Fig. 18 che rappresenta il moto di un punto, l'angolo che misura come "gira" la tangente è uno solo. Si noti anche che, invertendo il verso del moto, l'angolo da considerarsi è quello opposto al vertice, dunque uguale a questo. Pertanto non c'è ambiguità nella determinazione dell'angolo θ.

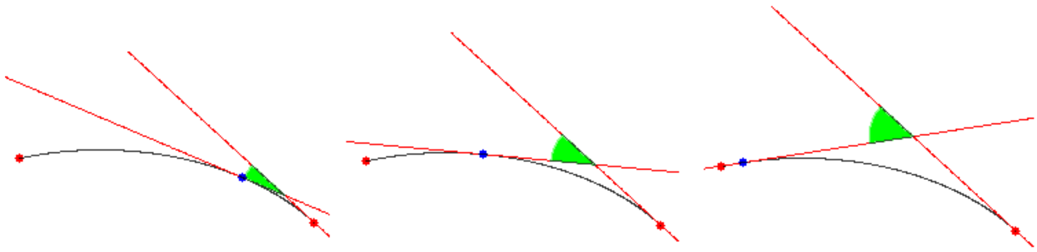

Figure 18

Esercizio 6.3. *Calcolare la curvatura media di un arco di circonferenza di raggio r.*

<u>Soluzione</u> Si osservi la Fig. 19; poiché le tangenti in A e B sono perpendicolari rispettivamente ai raggi OA e OB, l'angolo θ tra le tangenti è pari all'angolo tra i due raggi; l'arco AB è lungo $L(A,B) = r\theta$ (qui evidentemente θ è la misura in radianti dell'angolo).

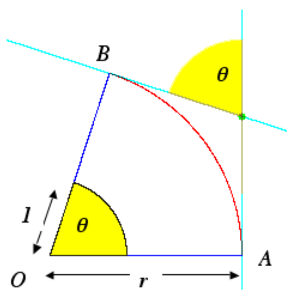

Figure 19

Quindi la curvatura media dell'arco AB è

$$K(A,B) = \frac{\theta}{L(A,B)} = \frac{\theta}{r\theta} = \frac{1}{r}.$$

Dunque *la curvatura media di una arco di circonferenza è il reciproco del raggio. In particolare essa non dipende dall'arco considerato.*[1]

Esempio 6.4. *Un segmento ha curvatura media nulla.* Infatti la tangente è diretta in ogni punto come il segmento e perci $\theta = 0$. Ne segue che anche la curvatura media è nulla.

6.2. **Curvatura in un punto.** Ritorniamo alla Fig. 17b: per gli archi C e C', come abbiamo osservato, vale $K(C) > K(C')$. Appare intuitivamente evidente che vicino agli estremi A e B l'arco C è più curvo di C', mentre nella parte mediana il più curvo è C'. Dunque la curvatura media non sembra sufficiente a dar conto di tutti i fenomeni. Analogamente a quanto fatto per la velocità, introduciamo la seguente

Definizione 6.5. *Dato un punto P di una curva, consideriamo la curvatura media di piccolo archi di curva che contengono P, il valore limite di tali curvature medie, al tendere della lunghezza di questi archi a zero, è, per definizione, la curvatura $K(P)$ nel punto P.*

La definizione di per sè non consente il calcolo se non in casi particolarissimi, vediamoli:

Esempio 6.6. *La retta ha curvatura K nulla in ogni punto.* Sia P un punto della retta, la curvatura $K(P)$ è il limite delle curvature medie dei segmenti che contengono P, al tendere della lunghezza del segmento a 0. Ma la curvatura media di un segmento è nulla; quindi $K(P) = 0$.

Esempio 6.7. *Tutti i punti di una circonferenza di raggio r hanno la stessa curvatura: $K = 1/r$.* Sia P un punto della circonferenza. Ogni archetto AB di circonferenza che contiene P ha curvatura media $K(A,B) = 1/r$. Passando al limite, quando l'arco AB si riduce al punto P, il valore della curvatura media resta costante e dunque $K(P) = \lim K(A,B) = 1/r$.

Come vedremo queste sono le uniche curve piane con curvatura costante.

[1] Si osservi che la curvatura è angolo/lunghezza quindi si può misurare in *radianti al metro* oppure in *gradi al metro*. Quando dico che la curvatura di un arco di circonferenza è $1/r$ intendo dire che se il raggio misura r metri allora la curvatura è di $1/r$ radianti al metro. Tutta questa osservazione può essere tranquillamente dimenticata, serve solo a capire che se misurassimo in gradi la curvatura sarebbe di $360/2\pi r$ gradi al metro, una bella schifezza!

6.3. **Calcolo della curvatura.** Per poter effettivamente calcolare la curvatura conviene descrivere la curva come traiettoria percorsa da un punto mobile $P(t)$; inoltre possiamo limitarci a considerare la curvatura media di piccoli archi che hanno $P(t)$ come estremo. Allora la curvatura in $P(t)$ sarà

$$K(P(t)) = \lim_{h\to 0} K(P(t), P(t+h)).$$

D'altra parte

$$K(P(t), P(t+h)) = \frac{\theta}{L(P(t), P(t+h))}$$

e quest'ultima espressione si semplifica se il moto si svolge a velocità 1, perché in tal caso $L(P(t), P(t+h)) = h$.

Come abbiamo già detto, quando il moto si svolge a velocità 1, scriviamo s al posto di t e dunque conviene riscrivere tutto da capo: il punto $P(s)$ percorre la curva e

$$K(P(s), P(s+h)) = \frac{\theta}{L(P(s), P(s+h))} = \frac{\theta}{h}.$$

Ora vogliamo calcolare

$$K(P(s)) = \lim_{h\to 0} K(P(s), P(s+h)) = \lim_{h\to 0} \frac{\theta}{h}.$$

Cerchiamo di valutare l'angolo θ tra le rette tangenti in $P(s)$ e in $P(s+h)$; cioè θ è l'angolo formato dai versori tangenti $T(s)$ e $T(s+h)$. Naturalmente conviene applicare entrambi i vettori in $P(s)$ (vedi Fig. 20a) per visualizzare meglio l'angolo. Servendoci della Fig. 20b valutiamo l'angolo θ. Poichè θ è la misura in radianti

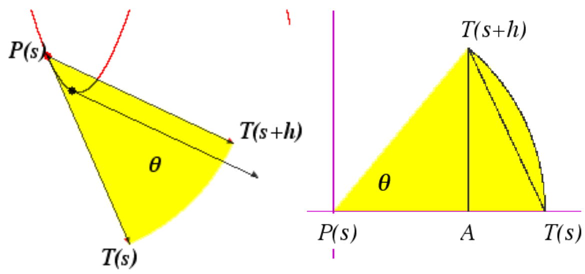

FIGURE 20. a - b

$$\theta = L(T(s), T(s+h)) \geq \big|T(s+h) - T(s)\big| \geq \sin(\theta)$$

e dividendo per $h > 0$ troviamo

$$\frac{\theta}{h} \geq \frac{\big|T(s+h) - T(s)\big|}{h} \geq \frac{\sin(\theta)}{h} = \frac{\sin(\theta)}{\theta}\,\frac{\theta}{h}\,.$$

Quando $h \to 0$ evidentemente $\theta \to 0$ e, come noto,

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1.$$

Pertanto, per il Teorema dei due carabinieri, $\frac{\theta}{h}$ e $\frac{\left|T(s+h)-T(s)\right|}{h}$ hanno lo stesso limite per $h \to 0$ e riesce:

$$K(P(s)) = \lim_{h\to 0} \frac{\theta}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\big|T(s+h) - T(s)\big|}{h} = \Big|\frac{dT}{ds}(s)\Big|.$$

Abbiamo così provato la seguente

Proposizione 6.8.

$$K(P(s)) = \left|\frac{dT}{ds}(s)\right|.$$

Vale a dire: se un punto percorre una curva a velocità 1, la curvatura è pari al modulo della derivata del versore tangente.

6.4. **Versore normale.**

Definizione 6.9. *Sia $\mathcal{C}$ la traiettoria descritta dal moto di un punto $P(t)$. Indichiamo con $N(t)$ il versore (cioè vettore di lunghezza 1), ortogonale al versore tangente $T(t)$, che si ottiene ruotando il versore tangente di $90°$ in senso antiorario.* Vale a dire che il versore $N(t)$ si trova alla sinistra (secondo il verso dipercorrenza) del versore $T(t)$). *Il versore $N(t)$ si chiama* versore normale *alla curva $\mathcal{C}$ nel punto $P(t)$.*

Come abbiamo già osservato il versore tangente $T(t)$ è univocamente individuato dal punto $P(t)$, fatto salvo per il verso che dipende dal verso del moto. Lo stesso vale per il versore normale $N(t)$.

Esercizio 6.10. *Si consideri la curva in Fig. 21a. Si disegni il versore normale nei punti indicati nell'ipotesi che la curva venga percorsa da sinistra verso destra.*

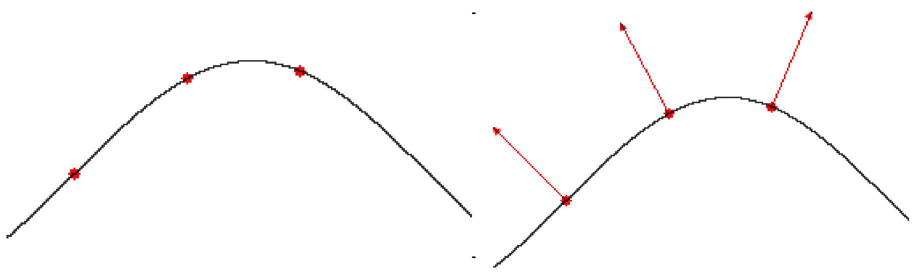

FIGURE 21. a - b

<u>Soluzione</u>. In Fig. 21b è proposta la soluzione.

6.5. **Curvatura e versore normale.** Consideriamo un punto $P(s)$ che si muove a velocità costante 1. Se applichiamo il versore tangente $T(s)$ in un punto fissato O, il secondo estremo del versore descrive una circonferenza di centro O e raggio 1. Per avere un'immagine concreta immaginiamo di guidare un'automobilina telecomandata e di avere uno strumento con un ago che indica in ogni istante la direzione dell'automobilina. Se il punto O è l'origine delle coordinate, allora il punto $T(s)$ si muove sulla circonferenza e il vettore $\frac{dT}{ds}(s)$ è il suo vettore velocità. Dunque il vettore $\frac{dT}{ds}(s)$ è tangente alla circonferenza e quindi ortogonale al raggio (cfr. Fig. 22). Pertanto entrambi i vettori

$$\frac{dT}{ds}(s),\ N(s)$$

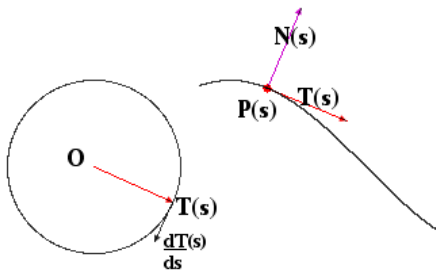

FIGURE 22

sono ortogonali al versore $T(s)$, dunque esiste un numero $k(s)$ tale che

$$\frac{dT}{ds}(s) = k(s)\ N(s).$$

Si osservi che in Fig. 22 il punto $P(s)$ sta girando verso destra, quindi il punto $T(s)$ sta girando in senso orario sulla circonferenza, dunque $\frac{dT}{ds}(s)$ e $N(s)$ hanno verso opposto, pertanto $k(s) < 0$. Al contrario se il punto $P(s)$ stesse girando verso sinistra, allora il punto $T(s)$ si muoverebbe sulla circonferenza in senso antiorario e dunque $\frac{dT}{ds}(s)$ e $N(s)$ avrebbero lo stesso verso e quindi $k(s) > 0$.

Possiamo dunque concludere:

Proposizione 6.11. *Se $P(s)$ si muove a velocità costante 1, allora esiste una funzione $k(s)$ tale che*

$$\frac{dT}{ds}(s) = k(s)\ N(s).$$

Inoltre il segno di $k(s)$ è positivo o negativo a seconda che il punto $P(s)$ giri verso sinistra, rispettivamente verso destra.

Se confrontiamo questo risultato con la formula (cfr. Proposizione 6.8)

$$K(s) = \left|\frac{dT}{ds}(s)\right|$$

concludiamo che

$$\left|k(s)\right| = K(s)$$

e quindi possiamo chiamare $k(s)$ la *curvatura con segno* della traiettoria $\mathcal{C}$ nel punto $P(s)$.

7. Curvatura e forma della curva

Come detto nella Proposizione 6.11 il segno della curvatura $k(s)$ indica se il punto $P(s)$ sta girando verso sinistra ($k(s) > 0$) o verso destra ($k(s) < 0$). Esaminiamo in dettaglio la questione.

Se la curva è, come conviene supporre, abbastanza regolare, allora la curvatura $k(s)$ è una funzione continua; quindi, se è positiva (negativa) in un certo punto, lo è anche nei punti vicini; al contrario, se $k(s_0) = 0$ in un certo punto $P(s_0)$, allora si presentano diverse possibilità. Cominciamo dal primo caso.

Proposizione 7.1. *Se in un certo punto della traiettoria la curvatura (con segno) è positiva (risp. negativa), allora esiste un arco di curva, intorno al punto, che sta tutto sulla sinistra (risp. destra) della retta tangente e la tocca solo nel punto (destra e sinistra vanno intese rispetto al verso del moto).*

Nota. La curva Fig. 23a viene percorsa da sinistra verso destra;

• nel punto $P(s_0)$ la curvatura $k(s_0) > 0$ e l'arco di curva compreso nella zona grigia vicino a $P(s_0)$ è tutto alla sinistra della tangente;

•nel punto $P(s_1)$ si ha $k(s_1) < 0$ e l'arco di curva compreso nella zona grigia vicina a $P(s_1)$ è tutto alla destra della tangente.

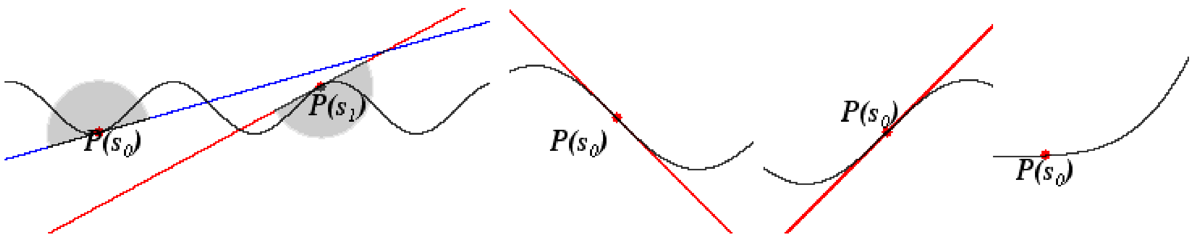

Figure 23. a - b - c - d

Si noti che, almeno vicino al punto, la retta tangente si comporta come nel caso delle coniche: lascia la curva tutta da una parte.

Come detto, se la curvatura $k(s_0) = 0$, allora si possono avere diversi casi:

• la funzione $k(s)$ è crescente in s_0 (cioè negativa per $s < s_0$ e positiva per $s_0 < s$); allora la traiettoria fa una curva ad esse (prima a destra poi a sinistra) e il punto $P(s_0)$ è il punto di raccordo delle due curve. In questo caso la tangente taglia la curva (Fig. 23b)

• lo stesso caso precedente, ma invertito: $k(s)$ è decrescente in s_0 e la curva ad esse è prima a sinistra e poi a destra (Fig. 23c)

• raccordo tra rettilineo e curva: ad esempio $k(s) = 0$ per $s \leq s_0$ e poi $k(s) > 0$ per $s_0 < s$, allora la traiettoria è rettilinea prima di $P(s_0)$, poi fa una curva a sinistra (Fig. 23d). Naturalmente il rettilineo può venire dopo e la curva essere verso sinistra o verso destra.

• la curvatura $k(s)$ è sempre positiva (negativa), tranne che in s_0 in cui si annulla. Vedremo questo caso in dettaglio più avanti (cfr. Esercizio 9.5).

8. La curvatura determina la curva

8.1. **Velocità negativa.** Fino ad ora abbiamo considerato moti che avvengono sempre nello stesso verso. Ricordo che la funzione $s(t)$, definita da $s(t) = L\big(P(0), P(t)\big)$, è la lunghezza dell'arco di traiettoria compreso tra la posizione iniziale $P(0)$ e la posizione $P(t)$ all'istante t. Se il moto si svolge in una sola direzione allora al crescere del tempo t, il valore $s(t)$ cresce. D'altra parte la condizione che il moto avvenga sempre nello stesso verso è essenziale affinché valga il Teorema 4.20 che dice $s(t) = \int_0^t |V(u)|du$; infatti, poiché $|V(u)| \geq 0$, la funzione $s(t)$ è non decrescente.

Naturalmente un punto si può muovere avanti e in dietro lungo una curva $\mathcal{C}$ e per descrivere questo moto conviene prefissare un verso su $\mathcal{C}$, in modo che sia possibile assegnare un segno alla lunghezza degli archi di curva. Precisamente, presi due punti A, B di $\mathcal{C}$, la lunghezza $L(A, B)$ sarà positiva o negativa a seconda che A venga prima o dopo B nel verso prefissato su $\mathcal{C}$.

Ad esempio i romani ponevano le pietre migliari sulle strade numerandole a partire da Roma. Prefissato così il senso di percorrenza sulla via Aurelia, se R sta per Roma, T per Tarquinia (100 km da Roma) e C per Carrara (400 km da Roma), sarà $L(C, T) = -300$ (misura in km).

Ne segue che se un punto si muove sulla curva a partire, all'istante 0, dal punto $P(0)$, in ogni istante $t > 0$ successivo sarà:

$$s(t) = L\big(P(0), P(t)\big) > 0 \text{ oppure } s(t) = L\big(P(0), P(t)\big) < 0$$

a seconda che $P(t)$ si trovi da un a parte o dall'altra della curva rispetto al punto di partenza.

Ad esempio se partiamo da Tarquinia alle ore 0 e alle ore 2 siamo a Roma sarà $s(2) = L(T, R) = -100$, perché la funzione $s(t)$ misura negativamente il percorso fatto in senso opposto a quello prefissato. Se invece andiamo verso nord e alle 2 siamo a Carrara, sarà $s(2) = L(T, C) = 300$.

Dunque la funzione $s(t)$ sarà (come abbiamo già osservato) crescente se $P(t)$ si sta muovendo concordemente al verso prefissato, decrescente nel caso opposto. E quindi la velocità $v(t) = \frac{ds}{dt}(t)$ sarà positiva o negativa nei due casi.

8.2. **La velocità determina il moto se la traiettoria è prefissata.** Supponiamo di sapere che un auto è partita da Parma alle ore 9 per andare a Borgotaro. Conosciamo perfettamente il percorso dell'auto e sappiamo che l'auto si è mossa velocità costante $v(t) = 60$ km/h. Allora siamo sicuri che alle ore 9 e 13 minuti, l'auto aveva percorso 13 km e dunque possiamo determinare con precisione la sua posizione in quell'istante.

Se la velocità dell'auto varia, ma ci è perfettamente nota, vale a dire conosciamo, in ogni istante t la velocità $v(t)$, possiamo ancora determinare la posizione dell'auto all'istante t. Precisamente:

Proposizione 8.1. *Sia data una curva $\mathcal{C}$ e sia prefissiato su di essa un verso. Consideriamo un punto mobile $P(t)$ che si muove su $\mathcal{C}$. Supponiamo di conoscere*
- *il punto di partenza $P(0)$*

e
- *in ogni istante t la velocità $v(t)$ del punto.*

Allora è completamente determinata la posizione $P(t)$ del punto in ogni istante.

Dimostrazione. Conosciamo $v(t)$. Da $\frac{ds}{dt}(t) = v(t)$, segue

$$s(t) = \int_0^t v(u)du.$$

Dunque conosciamo $s(t)$. Ma

$$s(t) = L\big(P(0), P(t)\big).$$

Dunque il punto $P(t)$ è tale che l'arco $P(0)P(t)$ ha lunghezza $|s(t)|$. Inoltre dal segno di $s(t)$ sappiamo se $P(t)$ viene prima o dopo $P(0)$, rispetto al verso di percorrenza prefissato. Dunque $P(t)$ è completamente determinato. $\square$

Esercizio 8.2. *Il punto $P(t)$ percorre l'asse delle ascisse verso destra e parte all'istante 0 dall'origine con velocità $v(t) = t + t^3$. Determinare la posizione del punto $P(t)$ in ogni istante.*

Soluzione. Risulta

$$s(t) = \int_0^t v(u)du = \int_0^t u + u^3 \; du = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}.$$

Vale a dire all'istante t il punto ha percorso un segmento lungo $\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}$. Pertanto si trova nel punto $P(t)$ di ascissa $\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}$.

Osservazione 8.3. Da $ds/dt = v$ si ricava subito che:
se la velocità si annulla in un certo istante t_0, allora $s(t)$ ha un minimo o un massimo relativo in t_0 e quindi il punto $P(t)$ sta invertendo il senso di marcia, oppure $s(t)$ ha un flesso: il punto rallenta fino ad avere velocità 0, ma poi prosegue.

Vediamo un esempio di quest'ultima situazione:

Esempio 8.4. Consideriamo un punto $P(t)$ che si muove sulla curva $\mathcal{C}$ in Fig. 24. Sia $Q(t)$ la sua proiezione sulla verticale (asse delle ordinate). Indichiamo con

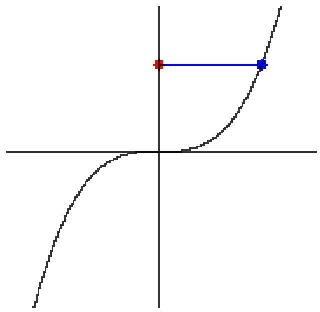

Figure 24. Apri il filmato

$\big(x(t), y(t)\big)$ le coordinate di $P(t)$, allora $Q(t) = \big(0, y(t)\big)$. Supponiamo che $P(t_0)$ sia il punto della curva $\mathcal{C}$ in cui la tangente è orizzontale, allora il suo vettore velocità

$$V_P(t_0) = \big(\frac{dx}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0)\big)$$

ha direzione orizzontale e quindi ha la seconda componente nulla, cioè

$$\frac{dy}{dt}(t_0) = 0.$$

Ma questo vuol dire che il vettore velocità del punto Q è

$$V_Q(t_0) = \big(0, \frac{dy}{dt}(t_0)\big) = (0, 0)$$

e quindi la velocità $v_Q(t_0) = |V_Q(t_0)|$ di Q all'istante t_0 è nulla.

La cosa interessante è che questo non dipende da come P si muove sulla curva e che *la velocità di Q può essere nulla all'istante t_0 anche se non esiste un piccolo intervallo in cui il punto Q sia fermo.*

Forse potete usarla come giustificazione se un vigile vi rimprovera di non esservi fermati ad uno stop!

In particolare se il punto P, come nel filmato, si muove sempre nella stessa direzione, lo stesso fa Q, quindi la funzione $s_Q(t)$ è crescente o decrescente, ma $ds_Q/dt = v_Q$, dunque la derivata si annulla in t_0 e la funzione $s_Q(t)$ ha un flesso in t_0.

Esempio 8.5. *Il punto $P(t)$ percorre una circonferenza di raggio 1 e centro l'origine a partire dal punto $P(0) = (1,0)$, in senso antiorario con velocità $v(t) = t$. Determinare la posizione del punto $P(t)$ in ogni istante.*

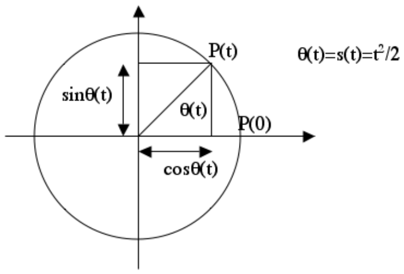

FIGURE 25

Soluzione. Risulta
$$s(t) = \int_0^t v(u)du = \int_0^t u\ du = \frac{t^2}{2}.$$
Nota la lunghezza $s(t)$ dell'arco $P(0), P(t)$ troviamo il punto $P(t)$. La lunghezza dell'arco di circonferenza $P(0)P(t)$ è pari all'angolo $\theta(t)$ (misurato in radianti) che l'asse delle ascisse forma con il raggio $OP(t)$ (vedi Fig. 25). Cioè
$$s(t) = \theta(t).$$
Quindi il punto $P(t)$ ha coordinate:
$$P(t) = \big(cos\theta(t), sin\theta(t)\big) = \big(cos(s(t)), sin(s(t)\big) = \big(cos\frac{t^2}{2}, sin\frac{t^2}{2}\big).$$

8.3. **Il vettore velocità determina la curva.**

Proposizione 8.6. *Consideriamo un punto P che si muove e supponiamo di conoscere*
- *il punto di partenza $P(0)$,*

e
- *in ogni istante t il vettore velocità $V(t)$.*

Allora conosciamo la posizione $P(t)$ del punto in ogni istante.

N.B. La conclusione delle Proposizioni 8.1 e 8.6 è la stessa: *possiamo determinare la posizione del punto in ogni istante.* Ma le ipotesi sono diverse: nel primo caso conosciamo la traiettoria e la velocità in ogni istante, nel secondo il vettore velocità in ogni istante; in entrambi i casi conosciamo la posizione iniziale.
Dimostrazione. Da
$$\frac{dP}{dt}(t) = V(t)$$

segue

$$P(t) = \int_0^t V(u)\ du + P(0).$$

Dunque $P(0)$ e la conoscenza di $V(t)$ per ogni t, ci forniscono $P(t)$. $\square$

8.4. **La curvatura determina la curva.** Enunciamo subito questo importante

Teorema 8.7. *Sia data una funzione $k(s)$. Siano inoltre assegnati un punto $P(0)$ e un versore $T(0)$. Allora esiste un unico moto $P(s)$ che si svolge a velocità 1, con punto di partenza $P(0)$, direzione e verso iniziali $T(0)$ e che abbia in ogni istante s la curvatura $k(s)$.*

Immaginiamo di posizionare un'automobilina telecomandata in un certo punto e disposta in una certa direzione. Il Teorema afferma che se muoviamo l'automobilina a velocità 1 allora c'è un unico modo di muovere il volante affinchè all'istante s la curvatura della traiettoria nel punto $P(s)$ sia $k(s)$.

Oppure prendiamo un metro da sarto, costituito da una fettuccia che possiamo disporre sul piano nella forma che vogliamo. Inchiodiamo il primo estremo nel punto $P(0)$ e disponiamo il primo tratto di metro in modo tale che sia tangente al versore $T(0)$ assegnato e nello stesso verso. Il Teorema afferma che, assegnata la funzione $k(s)$ c'è una unica maniera di disporre il metro sul piano in modo che $k(s)$ sia la curvatura del punto $P(s)$. Si noti che s è la lunghezza dell'arco $P(0)P(s)$, cioè $P(s)$ è il punto del metro in cui sono segnati s mm. (o cm.a seconda dell'unità di misura).

Un altro modo per esprimere questo risultato è il seguente. Realizziamo due curve in fil di ferro che hanno la stessa funzione curvatura, e spostiamole rigidamente in modo da far coincidere il primo estremo delle due curve e la direzione della tangente in quel punto. Allora le due curve coincidono.

Dimostrazione. Come già osservato se immaginiamo di applicare il versore $T(s)$ nell'origine, il punto $T(s)$ percorre la circonferenza unità, su cui possiamo assumere come positivo il verso antiorario. Da

$$\frac{dT}{ds}(s) = k(s)N(s)$$

segue che la velocità $v_T(s)$ del punto $T(s)$ è proprio $k(s)$.

Dunque del punto $T(s)$ conosciamo la traiettoria (la circonferenza unità), la posizione iniziale $T(0)$ e la velocità $k(s)$. Pertanto, per la proposizione 8.1, possiamo determinare il versore $T(s)$ in ogni istante.

Ma il vettore velocità del punto $P(s)$ è

$$V(s) = \frac{dP}{ds} = T(s).$$

Dunque conosciamo il punto di partenza $P(0)$ e il vettore velocità $V(s)$, pertanto per la Proposizione 8.6 possiamo determinare, in ogni istante s, la posizione del punto $P(s)$. $\square$

Corollario 8.8. *Le uniche curve con curvatura costante sono le circonferenze e la retta. Precisamente l'unica traiettoria con curvatura $k > 0$ (risp. $k < 0$) è la circonferenza di raggio $1/|k|$ percorsa in senso antiorario (risp. orario). L'unica curva con curvatura nulla è la retta.*

Esempio 8.9. Come applicazione del Teorema 8.7 vediamo come è fatta la curva $\mathcal{C}$ che è assegnata con i seguenti dati: $P(0)$ è l'origine, $T(0)$ è il versore dell'asse delle ascisse (diretto verso destra), la curvatura è $k(s) = s$. La curva $\mathcal{C}$ è rappresentata[2] in Fig. 26. La forma della curva non deve stupire. Per $s > 0$ e piccolo, la curva ha

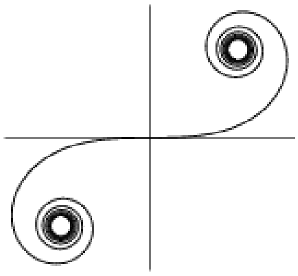

FIGURE 26

curvatura piccola e gira dolcemente verso sinistra partendo dall'origine in direzione tangente all'asse delle ascisse. Se da un certo $s_0 > 0$ in poi la curvatura fosse costante (cioè $k(s) = k(s_0)$, per $s > s_0$), allora la traiettoria sarebbe, da $P(s_0)$ in poi, una circonferenza; invece $k(s)$ continua a crescere, quindi la curva, per $s > s_0$, è più curva di questa circonferenza. Questo spiega perché la curva si avvolge in una spirale sempre più stretta. Analogo ragionamento per $s < 0$.

8.5. **Accelerazione.** La relazione

$$\frac{dT}{ds}(s) = k(s)N(s)$$

consente di calcolare la curvatura, tuttavia ben raramente si ha disposizione un moto che avviene a velocità 1, come richiesto dalla formula. Le considerazioni necessarie a ricavare un metodo di più facile applicazione sono interessanti di per sè e dunque vale la pena di esporle.

8.5.1. *Stato di quiete e di moto rettilineo uniforme.* Uno degli aspetti fondamentali della rivoluzione, rispetto alle concezioni dell'antichità, attuata da Galileo e Newton, consiste nel considerare il moto rettilineo uniforme, cioè a velocità costante, alla stregua dello stato di quiete; così come in generale non andiamo ad indagare le ragioni per cui un corpo è fermo (a meno che non ci siano precisi motivi per farlo, come ad esempio il caso di un corpo posto su di un piano inclinato, che per attrito resta fermo) allo stesso modo non dobbiamo indagare il perché un corpo che si trova in moto rettilineo uniforme permane in quel moto.

Questa concezione non corrisponde per nulla alle nostre percezioni, infatti una boccia che sia fatta rotolare in piano, prima o poi si ferma e constatiamo che la velocità che ha la boccia nel momento che lascia la nostra mano diminuisce fino all'arresto. Anzi la lunghezza del percorso dipende dalla velocità iniziale. (Tuttavia esperimenti più raffinati, che riducono grandemente l'attrito - ad esempio un disco lanciato su di un piano ghiacciato e levigato - consentono di verificare che per un certo tratto la velocità si mantiene inalterata). La comprensione dei moti viene

[2]Purtroppo è piuttosto difficile risolvere il problema di determinare espilcitamente l'equazione di questa curva e quindi non possiamo farlo in questa sede.

mutata radicalmente; a titolo esemplificativo se ruotando il braccio lanciamo un sasso, esso compirà inizialmente un moto circolare solidalmente con la nostra mano, e nell'istante in cui lo lasciamo andare si dirigerà in direzione tangenziale a questa circonferenza, con la velocità che avevano mano e sasso in quell'istante; solo la forza di gravità, l'attrito con l'aria e l'urto con il terreno interverranno a modificarne e infine ad arrestare il moto.

Il moto è rettilineo se la tangente alla traiettoria è sempre la stessa, cioè se il vettore velocità $V(t)$ ha direzione costante. Il moto è rettilineo uniforme se, in più, anche la velocità, si mantiene costante, cioè la lunghezza $|V(t)|$ del vettore velocità è costante. Dunque *rettilineo* + *uniforme* = *il vettore velocità* $V(t)$ *è costante.*

In particolare lo stato di quiete si ha quando $V(t) = 0$. Questa osservazione consente di accumunare lo stato di quiete al moto rettilineo uniforme: sempre di vettore velocità costante si tratta e con ciò spiega quanto dicevamo circa la concezione galileiana.

8.5.2. *Accelerazione e forza.* Un corpo che non si trova nè in stato di quiete, nè in stato di moto rettilineo uniforme, deve trovarsi soggetto a qualche perturbamento che causa il mutare nel tempo del vettore velocità $V(t)$. Individuiamo una grandezza che misura la variazione del vettore velocità.

Definizione 8.10. *Il vettore accelerazione* $A(t)$ *di un punto* $P(t)$ *in moto è:*

$$A(t) := \frac{dV}{dt}(t).$$

Ovviamente $V(t)$ è costante se e solo se il vettore accelerazione $A(t)$ è sempre nullo. Il perturbamento dello stato di quiete o di moto rettilineo uniforme è dovuto alla presenza di accelerazione.

Si osserva sperimentalmente che medesime cause producono su corpi di massa diversa effetti diversi. Precisamente l'accelerazione impressa ad un corpo è, a parità di causa, inversamente proporzionale alla sua massa m. Matematicamente a queste cause dell'accelerazione si dà il nome di forza. La relazione che lega la forza alla massa è

$$F = mA$$

Si noti che poiché l'accelerazione un vettore e la massa uno scalare, anche la forza F un vettore.

Teorema 8.11. Formula per l'accelerazione *Sia dato un punto* $P(t)$ *in moto. Allora*

$$A = \frac{dv}{dt}T + kv^2N$$

Rinunciamo alla dimostrazione, ma cerchiamo di capire cosa dice la formula: possiamo decomporre il vettore accelerazione $A(t)$ all'istante t come somma di due vettori: una

$$\text{componente tangenziale } = \frac{dv}{dt}T$$

che dipende dalla variazione della velocità e una

$$\text{componente normale } = kv^2N$$

che dipende dalla curvatura e dal quadrato della velocità.

Supponiamo di tenere un sasso con una fune e di farlo ruotare a velocità costante. Il sasso descrive una circonferenza di curvatura $1/R$ dove R è la lunghezza della fune. La componente tangenziale è assente. Se il sasso ruota in senso antirorario allora il versore N è diretto verso il centro (la mano che tiene la fune) e la curvatura $k = 1/R$ è positiva; se ruota in senso antiorario (per es. teniamo la fune con la mano sinistra) allora il versore N (che è sempre alla sinistra di T) è diretto verso l'esterno della circonferenza, ma $k = -1/R$ è negativa. Dunque kv^2N è sempre diretta verso il centro. Questo significa che per far ruotare il sasso dobbiamo esercitare una forza diretta (ovviamente) verso il centro (a trattenere il sasso) proporzionale al quadrato della velocità e inversamente proporzionale alla lunghezza della fune.

Se poi vogliamo aumentare la velocità dobbiamo esercitare una forza che non dipende dalla lunghezza della fune (tuttavia si osservi che stiamo misurando la velocità linearmente, se invece ragioniamo in termini di giri al minuto sarà più facile aumentare il numero di giri se la fune è corta, perché la circonferenza percorsa è piú breve e un piccolo aumento della velocità lineare può significare svariati giri al minuto).

Veniamo a ciò che più ci interessa.

Corollario 8.12.

$$k = \frac{A.N}{v^2}.$$

Dimostrazione. Segue dalla formula precedente: moltiplicando (prodotto scalare) per N si trova:

$$A.N = \frac{dv}{dt}\ T.N + kv^2N.N,$$

ma $T.N = 0$ perché i due versori sono perpendicolari e $N.N = 1$, perché N è lungo 1. Quindi

$$A.N = kv^2$$

□

9. Formule per il calcolo della curvatura. Esempi.

Dalla formula

$$A = kv^2N + \frac{dv}{dt}T$$

abbiamo ricavato

$$k = \frac{A.N}{v^2}.$$

Quest'ultima formula è quella che viene in pratica applicata. Possiamo riscriverla in una forma più espilicita:

Proposizione 9.1. *Se le equazioni del moto sono*

$$x = x(t),\ \ y = y(t),$$

allora la curvatura nel punto $P(t)$ è

$$k(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\big((\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2\big)^{3/2}}. \tag{9.1}$$

Nel caso particolare in cui la curva sia un grafico si ottiene:

Proposizione 9.2. *Se $\mathcal{C}$ è il grafico della funzione $f(x)$ allora la curvatura di $\mathcal{C}$ nel punto $(x, f(x))$ è*

$$k(x) = \frac{f''(x)}{\left(1 + (f'(x))^2\right)^{3/2}}. \tag{9.2}$$

Cominciamo a studiare la curvatura di tre curve: la parabola $\mathcal{P}$ di equazione $y = x^2$, la cubica $\mathcal{C}$ di equazione $y = x^3$ e la quartica $\mathcal{Q}$ di equazione $y = x^4$ (cfr. Fig: 27).

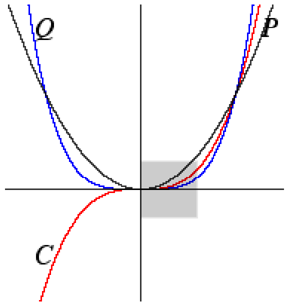

FIGURE 27

Esercizio 9.3. *Utilizzando la Fig. 27 tracciare approsimativamente il grafico della curvatura della parabola $\mathcal{P}$ di equazione $y = x^2$.*

<u>Soluzione</u>. Percorrendo la curva da sinistra verso destra si gira a sinistra, quindi la curvatura $k(x)$ nel punto $(x, f(x))$ è sempre positiva. Si vede che la curvatura è massima nell'origine, mentre allontanandosi verso le estremità la curva si raddrizza sempre di più, quindi

$$\lim_{x \to \pm\infty} k(x) = 0.$$

Inoltre l'asse delle ordinate è un asse di simmetria della curva, dunque

$$k(x) = k(-x)$$

pertanto la funzione $k(x)$ avrà un andamento del tipo rappresentato[3] in Fig. 28a.

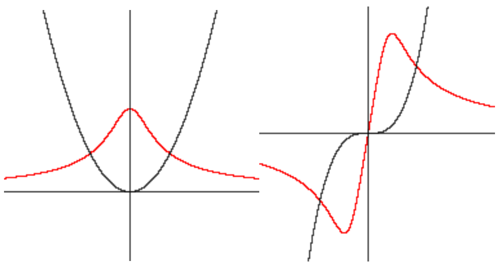

FIGURE 28. a - b

[3]In realtà la Fig. 28 è stata realizzata utilizzando la formula (9.2), da cui si ricava:

$$k(x) = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

(infatti, $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$ e $f''(x) = 2$).

Esercizio 9.4. *Utilizzando la Fig. 27 tracciare approsimativamente il grafico della curvatura della cubica $\mathcal{C}$ di equazione $y = x^3$.*

Soluzione. Percorrendo la curva da sinistra verso destra si gira prima e destra, poi passata l'origine, si gira a sinistra. Quindi

$$k(x) \begin{cases} < 0 \text{ se } x < 0 \\ = 0 \text{ se } x = 0 \\ > 0 \text{ se } x > 0 \end{cases}.$$

Allontanandosi verso le estremità la curva si raddrizza sempre di più, quindi

$$\lim_{x \to \pm\infty} k(x) = 0.$$

Inoltre l'origine è centro di simmetria della curva, dunque

$$k(x) = -k(-x)$$

pertanto la funzione $k(x)$ avrà un andamento del tipo rappresentato[4] in Fig. 28b.

Esercizio 9.5. *Utilizzando la Fig. 27 e l'esercizio precedente, tracciare approsimativamente il grafico della curvatura della quartica $\mathcal{Q}$ di equazione $y = x^4$.*

Soluzione. A prima vista sembrerebbe che l'andamento della curvatura della quartica $\mathcal{Q}$ debba essere simile a quello della parabola $\mathcal{P}$. In effetti la curva gira sempre a sinistra, quindi la curvatura è positiva. La curva è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, quindi

$$k(x) = k(-x).$$

Inoltre la curva si raddrizza alle estremità, quindi

$$\lim_{x \to \pm\infty} k(x) = 0.$$

Tuttavia appare evidente che ci sono due punti A e B, simmetrici rispetto all'asse delle ordinate in cui la curvatura è massima. Quindi c'è un punto di minimo tra A e B che per ragioni di simmetria è sull'asse delle ordinate. Pertanto il grafico della curvatura dovrebbe avere l'andamento in Fig. 29a. In realtà se si utilizza la

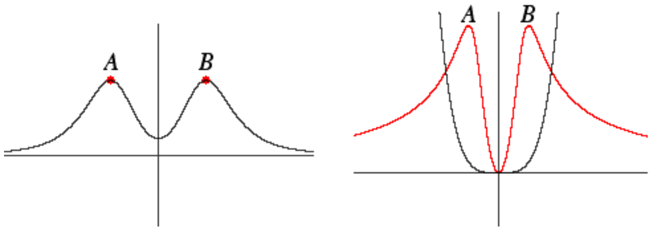

FIGURE 29

[4]In realtà la Fig. 28b è stata realizzata utilizzando la formula (9.2), da cui si ricava

$$k(x) = \frac{6x}{(1 + 9x^4)^{3/2}}$$

(infatti, $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ e $f''(x) = 6x$).

formula (9.2) si ottiene

$$k(x) = \frac{12x^2}{\left(1+16x^9\right)^{3/2}}$$

(infatti $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$ e $f''(x) = 12x^2$); perciò il valore minimo nell'origine è $k(0) = 0$. In Fig. 29b è rappresentata la curva $\mathcal{Q}$ e l'esatta curvatura $k(x)$.

Cerchiamo di capire con un ragionamento qualitativo perché la quartica $\mathcal{Q}$ ha nell'origine un punto di curvatura 0. Confrontiamo la cubica $\mathcal{C}$ e la quartica $\mathcal{Q}$ nella regione immediatamente a destra dell'origine (la zona grigia di Fig. 27). Si vede che la curvatura della quartica è inferiore a quella della cubica, ma sappiamo che la cubica ha curvatura 0 nell'origine, perché questa è un punto di flesso. Dunque a maggior ragione la quartica ha curvatura 0 nell'origine.

L'esempio della quartica $\mathcal{Q}$ è interessante, perché, come avevamo preannunciato, mostra come la curvatura possa annullarsi anche se la curva continua a girare nello stesso verso (cioè anche in assenza di una curva a esse).

Esempio 9.6. *Siamo in grado di trattare in modo preciso l'esempio della Fig. 17b costituito dai due archi $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ che congiungono i punti A e B e hanno negli estremi le stesse tangenti.*

In Fig. 30a sono rappresentati i due archi e in Fig. 30b i grafici delle loro curvature. L'arco $\mathcal{C}$ è un'arco di circonferenza (di raggio 1) e dunque la sua curvatura è costante (uguale a 1). (L'arco $\mathcal{C}'$ ha equazione:

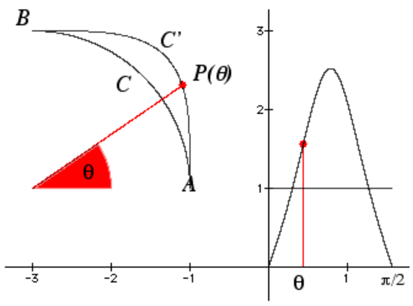

FIGURE 30. a - b

$$x(t) = \sqrt{cos(t)},\ \ y(t) = \sqrt{sin(t)}.$$

Per tracciare il grafico della curvatura si è si utilizzata la formula (9.1)).

Esempio 9.7. *Determiniamo la curvatura dell'ellisse.*

Consideriamo un punto $P(t)$ che percorre l'ellisse; l'equazioni del suo moto si trovano considerando le equazioni parametriche dell'ellisse:

$$x(t) = pcos(t),\ \ y(y) = qsin(t),$$

dove $p \geq q > 0$ sono le lunghezze dei semiassi. Da queste equazioni, grazie alla formula (9.1) possiamo ricavare la curvatura $k(t)$ dell'ellisse nel punto $P(t)$:

$$k(t) = \frac{pq}{\left(q^2cos^2(t) + p^2sin^2(t)\right)^{3/2}}$$

Possiamo anche disegnare il grafico di questa funzione, ma se non capiamo in quale punto sta il punto $P(t)$ dice molto poco.

A questo scopo osserviamo allora la Fig. 31. Il punto $P(t)$ è determinato con il metodo illustrato nel Cap. II, Fig. 27 (come è giusto, perché con quel metodo abbiamo determinato le equazioni parametriche): la semiretta che forma un angolo t con l'asse delle ascisse non passa per il punto $P(t)$, che invece è individuato in modo più complesso. A destra vediamo tracciato il grafico della funzione $k(t)$ nell'intervallo temporale $[0, 2\pi]$ che è quello che impiega il punto per fare un intero giro. Si riconosce che i punti di massimo della curvatura si hanno per $t = 0, \pi, 2\pi$,

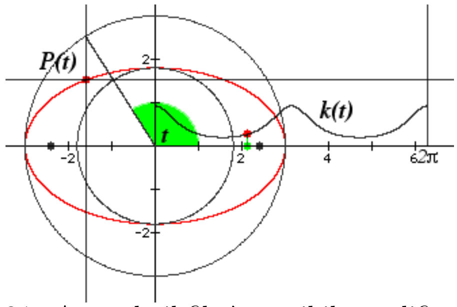

FIGURE 31. Aprendo il file è possibile modificare l'ellisse

che corrispondono ai vertici posti sull'asse maggiore. I punti di minimo si hanno per $t = \pi/2, 3\pi/2$ che corrispondono ai vertici posti sull'asse minore.

Esercizio 9.8. *Data la curva in Fig. 32a indicare i punti di massima e minima curvatura e quelli in cui la curvatura si annulla e tracciare un grafico approssimativo della curvatura.*

Soluzione. Alle estremità dei rami la curva tende a raddrizzarsi, quindi

$$\lim_{x \to \pm\infty} k(x) = 0.$$

Inizialmente (venendo da sinistra) la curva gira a destra, duque la curvatura sarà negativa. Poi comincia a girare verso destra e diventa positiva. Poiché i limiti per $x \to \pm\infty$ sono nulli, la funzione $k(x)$ è inizialmente decrescente, ha un minimo negativo, risale a 0 e quindi la curva ha un flesso, poi cresce, ha un massimo positivo, poi decresce a 0 andando $x \to +\infty$. In Fig. 32b la soluzione esatta. (Naturalmente il disegno esatto del grafico di $k(x)$ può essere fatto solo calcolando con precisione la funzione, tuttavia un disegno approssimativo e l'individuazione sulla curva dei punti di massima e minima curvatura e di flesso è possibile senza calcoli). **N.B.** Il fatto che in questo caso i punti di massima e minima curvatura coincidano (scambiati) con i punti di massimo e minimo della curva come grafico è del tutto casuale. Basta considerare il caso della quartica, trattato prima, per rendersene conto.

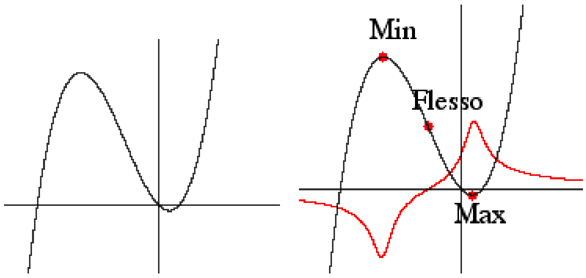

FIGURE 32. a - b