## 5.9. **Equazione parametrica dell'ellisse.**

5.9.1. *Equazioni parametriche della circonferenza.* Consideriamo un punto $P$ su di una circonferenza $C$ di raggio $R$. Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane in

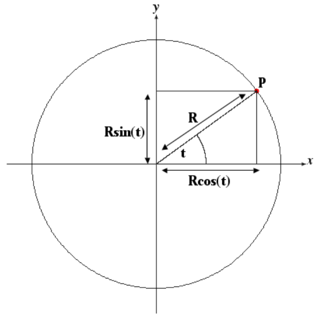


FIGURE 26

modo che il centro coincida con l'origine. Se la semiretta positiva dell'asse delle $x$ forma un angolo di $t$ radianti con il raggio che passa per $P$, allora il punto avrà coordinate (cfr. Fig. 26)

$$x = R\cos(t), \ y = R\sin(t).$$

*Queste sono dette* equazioni parametriche *della circonferenza.*

5.9.2. *Equazioni parametriche dell'ellisse.* Deformiamo una circonferenza di raggio $q$ in un'ellisse che ha semiassi di lunghezza rispettivamente $p$ e $q$ con $p > q$. Dobbiamo dilatare la circonferenza nella direzione delle ascisse di un fattore $k$ che,

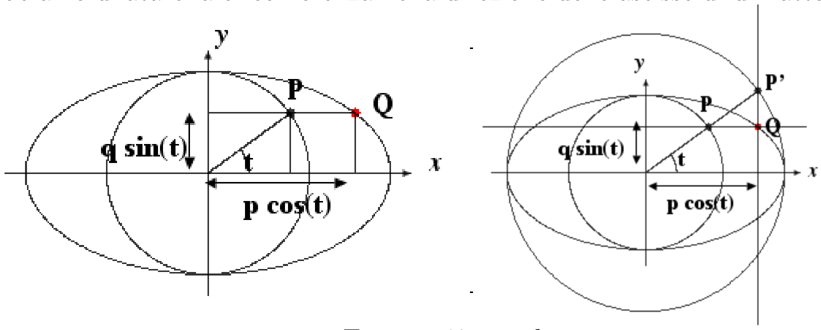


FIGURE 27. a - b

come abbiamo visto, deve soddisfare

$$kq = p.$$

Dunque il punto $P$ della circonferenza di coordinate

$$x = q\cos(t), \quad y = q\sin(t),$$

viene mandato nel punto $Q$ dell'ellisse che ha coordinate (cfr. Fig. 27a)

$$x = p\cos(t), \quad y = q\sin(t).$$

*Queste equazioni sono dette equazioni parametriche dell'ellisse.*

**Osservazione 5.13.** Osservando la Fig. 27b ricaviamo un'interpretazione utile: le due circonferenze in figura hanno raggi $p$ e $q$ rispettivamente, cioè uguali ai semiassi dell'ellisse. Il punto $Q$ dell'ellisse ha la stessa ascissa di $P'$ e la stessa ordinata di $P$. In effetti, ricordando le equazioni parametriche della circonferenza:

$$P = (q\cos(t), q\sin(t))$$
$$P' = (p\cos(t), p\sin(t))$$

e

$$Q = (p\cos(t), q\sin(t)).$$

5.10. **Altro metodo per disegnare un'ellisse.**

**Esercizio 5.14.** *Dati i segmenti in Fig. 28a, utilizzando l'Osservazione 5.13, disegnare l'ellisse che ha quei segmenti come assi.*

Soluzione. Per disegnare un punto dell'ellisse basta scegliere una semiretta uscente dall'origine e procedere come in Fig: 28b-c-d. Ripetendo il procedimento con un'altra semiretta si disegna un altro punto, ecc. Se si usano anche le proprietà di simmetria dell'ellisse, questa procedura consente di disegnare abbastanza rapidamente molti punti della curva.

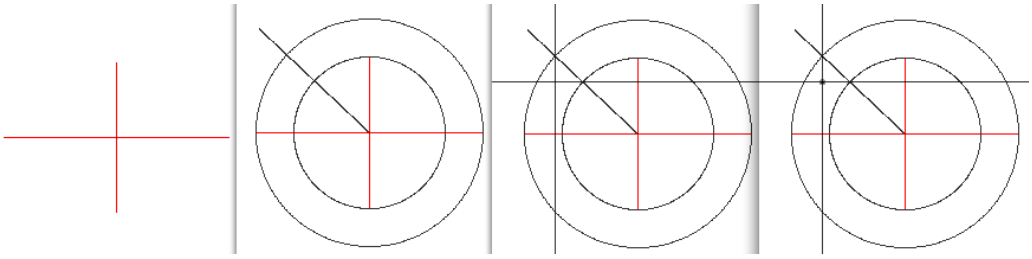

Figure 28. a - b - c - d. Aprire il file

## 6. Rette ed ellisse

6.1. **Rette e circonferenza.** Dati due punti $A$ e $B$ distinti, il luogo dei centri delle circonferenze che passano per i due punti è l'asse del segmento $AB$. Ciò significa che ogni circonferenza che passa per i due punti ha centro sull'asse e che ogni punto dell'asse è centro di una circonferenza che passa per i due punti (cfr. Fig. 29) Il

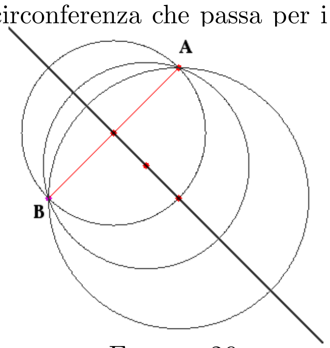


Figure 29

motivo è semplice: i punti dell'asse sono esattamente i punti equidistanti da $A$ e da $B$.

Dati tre punti distinti $A, B$ e $C$, se esiste una circonferenza che passa per tutti e tre, essa deve avere il centro sull'asse $a$ del segmento $AB$ e sull'asse $a'$ del segmento $BC$. Queste due rette si incontrano in un punto (a meno che non siano parallele) e quello è il centro della circonferenza cercata (cfr. Fig. 30)

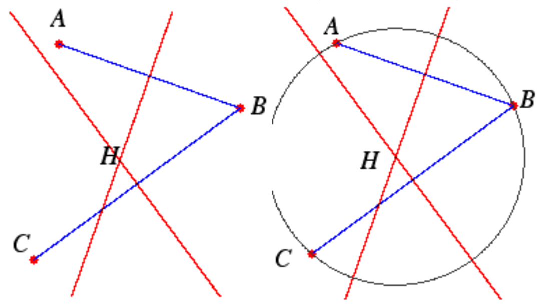


FIGURE 30. Aperto il file è possibile muovere con il mouse i punti

Gli assi $a$ e $a'$ sono paralleli se e solo se i tre punti sono allineati e questo è l'unico caso in cui non esiste una circonferenza che passa per essi. Questo situazione si può visualizzare con il file precedente, muovendo i punti in modo da allinearli; come si vede la circonferenza diventa sempre più grande man mano che i punti si allineano, fino a scomparire.

**Esercizio 6.1.** *Dati i tre punti non allineati tracciare la circonferenza che passa per essi.*

<u>Soluzione</u>. Dati i punti $A, B, C$ come abbiamo visto (cfr. Fig, 30) è sufficiente tracciare gli assi dei segmenti $AB$ e$BC$ per determinare il centro della circconferenza cercata. Tuttavia, per verificare la precisione del disegno, conviene tracciare (come in Fig. 31) gli assi di tutti e tre i segmenti $AB$, $AC$ e $BC$ che evidentemente si devono incontrare in un unico punto, centro della circonferenza cercata.

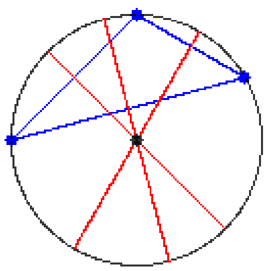

FIGURE 31

Abbiamo così ricavato che:

- *Per due punti distinti passano infinite circonferenze; precisamente l'asse del segmento che congiunge i due punti è il luogo dei centri di queste circonferenze.*

- *Per tre punti non allineati passa una ed una sola circonferenza, il cui centro si trova sull'intersezione dei (tre) assi dei tre segmenti determinati dai punti.*

Otteniamo così un:

- *Metodo per tracciare la circonferenza passante per tre punti non allineati.*

- *Per tre punti allineati non passa nessuna circonferenza e dunque una retta ha in comune con una circonferenza al più due punti. Diremo che la retta è* secante *se ha due punti in comune con la circonferenza,* tangente *se ne ha uno solo,* esterna *se non ne ha nessuno.*

6.2. **Proiezioni tra piani.** Vogliamo descrivere le possibili posizioni di una retta rispetto ad un'ellisse. A questo scopo diamo la seguente

**Definizione 6.2.** *Dati due piani $\pi$ e $\pi'$ ed un punto $V$ esterno ad entrambi chiamiamo* proiezione *di $\pi$ su $\pi'$ dal vertice $V$ la seguente corrispondenza: ad ogni punto $P$ di $\pi$ facciamo corrispondere il punto $P'$ di $\pi'$ che è allineato a $V$ e a $P$* (cfr. Fig. 32)

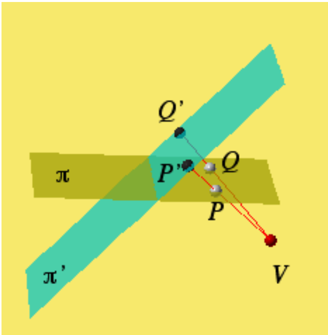


FIGURE 32

**Esempio 6.3.** *Proiezione di una diapositiva: la sorgente luminosa $V$ proietta l'immagine di un punto $P$ della diapositiva $\pi$ in un punto $P'$ dello schermo $\pi'$* (cfr. Fig. 33a).

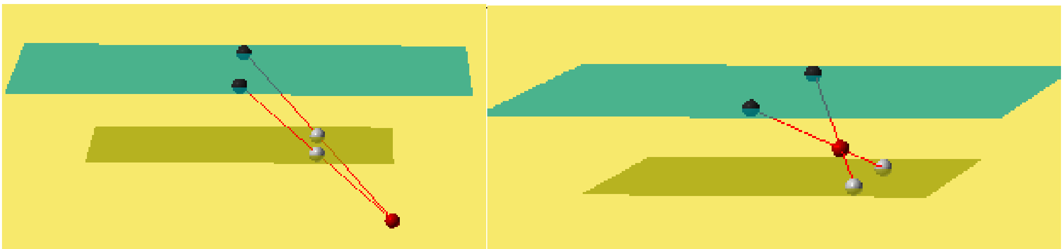

FIGURE 33. a - b

**Esempio 6.4.** *Fotografia di un quadro. Il raggio luminoso che esce dal punto $P$ del quadro $\pi$, passando attraverso il foro $V$ dell'obbiettivo, impressiona il punto $P'$ della lastra fotografica $\pi'$* (cfr. Fig. 33b).

Nei due esempi considerati i piani $\pi$ e $\pi'$ sono paralleli e il vertice è esterno ad essi (lampada del proiettore) oppure compreso tra essi (obbiettivo fotografico). È facile rendersi conto che se i piani sono paralleli, la corrispondenza $\pi \to \pi'$ stabilita dalla proiezione biunivoca. È anche chiaro che possiamo sempre invertire i ruoli dei due piani considerando la proiezione $\pi' \to \pi$, sempre dal vertice $V$.

Il caso però più interessante è, come vedremo, quando i due piani sono incidenti. Per il momento facciamo la seguente

**Osservazione 6.5.** *La proiezione di una retta è una retta.*

Infatti mentre il punto $P$ si muove sulla retta $s$ di $\pi$, il raggio luminoso $VP$ descrive il piano $\beta$ che passa per $V$ e per $s$. Tale piano taglia il piano $\pi'$ lungo una retta $s'$ e il raggio luminoso $VP$ si spegne appunto in un punto $P'$ di $s'$.

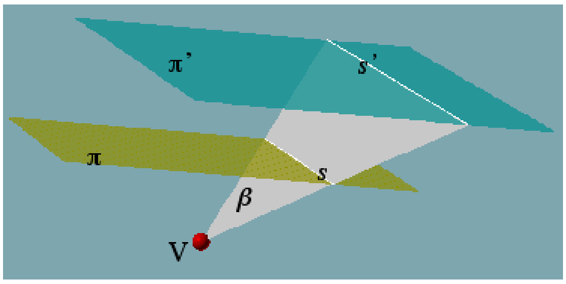


FIGURE 34. Aprendo il file si vede il punto $P$ che si muove sulla retta $s$ e la sua proiezione $P'$ che si muove sulla retta $s'$.

Nel caso di piani incidenti osserviamo che c'è una retta $t$, la retta comune ai due piani (cfr. Fig. 35), che è fissa nella proiezione, vale a dire la proiezione di ogni suo

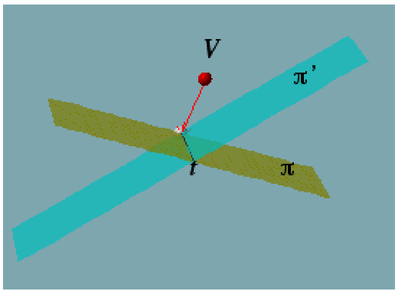


FIGURE 35

punto $P$ è il punto stesso.

Ma c'è un'altra questione più importante: consideriamo il piano $\alpha$, passante per il vertice $V$ e parallelo a $\pi'$. Come si vede dalla Fig. 36a, ogni punto $P$ della retta $r$ che $\alpha$ taglia sul piano $\pi$ non hanno nessuna proiezione su $\pi'$, perché il raggio $VP$ parallelo a $\pi'$. Scambiato il ruolo dei due piani e ripetuto l'argomento si giunge alla conclusione rappresentata in Fig. 36b: In conclusione

**Proposizione 6.6.** *Si consideri una proiezione $\pi \to \pi'$ tra due piani da un vertice $V$ esterno ad entrambi.*

*(i) Se i piani sono paralleli si tratta di una corrispondenza biunivoca.*

*(ii) Se i due piani si tagliano lungo una retta allora:*

*- Tutti i punti di questa retta sono* fissati *dalla proiezione*

*- Su ciascun piano c'è una retta su cui non è possibile definire la proiezione. Precisamente: il piani $\alpha$, parallelo per $V$ al piano $\pi'$, taglia sul piano $\pi$ una retta $r$; il piano $\alpha'$, paralleolo per $V$ al piano $\pi$, taglia sul piano $\pi'$ una retta $r'$. Le rette $r, r'$ sono le due rette che non si possono proiettare; ciascuna di esse divide ciascun piano in due semipiani che due a due si corrispondono biunivocamente.*

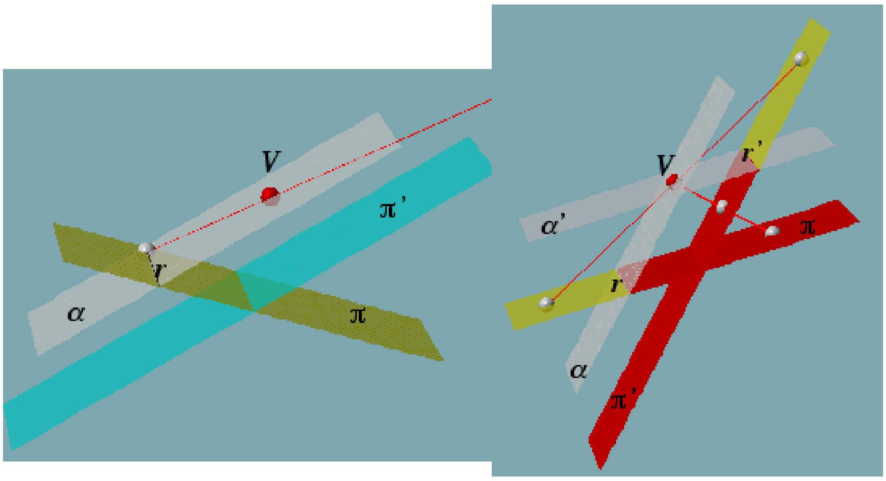


FIGURE 36. a - b

6.3. **Rette ed ellisse.** Vogliamo discutere le possibili posizioni di una retta rispetto ad un'ellisse. Data un'ellisse $E$ possiamo sempre pensarla come sezione di un cono circolare retto (cfr. Fig. 37) con un piano $\pi$. Tagliando lo stesso cono con un piano

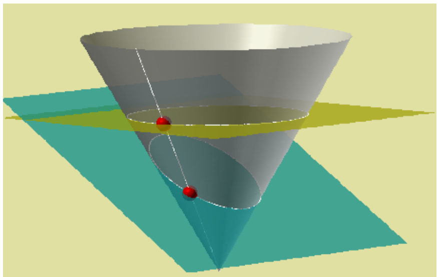

FIGURE 37

$\pi'$ perpendicolare all'asse otteniamo come sezione una circonferenza. Consideriamo la proiezione $\pi \to \pi'$ tra i due piani, dal vertice $V$ del cono.

Cominciamo coll'esaminare come sono disposte le due rette *cattive*, cioè le rette dei due piani che non sono proeittabili. Queste si ottengono tagliando i due piani, $\pi$ e $\pi'$, con i piani ad essi paralleli passanti per il vertice. Questi ultimi toccano il cono solo nel vertice[1]. Dunque le due rette in questione non toccano il cono.

Osserviamo poi che la proiezione stabilisce una corrispondenza biunivoca tra punti della circonferenza e punti dell'ellisse: si corrispondono tra loro i punti della circonferenza e dell'ellisse che stanno su una stessa generatrice (apri il file di Fig. 37).

Dunque se una retta del piano $\pi$ tocca in *tot* punti l'ellisse, la corrispondente retta sul piano $\pi'$ tocca in altrettanti punti la circonferenza. Possiamo perciò concludere che:

**Proposizione 6.7.** *Una retta ha in comuine con un'ellisse al più due punti.*

Pertanto possiamo addottare anche per l'ellisse la nomenclatura introdotta sopra per la circonferenza: diremo che una retta è *secante* un'ellisse se ha in comune con essa due punti distinti, *tangente* se ne ha uno solo, *esterna* se non ne ha nessuno.

[1]Si ricordi che se un piano taglia su un conio un'ellisse, allora il piano parallelo per il vertice tocca il cono solo nel vertice.

6.4. **Cappuccetto Rosso oltre lo specchio.** Cappuccetto Rosso deve andare al fiume con il secchio per poi portare l'acqua alla nonna, il suo problema è di trovare il percorso complessivo: *Casa di Capuccetto Rosso - Fiume - Casa della nonna* più breve possibile (problema importante considerato che c'è il Lupo Cattivo in giro). Possiamo formalizzare il problema come segue (assumendo il fiume rettilineo):
**Problema**. Dati una retta $r$ e due punti $A$ e $B$ dalla stessa parte rispetto alla retta, determinare la curva più breve che congiunge $A$ a $B$ toccando $r$.
Soluzione. È evidente che, scelto il punto $C$ da toccare sulla retta $r$ , il percorso più breve sarà dato dal segmento $AC$ più il segmento $CB$ (cfr. Fig. 38a). Dunque

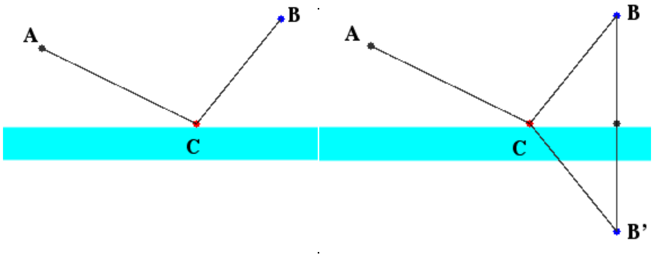


FIGURE 38

si tratta di trovare il punto $C$ di $r$ che rende minima la quantità

$$|AC| + |CB|.$$

Questo problema ha una soluzione sorprendentemente semplice (cfr. Fig. 38b): si consideri il simmetrico $B'$ di $B$ rispetto alla retta $r$. Qualunque sia il punto $C$ sulla retta, il triangolo $BB'C$ è isoscele, quindi

$$|CB| = |CB'|,$$

dunque dobbiamo trovare $C$ che renda minimo il percorso $ACB'$. Ma questo secondo problema ha una risposta ovvia: il precorso più breve da $A$ a $B'$ è la retta che li congiunge, quindi prendi $C$ allineato ad $A$ e $B'$ (cfr. Fig. 39a)

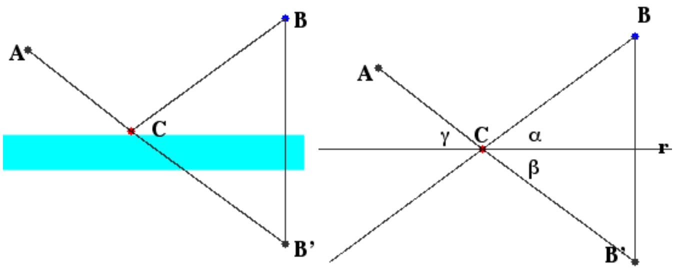


FIGURE 39. a - b

Possiamo concludere con la seguente

**Proposizione 6.8.** *Siano dati due punti $A$ e $B$ che stanno dalla stessa parte rispetto ad una retta $r$ assegnata.*

*(i )Per trovare il percorso più breve che congiunge $A$ a $B$ toccando la retta, basta prendere il simmetrico $B'$ di $B$ rispetto alla retta $r$; la retta $AB'$ taglierà la retta $r$ in un punto $C$ e la spezzata $ACB$ è il percorso cercato.*

*(ii) Inoltre la retta $r$ è la bisettrice dell'angolo formato dalle rette $AC$ e $BC$, o equivalentemente, i segmenti $AC$ e $BC$ formano con la retta $r$ angoli uguali.*

Dimostrazione. Abbiamo appena dimostrato la prima affermazione. Per la seconda si consideri la Fig. 39b: poiché il triangolo $BCB'$ è isoscele gli angoli $\alpha$ e $\beta$ sono uguali, dunque $r$ biseca l'angolo $B\hat{C}B'$. D'altra parte l'angolo $\gamma$ è opposto a $\beta$, quindi $\gamma = \beta = \alpha$ e dunque gli angoli $\gamma$ e $\alpha$ formati dai segmenti $AC$ e $BC$ con la retta $r$ sono uguali. □

## 6.5. **Tangente a un'ellisse.**

**Teorema 6.9.** *La retta $t$ tangente all'ellisse in un punto $P$ è caratterizzata dall'essere la bisettrice delle rette che congiungono $P$ ai fuochi, ovvero, equivalentemente, i segmenti $FP$ e $F'P$ formano angoli uguali con la retta $t$.*

Dimostrazione. Osserviamo che
- dalla costruzione dell'ellisse con una fune (cfr. 5.2) è chiaro che la somma delle distanze dai fuochi di un punto esterno all'ellisse è $> 2p$,
- se una retta $t$ è tangente ad un'ellisse in un suo punto $P$, tutti i punti della retta, tranne $P$, sono esterni.

Ne segue che $P$ è il punto della retta che rende minimo il percorso $FPF'$; dunque la tesi segue dalla Proposizione 6.8. □

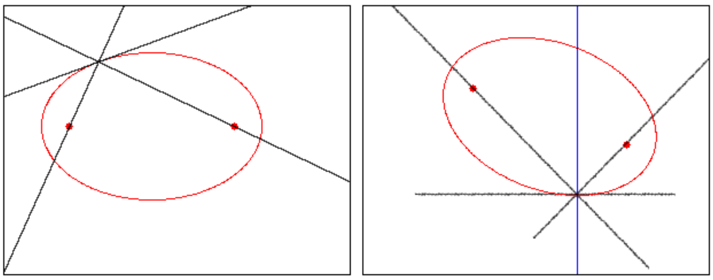

FIGURE 40. a - b. Apri il file

In Fig. 40a è rappresentata una tangente all'ellisse, in Fig. 40b la figura è ruotata in modo che la tangente sia orizzontale. Così è più facile verificare che la tangente biseca le rette che congiungono il punto di tangenza ai fuochi. La cosa è ancora più evidente se si guarda il filmato.

**Esercizio 6.10.** *Data un'ellisse e un suo punto $P$ (cfr. Fig. 41a) disegnare la retta tangente.*

Soluzione. a) Individuare gli assi di simmetria; b) tracciare la circonferenza che ha per diametro l'assemaggiore e proseguendo con il procedimento illustrato in **??** determinare i fuochi $F$ e $F'$; c) tracciare le rette $FP$ e $F'P$; d) con il procedimento illustrato nell'Esercizio 1.5 tracciare la bisettrice di queste rette che è la tangente cercata (attenzione di bisettrici ce ne sono due, ma una sola di esse è quella che ci serve).

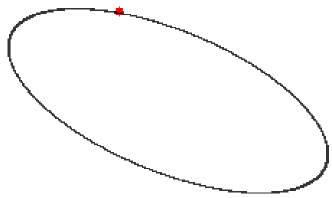

FIGURE 41

6.6. **Proprietà acustiche dell'ellisse.** Uno specchio riproduce limmagine degli oggetti facendoli apparire collocati dietro lo specchio, in posizione simmetrica a quella reale. Di questo ci rendiamo meglio conto se guardiamo di scorcio in uno specchio, posto ad esempio alla nostra sinistra; con il medesimo sguardo vediamo a destra la stanza e a sinistra la sua immagine virtuale. Con riferimento alla Fig.

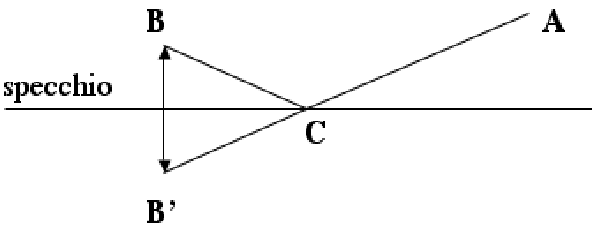


FIGURE 42

42, dal punto $A$ si vede nello specchio riprodotta limmagine di $B$ come se questo si trovasse in $B'$. Dunque il percorso del raggio luminoso che da $B$ conduce al nostro occhio deve essere $BCA$, perciò i raggi luminosi (e anche le onde sonore) sono riflessi da una superfice piana in modo che raggio incidente e raggio riflesso formino lo stesso angolo con il piano. Naturalmente questo avviene nello spazio(cfr. Fig. 43): il raggio incidente $r$ e il raggio riflesso $r'$ formano con la retta $s$ (loro

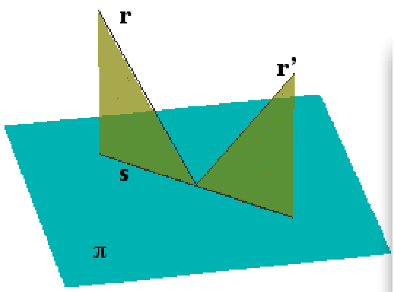


FIGURE 43

proiezione nortogonale sul piano $\pi$ dello specchio) lo stesso angolo .

Tutto ciò ha interessanti applicazioni al caso dell'ellisse. A noi, considerate le nostre piccole dimensioni rispetto al raggio terrestre, la terra sembra piatta; allo stesso modo un raggio luminoso (così sottile rispetto alla "curvatura di un ellisse") viene riflesso da uno specchio ellittico come se questo fosse piano, con linclinazione della tangente. Perciò un raggio uscente da un fuoco viene riflesso nell'altro fuoco, qualunque direzione abbia, infatti i due raggi formano con la tangente angoli uguali. Ma c'è di più, la lunghezza del percorso $FPF'$ non dipende dalla scelta del punto $P$ sullellisse, quindi due raggi luminosi che partono da $F$ in direzioni diverse nel medesimo istante, arrivano contemporaneamente in $F'$ (sempre che uno dei due non percorra direttamente proprio il segmento $FF'$ nel qual caso arriva prima). Analogamente (cfr. Fig. 19) se un suono viene emesso in $F$, esso si diffonde in

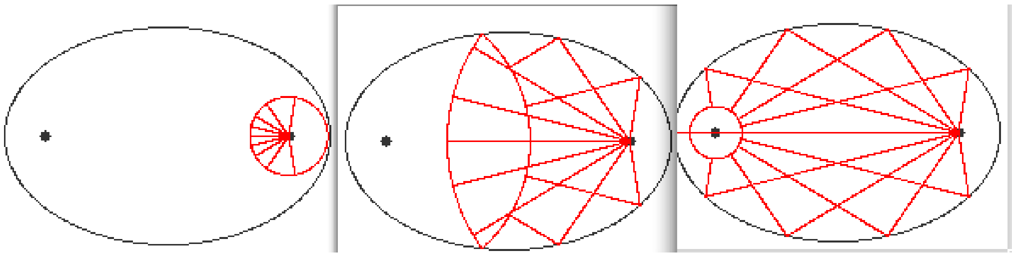

FIGURE 44. Apri il file

tutte le direzioni e da tutte le direzioni viene riflesso in $F'$ e da tutte le direzioni arriva contemporaneamente, quindi è chiaramente percepibile. Questo spiega perch in una sala ellittica anche molto grande, una parola bisbigliata in uno dei fuochi è chiaramente udibile nell'altro (in particolare la possibilità di ricostruire la parola è garantita dalla contemporaneità con cui i suoni arrivano dai vari punti dell'ellisse).