CAPITOLO II -

1. Tangenti ad una circonferenza.

Si richiamano alcuni risultati elementari. A proposito delle rette tangenti ad una circonferenza vale la seguente:

Proposizione 1.1. *La retta t tangente ad una circonferenza C in un suo punto P è la perpendicolare al raggio passante per P.*

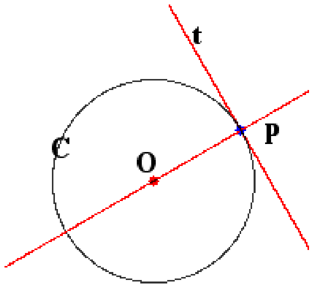

Figure 1

Dimostrazione. Tutti i puti della retta t, tranne P, sono esterni alla circonferenza, quindi distano dal centro O più del raggio; dunque, di tutti i punti della retta, P è il più vicino al centro. Pertanto P è il piede della perpendicolare condotta da O alla retta t, cioè - come si voleva - la retta t è perpendicolare al raggio OP. $\square$

Per condurre le tangenti ad una circonferenza da un punto esterno serve questo

Lemma 1.2. *Un triangolo inscritto in una circonferenza (cioè con i vertici sulla circonferenza)* **che ha per lato un diametro** *è un triangolo rettangolo* (cfr. Fig. 2a).

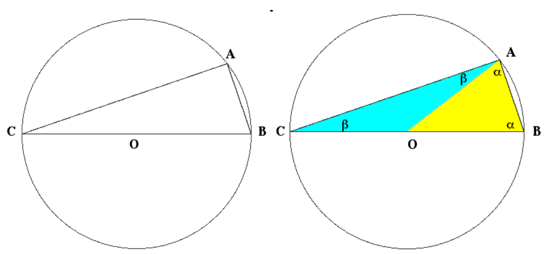

Figure 2. a - b

Dimostrazione. Infatti in Fig. 2b si riconosce che i due triangoli sono isoceli, perché ciascuno di essi ha due lati uguali al raggio; quindi gli angoli indicati in figura sono uguali. Allora la somma degli angoli interni del triangolo ABC è $180° = \pi = 2\alpha + 2\beta$, perciò l'angolo $C\hat{A}B = \alpha + \beta = 90° = \pi/2$ è retto. $\square$

Ora è possibile esporre il

Osservazione 1.3. Metodo per la condurre le tangenti ad una circonferenza da un punto esterno. *Data una circonferenza C di centro O ed un punto P ad essa esterno si tracci la circonferenza che ha per diametro il segmento OP. Le rette che congiungono P ai punti in cui le due circonferenze si tagliano*

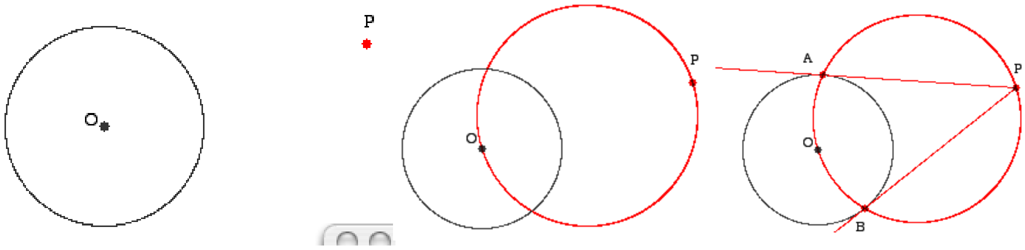

FIGURE 3

sono tangenti alla circonferenza assegnata.

Dimostrazione. Si segua guardando la Fig. 3. Tracciata la circonferenza con raggio OP le due circonferenze si tagliano nei punti A e B. I triangoli APO e BPO (cfr. Fig. 4) sono iscritti in una circonferenza e il lato PO coincide con il diametro. Per il Lemma 1.2 gli angoli $O\hat{A}P$ e $O\hat{B}P$ sono retti. Pertanto, per la Proposizione 1.1,

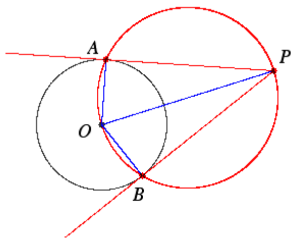

FIGURE 4

le rette PA e PB sono tangenti. □

Esercizio 1.4. *Disegnare una circonferenza ed un punto esterno ad essa. Tracciare - con il metodo sopra illustrato - le due tangenti alla circonferenza passanti per quel punto.*

Esercizio 1.5. *Date due rette incidenti, tracciare le bisettrici degli angoli da esse formati.*

Soluzione. Si segua la costruzione guardando la Fig. 5. Con centro nel punto P in cui le due rette r ed s sono incidenti, si traccia una circonferenza. Essa taglia le due rette nei punti Q ed R. Con centro in questi punti si tracciano due circonferenze di ugual raggio, che si tagliano in due punti. Per essi passa una bisettrice. L'altra bisettrice si ottiene tracciando la perpendicolare per P a quella già trovata.

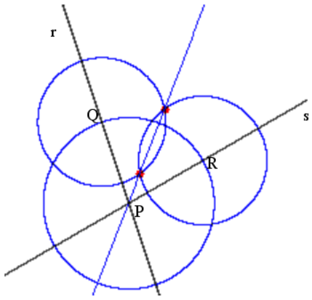

FIGURE 5

Esercizio 1.6. *Assegnate le rette in nero (Fig. 6a) disegnare le circonferenze rosse.*

Soluzione. Il centro di ciascuna circonferenza è equidistante dalle rette tangenti alla circonferenza stessa, quindi si trova sulle bisettrici degli angoli formati dalle tangenti. In Fig. 6b sono tracciate tutte le bisettrici (per ciascuna si deve applicare

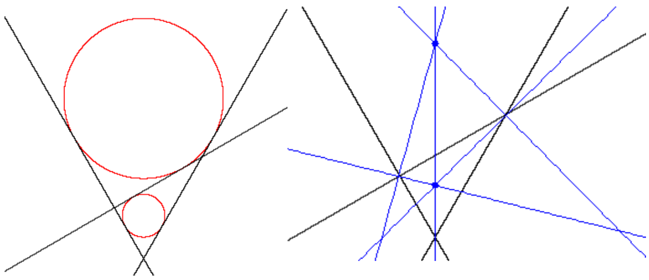

FIGURE 6. a - b

il metodo dell'esercizio precedente) e sono evidenziati i centri delle due circonferenze cercate.

Per conoscere il raggio di ciascuna circonferenza bisogno trovare almeno un piede di una perpendicolare mandata dal centro ad una delle rette assegnate. Si lascia al lettore di completare l'esercizio. Per risparmiare lavoro si tenga presente che per individuare ciascun centro bastano due bisettrici (e non tre) e che c'è una bisettrice che passa per entrambi i centri.

N.B. Si noti che la circonferenza inferiore è inscritta in un triangolo, quella superiore è univocamente determinata anche se i "tre lati" non si chiudono.

2. CONO CIRCOLARE RETTO

Definizione 2.1. *Data una circonferenza C, per il centro conduciamo la perpendicolare al piano α della circonferenza e fissiamo un punto V su di essa.* (Fig. 7a). *Le rette che congiungono V ai punti della circonferenza C descrivono un* cono circolare retto *(Fig. 7b). Il punto V è detto* vertice*, le rette si chiamano* generatrici *del cono, le due parti del cono che si congiungono in V sono dette* falde*, la perpendicolare che congiunge V al centro della circonferenza è detto* asse *del cono.*

Il cono (Fig. 8) può anche essere ottenuto ruotando una sua qualunque generatrice r attorno all'asse; dunque tutte le generatrici formano con l'asse il medesimo angolo θ. Salvo diverso avviso, ma solo per fissare le idee, supporremo sempre che l'asse del cono sia verticale.

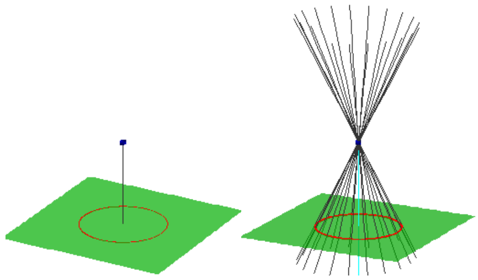

FIGURE 7. a - b

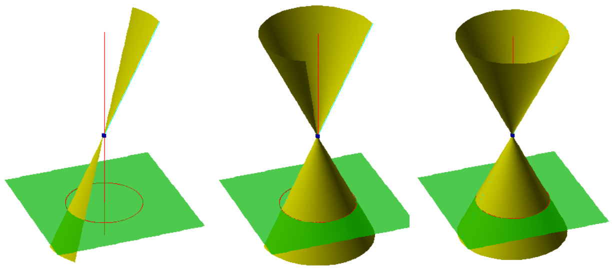

FIGURE 8. Aprire il filmato

3. TANGENTI AD UNA SFERA

Prima consideriamo le rette tangenti alla sfera in un suo punto e poi le tangenti ad una sfera condotte per un punto esterno ad essa.

Proposizione 3.1. *Le rette tangenti ad una sfera in un suo punto giacciono su un piano, precisamente sul piano tangente alla sfera.*

Dimostrazione. Sia P un punto di una sfera S di centro O. Si consideri il fascio di piani di asse OP. Ciascun piano α, appartenente al fascio, taglia sulla sfera una circonferenza C e la retta t di α, tangente alla circonferenza C nel punto P, è la retta perpendicolare al raggio OP. Al variare del piano α nel fascio, la retta t

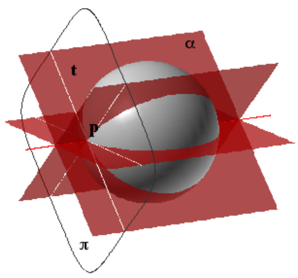

FIGURE 9

descrive il piano π perpendicolare al raggio OP. Tale piano è il piano tangente alla sfera S nel punto P. $\square$

Per le tangenti alla sfera condotte da un punto esterno vale la seguente

Proposizione 3.2. *Data una sfera S ed un punto P esterno ad essa, le tangenti alla sfera condotte da P descrivono un cono circolare retto di vertice P. Tale cono è tangente alla sfera lungo una circonferenza C i cui punti sono equidistanti da P.*

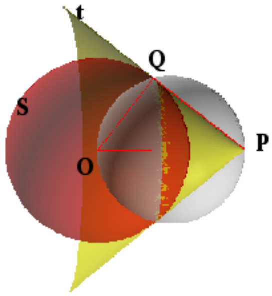

Figure 10. Aprire il filmato

Dimostrazione. Fissato un piano α che passa per il centro O della sfera e per P consideriamo la Fig. 10 in cui è rappresentata lo spaccato della sfera con questo piano. Il piano α taglia la sfera lungo una circonferenza e per mandare da P le tangenti a questa circonferenza dobbiamo costruire una seconda circonferenza di diametro OP. La retta PQ è una delle due tangenti cercate. Come dovrebbe essere evidente dalla figura, al variare del piano α nel fascio di piani di asse OP, la tangente PQ descrive un cono di vertice P.

Si noti che la costruzione è simmetrica rispetto alla retta OP, quindi l'intersezione tra cono e sfera è una circonferenza i cui punti sono equidistanti da P. $\square$

4. Sezioni piane di un cono circolare retto

La curva ottenuta sezionando un cono circolare retto con un piano si chiama *sezione conica* o semplicemente *conica*. Una conica si dice *degenere* se è ottenuta sezionando un cono con un piano che **passa per il vertice del cono**, in caso contrario si dice *non degenere*.

Proposizione 4.1. *Le coniche degeneri sono di tre tipi: un punto, una retta, due rette incidenti, a seconda dell'inclinazione del piano rispetto all'asse del cono. Precisamente se le generatrici del cono formano un angolo θ con l'asse s e π è un piano passante per il vertice V si ha:*

(i) Se $\widehat{\pi s} > \theta$, allora il piano π taglia il cono solo nel vertice V;
(ii) Se $\widehat{\pi s} = \theta$, allora il piano π taglia il cono lungo una generatrice;
(iii) Se $\widehat{\pi s} < \theta$, allora il piano π taglia il cono lungo 2 generatrici.

Dimostrazione. Ricordo che l'angolo $\widehat{\pi s}$ è il più piccolo angolo formato tra una retta r del piano π che passa per V e l'asse s del cilindro.

Se il piano π è poco inclinato rispetto all'orizzontale, cioè $\widehat{\pi s} > \theta$, allora, tutte le rette del piano π che passano per V formano con l'asse s un angolo $> \theta$ e quindi non sono generatrici; perciò il piano non contiene nessuna generatrice e interseca il cono nel solo vertice.

Se $\widehat{\pi s} = \theta$, allora tutte le rette del piano π che passano per il vertice V formano con l'asse un angolo $> \theta$ tranne la proiezione ortogonale di s sul piano. Essa forma esattamente un angolo θ con l'asse; perciò essa è una generatrice. Anzi è l'unica

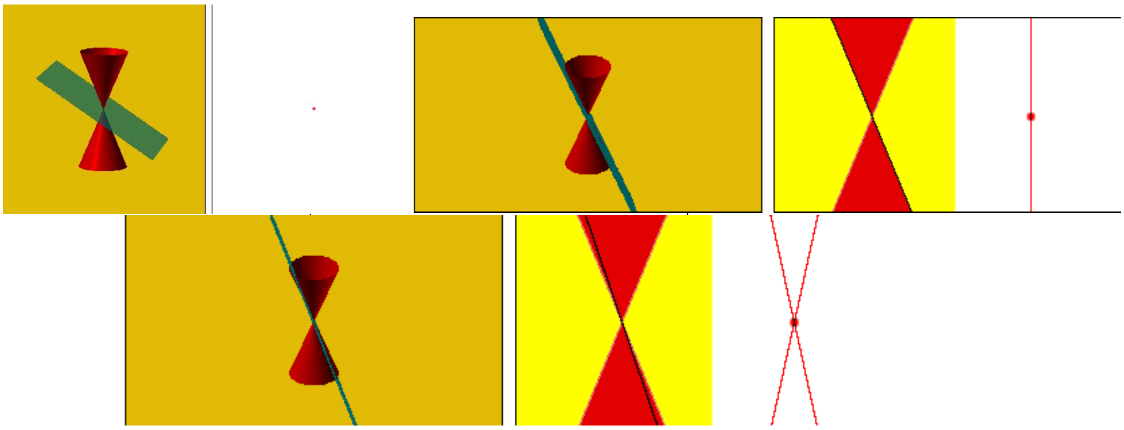

Figure 11

generatrice che appartiene al piano. Dunque il piano taglia sul cono una sola retta. In questo caso il piano è appoggiato (tangente) al cono lungo questa generatrice.

Infine se $\widehat{\pi s} < \theta$, allora evidentemente il piano taglia la circonferenza C; la taglia in due punti e da questi si dipartono le due generatrici che appartengono al piano. $\square$

Esercizio 4.2. *Sia dato un cono circolare retto e sia θ l'angolo formato dalle generatrici con l'asse. Si considerino tutte le possibili coniche degeneri costituite da due rette incidenti, ottenute sezionando il cono. Quali valori può assumere l'angolo tra due rette?*

<u>Soluzione</u>. L'angolo può variare tra 0 e 2θ. L'ampiezza massima 2θ si ottiene quando la sezione viene fatta con un piano che passa per l'asse del cono.

5. L'ellisse come sezione conica non degenere

Sezioniamo un cono circolare retto con un piano π che non passa per il vertice V ed è "poco inclinato" rispetto all'orizzontale, in modo che il piano tagli una sola falda del cono e tutte le generatrici. Otteniamo come sezione una curva detta *ellisse*.

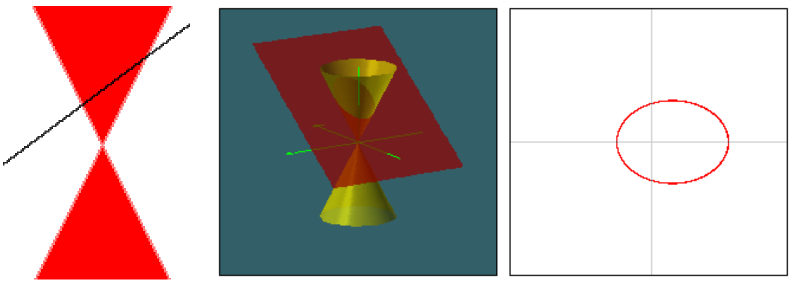

Figure 12

Precisamente se il piano π non passa per il vertice e forma con l'asse s del cono un angolo $> \theta$ (angolo tra asse e generatrici) allora il piano π', parallelo a π e passante per il vertice, non contiene nessuna generatrice, quindi π non è parallelo a nessuna generatrice, dunque le incontra tutte.

In particolare il piano π potrebbe essere orizzontale, in questo caso taglierebbe sul cono una circonferenza, che dunque è un tipo particolare di ellisse.

5.1. **Proprietà focali dell'ellisse.**

Esercizio 5.1. *Siano dati un cono circolare retto ed un piano π, non passante per il vertice, che taglia sul cono un'ellisse. Determinare due sfere come in Fig. 13a, cioè due sfere inserite nella falda del cono tagliata dal piano π, tangenti al cono e al piano.*

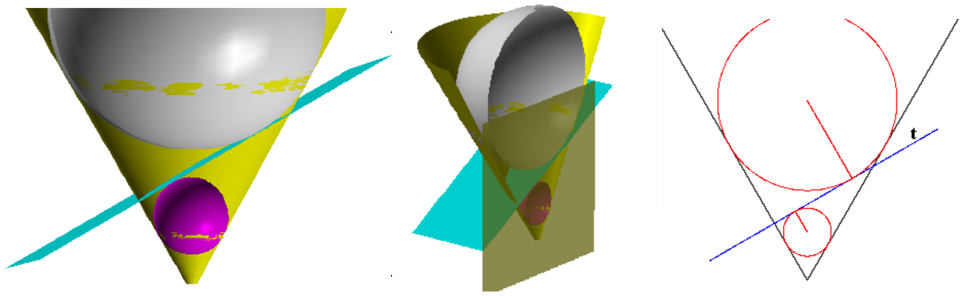

FIGURE 13. a - b - c

<u>Soluzione</u>. Conviene ricondursi ad un problema di geometria piana. Consideriamo la sezione piana ottenuta tagliando il cono e il piano π con un piano α che passa per l'asse del cono ed è perpendicolare a π (vedi Fig. 13b). Si tratta di determinare le due circonferenze rosse rappresentate in Fig. 13c. Questo problema l'abbiamo già risolto nell'Esercizio 1.6.

Ora si tratta di capire se, trovate le circonferenze rosse, ruotando la Fig. 13c attorno all'asse verticale otteniamo di nuovo la Fig. 13a. La cosa sembra ovvia, ma c'è un'aspetto delicato: il fatto che la retta t sia tangente alle circonferenze garantisce che il piano π sia tangente alle sfere? Questo in effetti è vero(cfr. Fig.

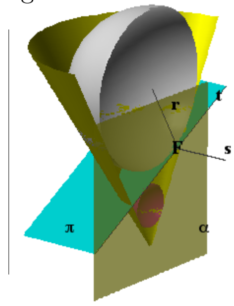

FIGURE 14

14): la retta s normale al piano α nel punto F è perpendicolare al raggio r che passa per F, perché quest'ultimo sta su α. Dunque s è tangente alla sfera in F. Ma π è perpendicolare ad α, quindi π contiene la normale s; dunque π contiene due rette tangenti alla sfera (s e t) e pertanto è tangente alla sfera. □

Possiamo allora dimostrare un importante teorema che caratterizza l'ellisse con proprietà della sola geometria piana, benché l'ellisse sia stata definita usando la geometria dello spazio.

Teorema 5.2. *Sia data un'ellisse E. Nel piano di E esistono due punti F e F', detti* fuochi*, tali che l'ellisse è il luogo dei punti P del piano per cui la somma delle distanze dai fuochi è costante. In altre parole esiste una costante p tale che un punto P del piano appartiene ad E se e solo se*

$$|PF| + |PF'| = 2p.$$

Dimostrazione. Sia data un'ellisse E, intersezione di un cono circolare retto con un piano π. Tale piano incontra una sola falda del cono e all'interno di questa e da una parte e dall'altra del piano è possibile collocare due sfere S ed S' come in Fig. 15. Le due sfere sono tangenti al cono lungo due circonferenze C e C' e al piano in

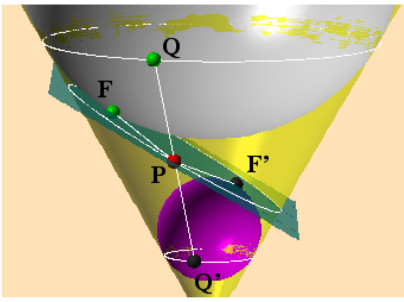

FIGURE 15

due punti F ed F'.

Preso un qualunque punto P sull'ellisse consideriamo la generatrice che passa per P. Essa interseca le due circonferenze C e C' nei punti Q e Q'.

Il piano π è tangente alla sfera S nel punto F, quindi tutte le rette di questo piano che passano per F sono tangenti alla sfera. In particolare PF è tangente alla sfera.

La generatrice QQ' è tangente alla sfera S in Q, quindi il segmento PQ è tangente alla sfera.

Per la Proposizione 3.2

$$|PF| = |PQ|,$$

perché i punti di tangenza sono equidistanti da P.

In modo analogo si prova

$$|PF'| = |PQ'|.$$

Allora possiamo esprimere la somma delle distanze del punto P dai fuochi:

$$|PF| + |PF'| = |PQ| + |PQ'| = |QQ'|$$

e quest'ultima quantità non dipende dalla scelta del punto P sull'ellisse, infatti QQ' è il segmento di generatrice che unisce le due circonferenze che stanno su piani paralleli (e perpendicolari all'asse del cono) con centri che sono sull'asse. Dunque abbiamo provato che la somma delle distanze di un punto dell'ellisse dai fuochi è costante. $\square$

Osservazione 5.3. *Può accadere che i due fuochi coincidano, ciò avviene quando il piano π è orizzontale e dunque la conica è una circonferenza.*

5.2. **Costruzione meccanica dell'ellisse (assegnati i fuochi e la somma 2p delle distanze da essi).** Siano assegnati due punti nel piano (i fuochi); immaginiamo di fissare ad essi gli estremi di una fune di lunghezza $2p$. Afferrato un punto della fune, tendiamola sul piano; la posizione così raggiunta dal punto della fune sta sull'ellisse.

In Fig. 16 sono rappresentati alcuni punti costruiti in questo modo.

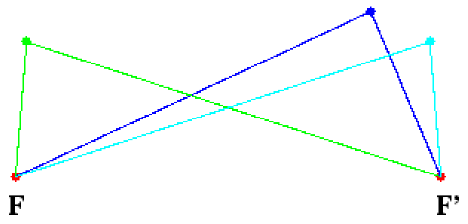

FIGURE 16

Ne segue immediatamente che la lunghezza della fune deve essere maggiore della distanza tra i fuochi, cioè

$$2p > |FP| + |F'P|.$$

Questo metodo è utile per tracciare un'ellisse sul terreno, ma non si presta ad una costruzione grafica.

5.3. **Costruzione dell'ellisse con riga e compasso (dati i fuochi e la somma 2p delle distanze da essi).**

Proposizione 5.4. *Con centro in un fuoco F tracciamo la circonferenza di raggio $2p$. Preso un punto Q su di essa, uniamolo con i segmenti QF e QF' ai fuochi. Tracciamo l'asse a del segmento $F'Q$; esso taglia il raggio FQ in un punto P dell'ellisse.*

La procedura è illustrata in Fig. 17a - c.

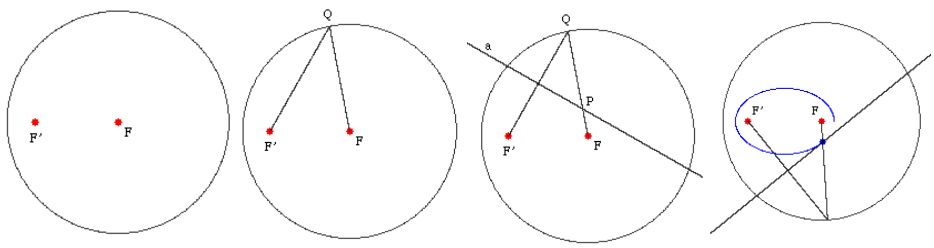

FIGURE 17. a - b - c - d. Aprire il filmato

<u>Dimostrazione</u>. Per verificare che la costruzione è corretta, osserviamo che poiché a è l'asse del segmento $F'Q$, i segmenti $F'P$ e QP sono uguali. Pertanto

$$2p = |FQ| = |FP| + |PQ| = |FP| + |F'P|$$

dice che P sta sull'ellisse. □

Ripetendo questa costruzione per un numero sufficiente di punti Q sulla circonferenza si costruisce per punti la curva che è possibile vedere in Fig. 17d.

Esercizio 5.5. *Fissati due punti F ed F' nel piano e preso un segmento di lunghezza $2p$ (maggiore della distanza $|FF'|$) eseguire la costruzione precedente disegnando una decina di punti dell'ellisse; poi tracciare a mano libera, ma con l'ausilio di questi punti, l'ellisse.*

5.4. **Proprietà di simmetria dellellisse.** Dalla Fig. 17d si vede che che

Proposizione 5.6. *La retta che congiunge i fuochi e lasse del segmento FF' sono assi di simmetria dell'ellisse e anche il punto medio M è centro di simmetria dell'ellisse. I quattro punti A, A', B e B' dell'ellisse che stanno sugli assi, sono detti* vertici *dell'ellisse. I segmenti AA' e BB' sono* l'asse maggiore *e* l'asse minore *dell'ellisse* cfr. Fig. 18a

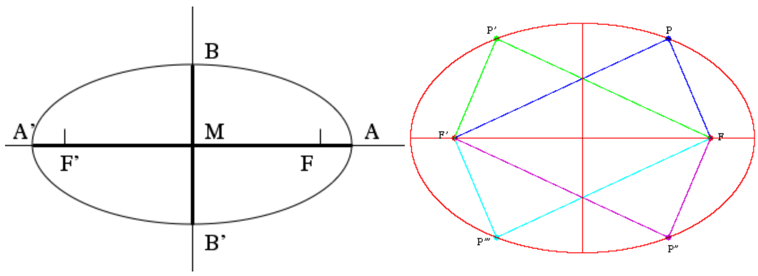

FIGURE 18. a - b

<u>Dimostrazione</u>. Le proprietà di simmetria si possono ricavare anche dalla costruzione meccanica con la fune che abbiamo visto prima. In effetti se un punto P sta sull'ellisse, allora anche i punti P', P'', P''' (cfr. Fig. 18b) stanno sull'ellisse (le 4 funi hanno, per ragioni di simmetria, la stessa lunghezza). In effetti P' è il simmetrico di P rispetto all'asse minore, P'' è il simmetrico di P rispetto all'asse maggiore, P''' è il simmetrico di P rispetto al centro. □

Esercizio 5.7. . *Utilizzando le proprietà di simmetria ripetere l'Esercizio 5.5 e migliorarlo (da ogni punto se ne costruiscono facilmente subito altri tre).*

5.5. **Costruzione dei vertici dati i fuochi e la somma $2p$ delle distanze da essi. E viceversa costruzione dei fuochi e della somma delle distanze da essi, assegnati i vertici.** Dalla Fig. 18a si vede che

$$2p = |AF| + |AF'| = |AF| + |A'F| = |AA'|$$

cioè la somma delle distanze di un punto dell'ellisse dai fuochi è pari all'asse maggiore. In particolare *la quantità p è pari alla lunghezza del semiasse maggiore.*

(i) Siano dati i fuochi F e F' e la quantità $2p$.

(a) Con centro nel punto medio M del segmento FF' tracciamola circonferenza di raggio p (cfr. Fig. 19a) Essa taglia sulla retta focale FF' un diametro di lunghezza $2p$ che è il segmento AA', cioè l'asse maggiore.

(b) La perpendicolare a quest'asse condotta per F interseca la circonferenza in un punto Q (cfr. Fig. 19b);

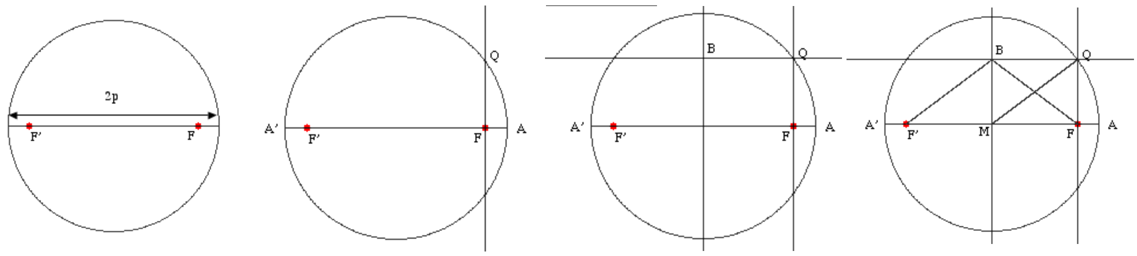

FIGURE 19. a - b - c - d

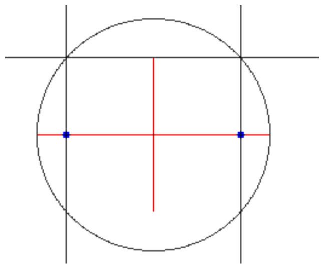

FIGURE 20

(c) per Q mandiamo la parallela all'asse maggiore (cfr. Fig. 19c). Essa tocca l'asse minore in B. Infatti (cfr. Fig. 19d) dalla costruzione riesce $|BF| = |MQ| =$ raggio $= p$ e quindi B sta sull'ellisse. (Infatti $|BF| + |BF'| = 2p$).

Invertendo la costruzione:

(ii) Siano dati gli assi (in rosso in Fig. 20). Si disegna la circonferenza, poi si prende la parallela all'asse maggiore e poi le due rette verticali. Così si ottengono i punti evidenziati in Fig. 20 che sono i fuochi.

5.6. **L'ellisse come sezione di un cilindro circolare retto.** Ricordiamo che cos'è un cilindro circolare retto:

Definizione 5.8. *Data una circonferenza C si consideri la retta s passante per il centro e perpendicolare al piano della circonferenza. La superfice formata dalle rette parallele ad s che passano per i punti della circonferenza è un* cilindro circolare retto*. Le rette sono le* generatrici*, la retta s è* l'asse *del cilindro e la circonferenza è la* direttrice.

Per il cilindro abbiamo un risultato simile a quello ottenuto per il cono:

Teorema 5.9. *La sezione di un cilindro circolare retto con un piano, non parallelo alle generatrici, è un'ellisse.*

Dimostrazione. Ovviamente il piano incontra tutte le generatrici e seguendo le indicazioni della Fig. 21 è facile riprodurre il ragionamento già utilizzato nel Teorema 5.2 e concludere che la somma delle distanze di un punto P della curva sezione dai punti in cui le sfere sono tangenti al piano è costante; ciò prova che la curva è un'ellisse. □

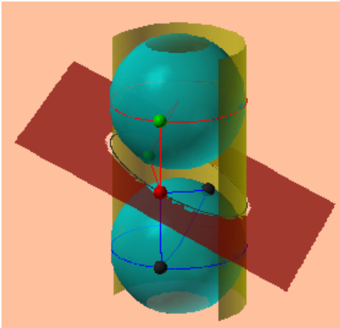

FIGURE 21

5.7. **Equazioni cartesiane dell'ellisse.** Consideriamo un cilindro circolare retto che, per fissare le idee, possiamo supporre verticale (precisamente il cui asse sia verticale). Se lo tagliamo con un piano α orizzontale troviamo una circonferenza C; se lo tagliamo con un piano β inclinato troviamo, come abbiamo appena dimostrato, un'ellisse E. A ben vedere (cfr. Fig. 24a più sotto) così facendo abbiamo proiettato la circonferenza C in direzione verticale sul piano β e ottenuto l'ellisse E. Per comprendere meglio il legame tra C ed E consideriamo la seguente:

Osservazione 5.10. *Siano dati due piani α e β che si tagliano lungo una retta r (spigolo dell'angolo diedro). Proiettiamo i punti del piano α sul piano β, perpendicolarmente ad α.* (In Fig. 22 i punti A, B, C del piano orizzontale α sono proiettati verticalmente nei punti A', B', C' del piano obliquo β.) *La deformazione*

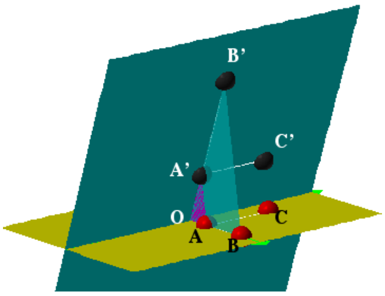

FIGURE 22

subita dalle figure in questa proiezione è la seguente:

(i) Un segmento del piano α, **parallelo** *allo spigolo r si proietta in segmento uguale sul piano β.*

(ii) Un segmento del piano α **perpendicolare** *allo spigolo r si proietta in un segmento sul piano β, anch'esso perpendicolare allo spigolo e il rapporto tra le loro lunghezze dipende solo dall'angolo $\widehat{\alpha\beta}$ e non dal segmento prescelto.* (Il segmento $A'B'$ in Fig. 22 è più lungo del segmento AB.)

In altri termini *la deformazione consiste nella dilatazione di un certo fattore costante nella direzione ortogonale allo spigolo.*

Dimostrazione. L'affermazione (i) mi sembra sufficientemente evidente (ad es. i segmenti AC e $A'C'$ in Fig. 22 sono uguali).

Il segmento AB in Fig. 22 è perpendicolare allo spigolo. Confrontiamo le misure dei segmenti AB e $A'B'$ e dimostriamo (ii) facendo vedere che il loro rapporto dipende solo dall'angolo $\widehat{\alpha\beta}$.

A questo scopo consideriamo i triangoli OAA' e OBB' in Fig. 22. Essi sono simili perché hanno gli angoli uguali, infatti sono entrambi rettangoli (in quanto AA' e BB' sono perpendicolari al piano α proprio perché la proiezione è ortogonale a questo piano) e hanno in comune l'angolo in O. Pertanto, per il Teorema di Talete, il rapporto tra i segmenti AB e $A'B'$ dipende solo dall'ampiezza dell'angolo $B\hat{O}B'$.

Resta solo da osservare che il piano in cui giacciono i due triangoli è ortogonale allo spigolo, quindi $B\hat{O}B' = \widehat{\alpha\beta}$. □

Ritorniamo alla nostra circonferenza C proiettata sull'ellisse E. L'Osservazione 5.10 ci dice che la deformazione subita dalla circonferenza è quella illustrata in Fig. 24b: un punto della circonferenza viene allontanato dall'asse delle ordinate fino a raggiungere un punto dell'ellisse e *in questo modo l'ascissa x del punto viene dilatata di un fattore k uguale per tutti i punti.* Questo fatto è importante perché ci permetterà di ricavare l'equazione cartesiana dell'ellisse.

Proposizione 5.11. *L'equazione cartesiane della circonferenza di raggio R, avendo l'avvertanza di scegliere l'origine delle coordinate nel centro, è*

$$x^2 + y^2 = R^2$$

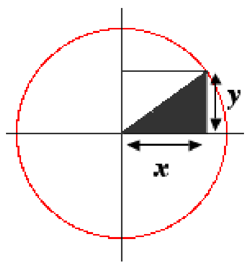

FIGURE 23

Dimostrazione. Basta applicare il teorema di Pitagora al triangolo in Fig. 23.

Possiamo ora provare che

Proposizione 5.12. *L'equazione cartesiana dell'ellisse è della forma*

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$$

dove $p \geq q$ sono le lunghezze rispettivamente del semiasse maggiore e minore e il sistema di coordinate è scelto così: l'origine è il centro dell'ellisse, l'asse delle ascisse è l'asse maggiore, quello delle ordinate è l'asse minore.

Dimostrazione. Sia assegnata un ellisse E con semiassi $p > q$. Prendiamo una circonferenza C di raggio q pari al semiasse minore dell'ellisse. Dilatiamo la circonferenza come abbiamo detto (in altri termini consideriamo un piano β che passa per il centro O della circonferenza ed è inclinato rispetto al piano α su cui la circonferenza giace e proiettiamo la circonferenza C, in direzione perpendicolare ad α, sul piano β, cfr. Fig. 24a). Evidentemente (cfr. Fig. 24b) il diametro orizzontale della circonferenza diventa l'asse maggiore di E; la circonferenza ha raggio q, l'ellisse ha semiasse maggiore p, perciò bisogna scegliere il fattore di dilatazione k in modo che

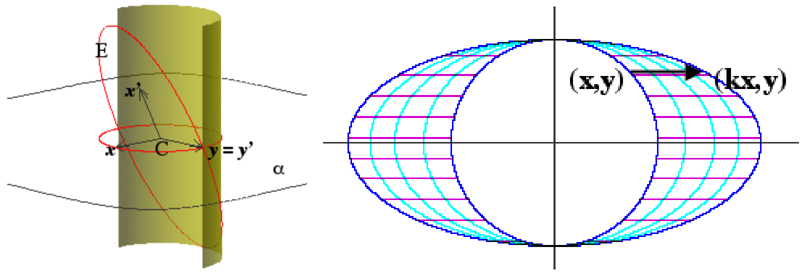

FIGURE 24. a - b

$kq = p$. Possiamo farlo perché l'Osservazione 5.10 dice che il fattore di dilatazione k dipende dall'angolo $\widehat{\alpha\beta}$ tra i due piani, dunque basta scegliere in modo opportuno l'inclinazione di β.

Ora viene il difficile, perché, purtroppo bisogna ragionare alla rovescia: quale equazione soddisfano i punti dell'ellisse? Se prendo un punto (x, y) dell'ellisse E, questo è ottenuto allontanando dall'asse delle ordinate un punto P della circonferenza C. Dunque P avrà coordinate $(x/k, y)$. (Come detto ragioniamo alla rovescia: da un punto dell'ellisse ad uno della circonferenza). Ma il punto P soddisfa l'equazione della circonferenza

$$x^2 + y^2 = q^2;$$

questo vuol dire che

$$(x/k)^2 + y^2 = q^2,$$

cioè, dividendo per q:

$$\frac{x^2}{(kq)^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$$

e infine ricordando che $kq = p$ si ottiene l'equazione cercata:

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1.$$

□

5.8. **Un'applicazione dell'equazione cartesiana.** Cerchiamo di capire se il colosseo ha pianta ellittica. Ho copiato su una calcolatrice grafica una pianta del colosseo (cfr. Fig. 25) e l'ho disposta in modo da far coincidere gli evidenti assi di

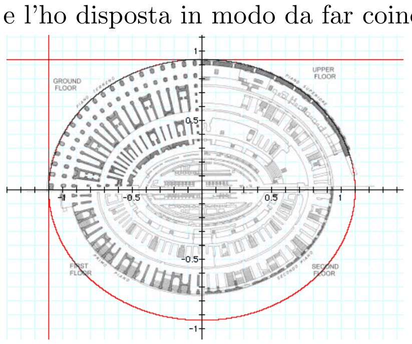

FIGURE 25

simmetria della pianta con gli assi coordinati (si noti che purtroppo questa pianta presenta 4 quadranti diversi che rappresentano diversi livelli). Ho poi tracciato le tangenti per due vertici e grazie alla graduazione riportata sugli assi coordinati ho stabilito che, se il colosseo è un'ellisse allora i semiassi (nelle unità di misura indicate in figura!) sono di 1,1 e di 0,94. Ho scritto l'equazione dell'ellisse con questi valori: $p = 1,1$ e $q = 0,94$:

$$\frac{x^2}{(1,1)^2} + \frac{y^2}{(0,94)^2} = 1.$$

Il computer ha disegnato l'ellisse e ora posso controllare se questa coincide o no con il colosseo.

A quanto mi si dice studi recenti dicono che il colosseo non è un ellisse, purtroppo il controllo qui fatto non è efficace, ma solo per la scarsa definizione dell'immagine utilizzata.