CAPITOLO III - PARABOLA

1. Definizione di parabola

Definizione 1.1. *La sezione di un cono circolare retto con un piano π parallelo ad una delle generatrici si chiama* parabola.

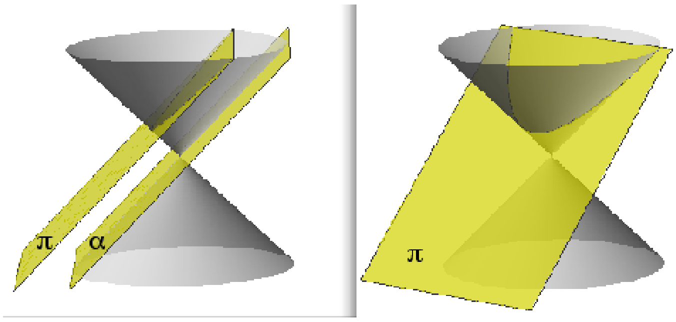

Figure 1

In altre parole dato un cono circolare retto, prendiamo un piano α, passante per il vertice, che forma con l'asse del cono un angolo θ, uguale all'angolo formato con lo stesso asse dalle generatrici. Come abbiamo osservato (cfr. Cap. II, Proposizione 4.1), questo piano contiene esattamente una generatrice, lungo la quale è tangente al cono (cfr. Fig. 1). Prendiamo ora un secondo piano π, parallelo al primo: cioè π non passa per il vertice ed è parallelo ad una delle generatrici; esso dunque incontra tutte le altre generatrici e i punti d'intersezione formano una curva: una parabola.

2. Direttrice e fuoco

Sulla falsariga della costruzione (cfr. Cap. II 5.1) con le sfere fatta nel caso dell'ellisse, cerchiamo di trovare una proprietà di geometria piana che caratterizzi la parabola. Al solito, per comprendere più facilmente la situazione, conviene considerare una sezione piana; in Fig: 2a è rappresentato, oltre al piano π che taglia sul

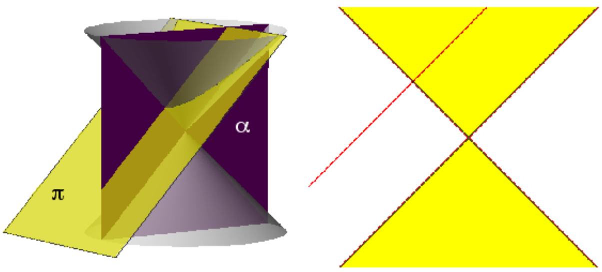

Figure 2. a - b

cono una parabola, il piano α che passa per l'asse del cono ed è perpendicolare a π; in Fig. 2b si vede la sezione con il piano α (ovviamente qui il piano π appare come una retta). Come si vede in Fig. 3a, possiamo inscrivere in modo unico una circonferenza nella *stanza* di destra, mentre in quella di sinistra si possono inserire infinite circonferenze tangenti ad entrambe le rette; di queste scegliamone una, quella più

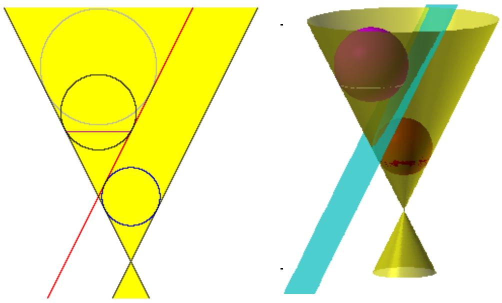

FIGURE 3. a - b

scura. Con un argomento già discusso a proposito dell'ellisse, si vede che queste circonferenze corrispondono a delle sfere (cfr. Fig. 3b) inserite nel cono. Dovrebbe essere chiaro dalla passata discussione che la sfera di destra è tangente al piano in un punto e al cono lungo una circonferenza. Nuova invece è la situazione della circonferenza di sinistra:

Esercizio 2.1. *Si consideri la sfera di sinistra in Fig. 3b e la corrispondente sezione in Fig. 3a. Qual è l'intersezione tra sfera e piano e, soprattutto, tra sfera e cono?*

Soluzione. La sfera, che si vede a sinistra in Fig. 3b è tangente al piano. Per comprendere quale sia l'intersezione tra sfera e cono si osservi che in sezione (Fig. 3a) i due punti in cui la circonferenza è tangente al piano e ad una generatrice sono disposti alla medesima altezza; in termini più precisi c'è un piano orrizontale che passa per essi. In Fig. 4 si vede uno spaccato con questo piano, da cui risulta

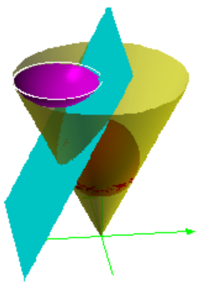

FIGURE 4

evidente che la sfera tocca il cono solo in un punto.

Dunque la situazione è decisamente diversa da quella dell'ellisse e per ottenere il nostro risultato dobbiamo procedere altrimenti:

Teorema 2.2. *Sia K una parabola. Nel piano della parabola esistono un punto F detto* fuoco*, ed una retta r, detta* direttrice*, tali che un punto P del piano sta sulla parabola K se e solo se è equidistante dal fuoco e dalla direttice.*

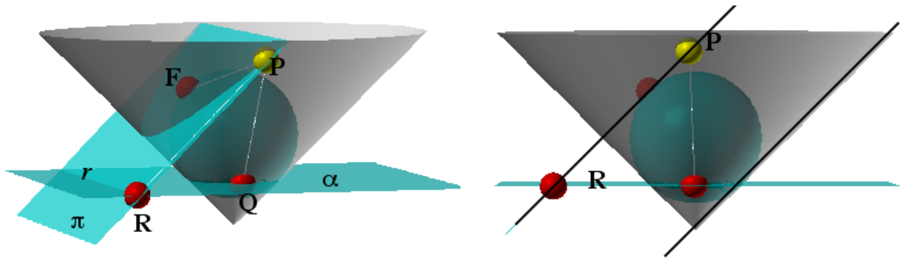

FIGURE 5. a - b

<u>Dimostrazione</u>. Riassumiamo quanto abbiamo visto sopra: il piano π taglia sul cono una parabola K e divide la falda superiore del cono in due stanze, una delle quali contiene il vertice del cono. In essa inscriviamo una sfera che risulta tangente in un punto F al piano π e lungo una circonferenza C al cono. Consideriamo il piano α su cui giace la circonferenza C; esso è orrizontale e taglia il piano π lungo una retta r (vedi Fig. 5a); questa retta è la direttrice.

Sia P un punto della parabola K, indico con R il piede della perpendicolare condotta da P alla retta r; invece Q è il punto della circonferenza C per cui passa la generatrice VP.

Fatta la costruzione concludiamo: la retta PF è sul piano π e passa per F, quindi è tangente alla sfera in F. La retta PQ è una generatrice, quindi è tangente alla sfera in Q. Pertanto (cfr. Cap.II, Proposizione 3.2)

$$|PF| = |PQ|.$$

Dalla Fig. 5b risulta evidente che l'angolo che la retta PR forma con il piano α è uguale all'angolo che con tale piano forma una generatrice e quindi tutte le generatrici; in particolare la retta PQ. Quindi, *scendendo* da P sul piano α lungo il segmento PR oppure lungo il segmento PQ, si percorre la stessa distanza, cioè

$$|PQ| = |PR|.$$

Ma $|PR|$ è la distanza $dist(P, r)$ del punto P dalla direttrice r, In conclusione:

$$|PF| = dist(P, r).$$

□

3. DUE COSTRUZIONI GRAFICHE

3.1. **Costruzione di una parabola con riga e compasso (assegnati fuoco e direttrice).** Siano assegnate nel piano una retta r ed un punto F. Vogliamo disegnare la parabola K luogo dei punti del piano equidistanti dalla direttrice r e dal fuoco F.

(i) Tracciamo una retta parallela alla direttrice (dalla parte del fuoco) e

(ii) con centro il fuoco tracciamo la circonferenza che ha per raggio la distanza tra le due rette.

La retta e la circonferenza così costruite si tagliano in due punti che stanno sulla parabola (cfr. Fig. 6) infatti, per costruzione, i due punti trovati sono equidistanti dalla direttrice e dal fuoco.

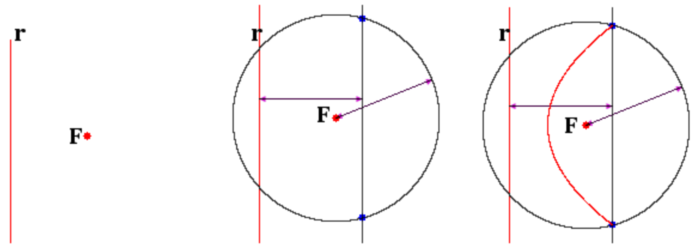

FIGURE 6. Apri il file

Esercizio 3.1. *Tracciata una retta r sul foglio e fissato un punto F, disegnare al cuni punti della parabola che ha per direttrice la retta r e fuoco il punto F e poi, a mano libera, disegnare la parabola.*

Soluzione. Basta ripetere alcune volte la procedura illustrata sopra, scegliendo diverse parallele alla direttrice.

3.2. **Proprietà di simmetria e vertice.** La perpendicolare alla direttrice condotta dal fuoco è simmetrica rispetto ai dati geometrici (direttrice e fuoco) che determinano la parabola, perciò è un asse di simmetria. Il punto in cui questo asse incontra la parabola si chiama *vertice*. Esso è equidistante dalla direttrice e dal fuoco.

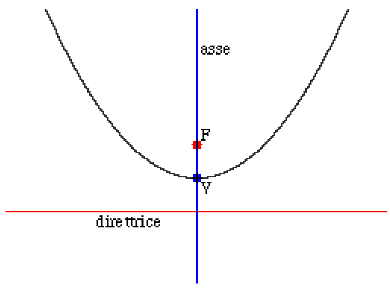

FIGURE 7

3.3. Costruzione della direttrice e del fuoco di una parabola.

Proposizione 3.2. *Data una parabola K possiamo determinarne per simmetria l'asse e il vertice V* (cfr. Fig. 8a). *Per trovare il fuoco e la direttrice, procediamo*

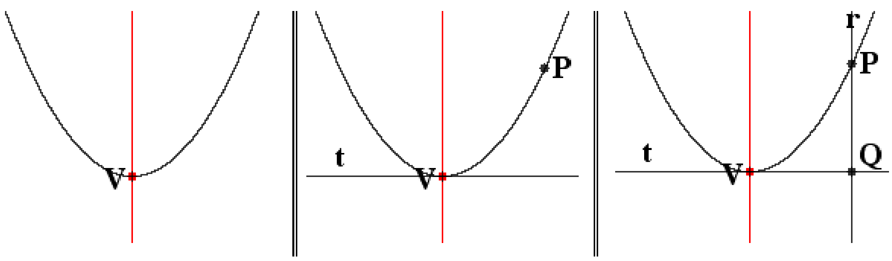

FIGURE 8. a - b - c

così:

(i) Conduciamo per il vertice V la perpendicolare t all'asse e scegliamo un punto qualsiasi P sulla parabola (cfr. Fig. 8b).

(ii) Conduciamo per P la perpendicolare r a t. Sia Q il punto d'intersezione di queste due rette (cfr. Fig. 8c).

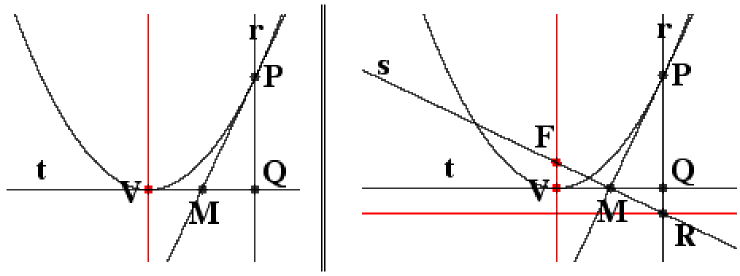

FIGURE 9. a -b

(iii) Determiniamo il punto medio M del segment VQ e mandiamo per M la perpendicolare s a PM (cfr. Fig. 9a).

(iv) Tale retta s taglia l'asse della parabola nel fuoco F e la retta r in un punto R per cui passa la direttrice (cfr. Fig. 9b).

<u>Dimostrazione</u>. Per giustificare questa costruzione (cfr. Fig. 10a) si osservi che

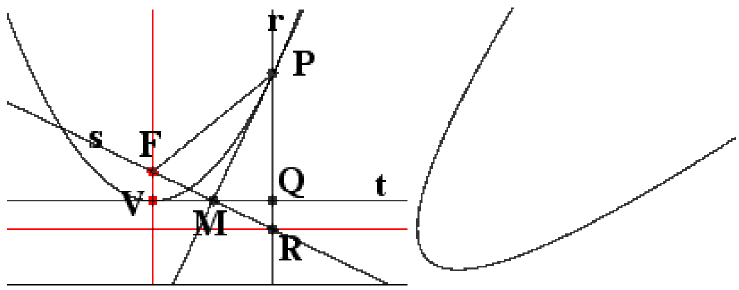

FIGURE 10. a - b

i triangoli MFV e MRQ sono uguali. Infatti, per costruzione, sono rettangoli rispettivamente in V e Q; inoltre hanno gli angoli in M uguali perché opposti al vertice e i cateti VM e MQ uguali perché M è il punto medio di VQ.

Allora i lati FM e MR sono uguali e quindi i triangoli PMF e PMR, rettangoli per costruzione in M, con i cateti uguali, sono uguali. Dunque le ipotenuse PF e PR sono uguali. Cioè P è equidistante dal fuoco e dalla direttrice.

Esercizio 3.3. *Considerata la parabola in Fig. 10b, se ne determini la direttrice e il fuoco.*

<u>Soluzione</u>. In primo luogo si tracci approssimativamente l'asse di simmetria: tracciata una retta a che ragionevolmente possa essere l'asse si controlli che, se un punto P sta sulla parabola, allora anche il suo simmetrico P' rispetto ad a appartenga alla parabola.

L'asse a taglia la parabola nel vertice V; si tracci la perpendicolare per V all'asse. Quindi si proceda come esposto qui sopra.

4. Equazione cartesiana della parabola

Dalla costruzione precedente si ricava:

Proposizione 4.1. *La curva di equazione*

$$2py = x^2$$

è una parabola che ha per direttrice la retta $y = -p/2$ e come fuoco il punto $F = (0, p/2)$.

<u>Dimostrazione</u>. (Omessa a lezione, è esposta solo per completezza). Si consideri la Fig. 10a: si prenda un sistema di coordinate con origine nel vertice V, la retta t è l'asse delle ascisse, l'asse della parabola è l'asse delle ordinate. Osserviamo il triangolo rettangolo PMR: il quadrato $|QM|^2$ costruito sull'altezza QM è pari al prodotto $|QR|.|PQ|$. Dunque le coordinate x, y di P sono date da:

$$x = |VQ| = 2|QM|, \ y = |PQ|.$$

Indichiamo con $p/2$ la distanza $|FV|$ del fuoco dal vertice, che è uguale alla distanza $|QR|$ del vertice dall'asse. In conclusione:

$$x^2 = 4|QM|^2 = 4|QR|.|PQ| = 4\frac{p}{2}y = 2py.$$

□

Esercizio 4.2. *Riconoscere dalla Fig. 11 che la curva è una parabola.*

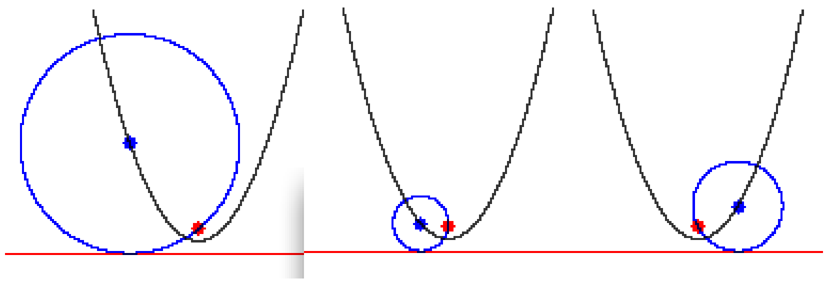

Figure 11. Apri il file

<u>Soluzione</u>. La circonferenza si mantiene tangente alla retta rossa e passa sempre per il punto rosso. Quindi il suo centro è equidistante dalla retta e dal punto; dunque il centro della circonferenza descrive una parabola che ha per direttrice la retta e fuoco il punto rosso.

5. Rette e parabola

Studiamo le possibili posizioni di una retta rispetto ad una parabola, così come abbiamo fatto per l'ellisse. La nostra parabola K è sezione di un cono circolare retto con un piano π e consideriamo un piano π' perpendicolare all'asse del cono e che non passa per il vertice V (cfr. Fig. 12a); questo secondo piano taglia sul cono una circonferenza C.

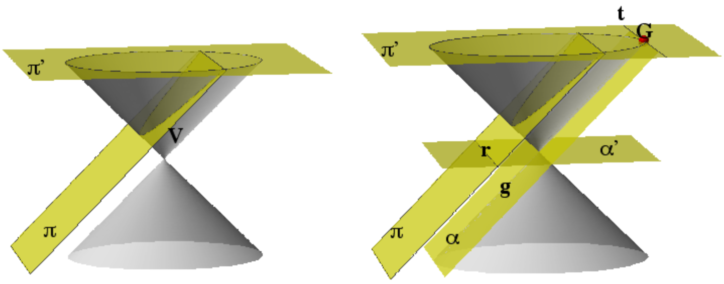

FIGURE 12. a - b

5.1. **La proiezione $\pi \to \pi'$ dal vertice del cono.** La proiezione dal vertice V stabilisce una corrispondenza $\pi \to \pi'$; come sappiamo (cfr. Cap.II. Proposizione 6.6) ci sono due rette "cattive", una su ciascun piano, su cui la corrispondenza non è definita. Vediamo quali sono queste due rette.

Prendiamo i piani α e α' passanti per il vertice V e paralleli ai piani π e π' rispettivamente (cfr. Fig. 12b). Il piano α' taglia sul piano π della parabola una retta r che non tocca la parabola (infatti il piano α' tocca il cono solo nel vertice e dunque non tocca la parabola). Invece il piano α (proprio perché si tratta di una parabola) tocca il cono lungo una generatrice g e dunque taglia, sul piano π' della circonferenza C, una retta t che è tangente alla circonferenza in un punto G.

Dunque *la proiezione $\pi \to \pi'$ proietta ogni retta (diversa da r) del piano π della parabola in una retta (diversa da t) del piano π' della circonferenza.* Precisamente ogni piano per il vertice V taglia sui due piani rette corrispondenti (in Fig. 13a

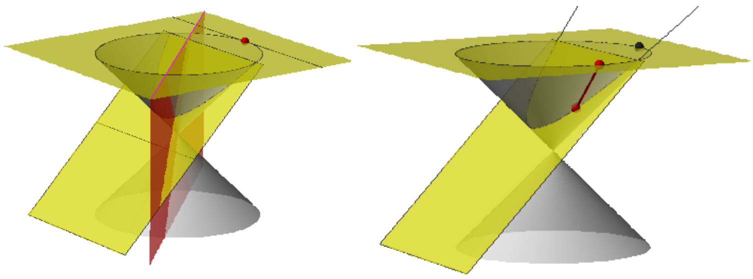

FIGURE 13. a - b

si vede un piano per il vertice che taglia sul piano π della parabola e sul piano π' della circonferenza due rette che si corrispondono nella proiezione $\pi \to \pi'$).

5.2. **La proiezione $\pi \to \pi'$ induce una proiezione della parabola sulla circonferenza.** Inoltre la proiezione $\pi \to \pi'$ associa ad ogni punto P della parabola un punto P' della circonferenza (cfr. Fig 13b). Tuttavia quando il punto P' si avvicina al punto G il corrispondente punto P della parabola va all'infinito lungo una delle estremità illimitate della parabola (lungo l'una o l'altra a seconda che P' arrivi in G in senso orario o antiorario). Dunque *la corrispondenza è biunivoca tra i punti della parabola K e i punti della circonferenza C, privata del punto G.* Possiamo in un certo senso dire che *la parabola è una circonferenza meno un punto.* In concreto questo spiega perché la parabola è formata da un arco di curva aperto (cioè con le due estremità che non sono congiunte).

5.3. **Rette secanti, tangenti ed esterne alla parabola.** Da questa osservazione segue che se una retta s del piano π incontra la parabola in *tot* punti, la corrispondente retta s' sul piano π' incontra la circonferenza in almeno altrettanti punti (attenzione se s' passa per G, s' ha in comune con la circonferenza un punto in più). Poiché la retta s' ha in comune con la circonferenza C al più due punti, la retta s ha al più due punti in comune con la parabola. Perciò possiamo introdurre la seguente nomenclatura: rispetto ad una parabola, una retta si dice *secante* se la interseca in due punti, *tangente* se la interseca in un punto, *esterna* se non ha nessuna punto in comune con la parabola.

Tuttavia ci sono delle eccezioni: ad una retta s' del piano π' della circonferenza che passi G (e per un altro punto di C) corrisponde una retta del piano π della parabola che incontra la parabola solo in un punto. Infatti consideriamo il fascio di piani che ha per asse la generatrice g, parallela al piano π della parabola. Questi piani conviene immaginarli come pagine di un libro che ha per costola la generatrice g cfr. Fig. 14a. Ogni piano del fascio passa per il vertice V, quindi taglia sui piani

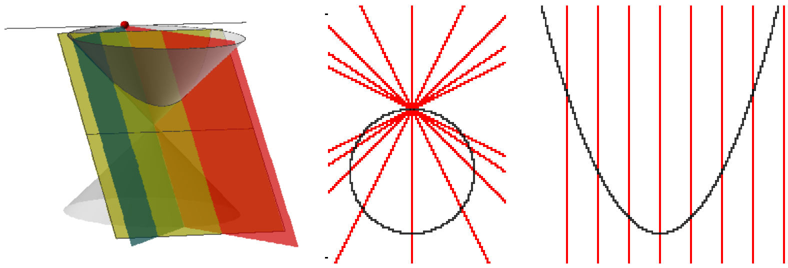

FIGURE 14. a - b. Aprire il file per muovere la figura e vederla meglio

π e π' rette corrispondenti. In effetti sul piano π' della circonferenza questi piani del fascio tagliano il fascio di rette di centro G, mentre (poiché la "costola del libro" è parallela al piano π) tagliano sul piano π rette parallele (cfr. Fig. 14b). In particolare il piano, passante per la generatrice g e perpendicolare a π (cioè passante per l'asse del cono), taglia sul piano π' il diametro della circonferenza C che passa per G e, sul piano π, l'asse della parabola.

In conclusione le rette parallele all'asse della parabola (e dunque l'asse stesso), pur avendo in comune con la parabola K un solo punto, sono proiettate in rette che secano la circonferenza C e passano per il punto G. A questo proposito conviene osservare che se un punto P si allontana verso l'infinito lungo una retta parallela all'asse della parabola o lungo la parabola, il corrispondente punto P' nel piano π' si muove lungo una retta passante per il punto G o rispettivamente lungo la circonferenza, avvicinandosi al punto G. Dunque possiamo dire che *la parabola e le rette parallele all'asse della parabola, all'infinito, hanno un punto in comune e, pertanto non sono tangenti ma secanti la parabola.*

6. Retta tangente ad una parabola

Teorema 6.1. *La tangente alla parabola in un suo punto biseca l'angolo formato dalla perpendicolare alla direttrice condotta per il punto e dalla retta che congiunge il punto al fuoco.*

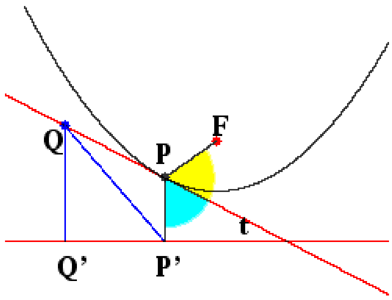

FIGURE 15

<u>Dimostrazione</u>. Sia P un punto della parabola e t la bisettrice dell'angolo formato dalla retta PF con la perpendicolare alla direttrice (cfr. Fig. 15). Sia P' il piede della perpendicolare. I segmenti PF e PP' sono uguali e simmetrici rispetto alla bisettrice. Quindi i punti F e P' sono simmetrici rispetto alla bisettrice.

Prendiamo un punto Q sulla bisettrice t, $Q \neq P$; i segmenti QF e QP' sono uguali per simmetria. Mentre dalla figura è chiaro che $|QQ'| < |QP'|$. Dunque la distanza $|QQ'|$ di Q dalla direttrice minore della distanza di Q dal fuoco. Pertanto Q esterno alla parabola.

Abbiamo così provato che tutti i punti della bisettrice, tranne P, sono esterni alla parabola. Dunque la bisettrice è la tangente. □

Esercizio 6.2. *Dati una parabola e un suo punto si disegni la tangente per quel punto.*

<u>Soluzione</u> Se già conosciamo direttrice e fuoco, allora è sufficiente disegnare la retta PF che congiunge il punto al fuoco e la perpendicolare per P alla direttrice. La bisettrice di queste rette è la tangente cercata.

Se invece si conosce solo la parabola e un suo punto conviene procedere come nel Teorema 6.1: si determina l'asse di simmetria e il vertice V, si manda la perpendicolare t per V all'asse e la perpendicolare r per P alla retta t. Allora r e t si tagliano in un punto Q. Preso il punto medio M, la retta PM è la tangente cercata (come si verifica dalla Fig. 10) perché essa biseca le rette FP e QP.

7. Raggi luminosi e parabole

In Fig. 16a i quattro angoli evidenziati sono uguali tra loro (infatti gli angoli adiacenti sono uguali tra loro perché sono bisecati dalla tangente, mentre angoli opposti al vertice sono uguali). In particolare un raggio di luce proveniente in direzione perpendicolare alla direttrice viene riflesso nel fuoco. Supponiamo di avere una fonte di onde elettromagnetiche molto lontana e di orientare l'asse della parabola in direzione di questa sorgente. Allora tutte le onde arriveranno da direzioni praticamente parallele e verranno tutte deviate nel fuoco, dove ci sar una forte "concentrazion" di segnale. Se per il tempo impiegato dai diversi "raggi" fosse diverso, cioè se tutti i raggi non percorressero la medesima distanza il risultato sarebbe un minestrone incomprensibile. Ma i punti della parabola sono equidistanti dal fuoco e dalla direttrice, quindi ogni singolo raggio impiega a raggiungere il fuoco esattamente lo stesso tempo che avrebbe impiegato a raggiungere la direttrice, se non ci fosse stata l'antenna parabolica; perciò tutti i segnali arrivano contemporaneamente nel fuoco!

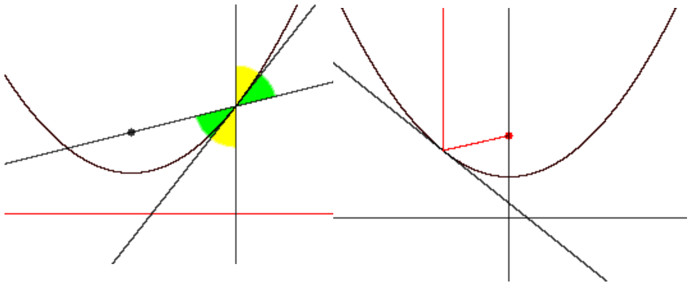

Figure 16. a - b