Cognome Nome matr.

Corso di laurea in Tecniche dell'edilizia
Istituzioni di Analisi Matematica
a.a. 2009/10 – compito finale – 14/06/10 (fila A)

Compilare immediatamente con i propri dati l'intestazione. Rispondere ai quesiti e svolgere gli esercizi negli appositi spazi motivando le risposte ove necessario. Nelle domande con risposta a scelta, indicarne chiaramente una sola e non aggiungere altro. Nei disegni, evidenziare le parti richieste negli esercizi. Non scrivere a matita (ad eccezione eventualmente dei disegni) e non utilizzare il colore rosso. Non utilizzare correttori (bianchetti o simili). Non è concesso l'uso di calcolatrici o simili.

Le domande a risposta multipla con risposta sbagliata danno punteggio negativo.

Al termine della prova **consegnare solo questo foglio**.

1. Si considerino la funzione $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $h(x,y) = \frac{1}{y-2}$ e l'insieme

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 2 \leq x \leq \frac{1}{2}y, \ 1 \geq y \geq 0 \right\}$$

(a) **(2 punti)** Disegnare D.

(b) **(± 1 punto)** D è normale rispetto a x. (V) (F)

(c) **(5 punti)** Calcolare

$$\iint_D h(x,y)\, dx\, dy$$

(d) **(± 1 punto)** L'unione di un numero infinito di insiemi a due a due disgiunti di misura nulla può essere di misura nulla. (V) (F)

2. Sia $\varphi : [0,4] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\varphi(t) = (t^2 - 2t, t^2)$$

(a) **(2 punti / $-0,5$ punti)** Il supporto di φ è contenuto nel seguente insieme:
(A) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y + 2\sqrt{y}\}$ (B) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y - 2\sqrt{y}\}$
(C) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2 + 2y\}$ (D) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2 - 2|y|\}$
(E) nessuno dei precedenti

(b) **(1 punto)** Disegna il supporto di φ.

(c) **($\pm$1 punto)** φ è chiusa (V) (F)

(d) **($\pm$1 punto)** φ è semplice (V) (F)

(e) **(2 punti)** $\varphi'(t) =$

(f) **($\pm$1 punto)** φ è regolare (V) (F)

(g) **($\pm$1 punto)** φ è regolare a tratti (V) (F)

3. (a) **(3 punti)** Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$u''(t) + 3u(t) = 0.$$

(b) **(3 punti)** Determinare una soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$u''(t) + 3u(t) = t^2 - 10t.$$

(c) **(3 punti)** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(t) + 3u(t) = t^2 - 10t \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 10 \end{cases}$$

4. Sia
$$f(x,y) = \frac{(y+1)^2}{x^2+1} + \frac{(x+1)^2}{y^2+1}.$$

(a) **(2 punti)** Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) \;=$$

(b) **(3 punti)** La matrice Hessiana di f è

$$Hf(x,y) \;=$$

5. Calcola

(a) **(1 punto)**
$$\frac{2+i}{i} =$$

(b) **(1 punto)**
$$\frac{i}{2+i} =$$

(c) **(1 punto)**
$$(2+i)\cdot i =$$

(d) **(1 punto)**
$$(2+i)^3 =$$

Cognome Nome matr.

Corso di laurea in Tecniche dell'edilizia
Istituzioni di Analisi Matematica
a.a. 2009/10 – compito finale – 14/06/10 (fila B)

Compilare immediatamente con i propri dati l'intestazione. Rispondere ai quesiti e svolgere gli esercizi negli appositi spazi motivando le risposte ove necessario. Nelle domande con risposta a scelta, indicarne chiaramente una sola e non aggiungere altro. Nei disegni, evidenziare le parti richieste negli esercizi. Non scrivere a matita (ad eccezione eventualmente dei disegni) e non utilizzare il colore rosso. Non utilizzare correttori (bianchetti o simili). Non è concesso l'uso di calcolatrici o simili.

Le domande a risposta multipla con risposta sbagliata danno punteggio negativo.

Al termine della prova **consegnare solo questo foglio**.

1. Si considerino la funzione $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $h(x,y) = x + y$ e l'insieme
$$D = Q_2 \setminus Q_1$$
dove $Q_2 = [0,3] \times [0,3]$, $Q_1 = [0,2) \times [0,2)$.

   (a) **(1 punti)** Disegnare D.

   (b) **(± 1 punto)** D è normale rispetto a x. (V) (F)

   (c) **(± 1 punto)** D è normale rispetto a y. (V) (F)

   (d) **(5 punti)** Calcolare
$$\iint_D h(x,y)\,dx\,dy$$

   (e) **(± 1 punto)** L'interno di un poligono è di misura nulla. (V) (F)

2. Sia $\varphi : [-4,4] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\varphi(t) = (t^2 + \sqrt{|t|}, \sqrt{|t|})$$

(a) **(2 punti / $-0,5$ punti)** Il supporto di φ è contenuto nel seguente insieme:
(A) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = y^4\}$ (B) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2 + \sqrt{y}\}$
(C) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2 + y\}$ (D) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^4 + y\}$
(E) nessuno dei precedenti

(b) **(± 1 punto)** φ è chiusa (V) (F)

(c) **(± 1 punto)** φ è semplice (V) (F)

(d) **(2 punti)** $\varphi'(t) =$

(e) **(± 1 punto)** φ è regolare (V) (F)

(f) **(± 2 punti / $-0,5$ punti)** La retta tangente in $t = 1$ ha equazione:
(A) $5x + y = 11$ (B) $5y - x = 3$ (C) non esiste (D) nessuna delle precedenti

3. (a) **(3 punti)** Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$u''(t) + 2u'(t) + 2u(t) = 0.$$

(b) **(3 punti)** Determinare una soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$u''(t) + 2u'(t) + 2u(t) = e^t.$$

(c) **(3 punti)** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(t) + 2u'(t) + 2u(t) = 1 \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 1 \end{cases}$$

4. Sia
$$f(x,y) = \frac{x^3 - y}{y} + \frac{y^3 + x}{x}.$$

(a) **(1 punto)** Il dominio di f è

$$\operatorname{dom} f \ =$$

(b) **(2 punti)** Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) \ =$$

(c) **(2 punti)** La matrice Hessiana di f è

$$Hf(x,y) \ =$$

5. **Numeri complessi** Calcola:

(a) 1 **punto**
$$\frac{-i}{1-i} =$$

(b) 1 **punto**
$$(1+2i)\cdot(1-i) =$$

(c) 1 **punto**
$$\frac{1-i}{-i} =$$

(d) 1 **punto**
$$\frac{1+i}{1-i} =$$