CAPITOLO I - ANGOLI

1. Angolo tra due semirette e due rette

1.1. Definizioni. Che cos'è un'angolo?

Definizione 1.1. *Un* angolo *è la porzione di piano compresa tra due semirette uscenti da uno stesso punto* (cfr. Fig.1). *Le due semirette sono dette* lati *dell'angolo, il punto, origine delle semirette,* vertice.

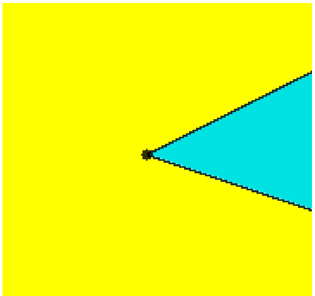

Figure 1

In effetti due semirette uscenti da uno stesso punto dividono il piano in due regioni, che, come veniamo di dire, si chiamano angoli. Se le due semirette sono ottenute suddividendo una retta con un punto e dunque sono l'una il prolungamento dell'altra, allora i due angoli sono due semipiani, cioè sono angoli *piatti.* In tutti gli altri casi dei due angoli uno, il minore, è *convesso* (in celeste in Fig.1), l'altro, il maggiore, *concavo.*

Ci capiterà di usare questa terminologia, anche in altri contesti, perciò vale la pena di dare subito una spiegazione.

Definizione 1.2. *Una regione del piano o dello spazio si dice* convessa *se, comunque presi due suoi punti, essa contiene tutto il segmento che li congiunge.*

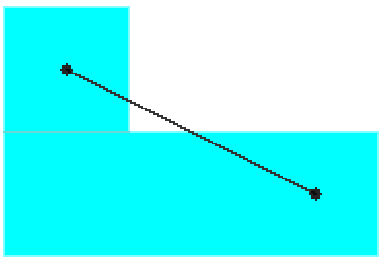

Figure 2

Ad esempio una stanza rettangolare è convessa, mentre una stanza a forma di "L" non lo è (cfr. Fig. 2). L'angolo minore (o convesso) formato da due semirette è compreso tra l'angolo nullo e l'angolo piatto, mentre il maggiore è compreso tra l'angolo piatto e l'angolo giro.

Due rette r ed s, incidenti dividono il piano in 4 parti, dette angoli. Se i 4 angoli sono uguali tra loro (*angoli retti*), le due rette si dicono *perpendicolari* o *ortogonali* (Fig. 3a); altrimenti dei 4 angoli, due sono acuti, uguali ed opposti al vertice e gli altri due sono ottusi, uguali ed opposti al vertice (Fig. 3b).

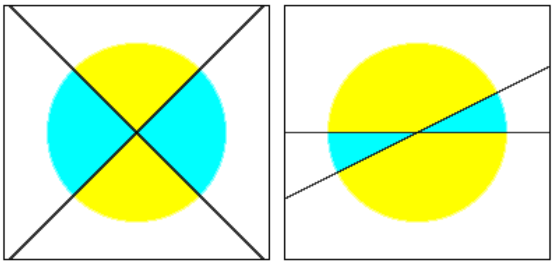

Figure 3. a - b

Definizione 1.3. *Date due semirette r ed s uscenti da uno stesso punto, di norma, indicheremo con $\widehat{rs}$ l'angolo convesso da esse formato. Analogamente, se r ed s sono due rette incidenti, con $\widehat{rs}$ intendiamo, di norma, uno dei due angoli acuti (del resto uguali) da esse formati.*[1]

1.2. **Misura degli angoli.**

Unità di misura. Gli angoli si possono misurare in gradi oppure in radianti. L'angolo di un grado è la 360-esima parte di un angolo giro, l'angolo di un *radiante taglia su una circonferenza, che ha per centro il vertice, un arco lungo quanto il raggio.* In Fig. 4 è evidenziato l'angolo θ; l'arco $\widehat{AB}$ è lungo quanto il raggio OA, quindi l'angolo θ misura 1 radiante. Abbiamo così due unità di misura: un angolo misura

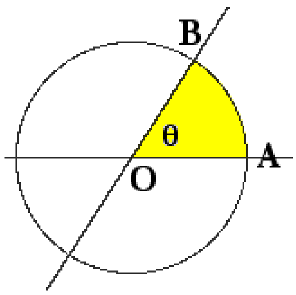

Figure 4

t gradi se è pari a t angoli di un grado[2], misura x radianti se è pari a x angoli di un radiante.

[1]Per i limiti di questa convenzione si veda la successiva Osservazione 1.5.

[2]Poiché t può non essere un numero intero, sarebbe meglio dire: se il *rapporto* tra l'angolo θ e l'angolo di 1 grado è pari a t, allora l'angolo θ misura t gradi.

Confrontiamo i due sistemi di misura, cioè rispondiamo alla seguente domanda: un angolo di t gradi, quanti radianti misura? Osserviamo che un angolo retto taglia su una circonferenza che ha per centro il vertice un arco pari a 1/4 di circonferenza; un angolo piatto taglia un arco pari a mezza circonferenza; un angolo giro un arco pari a tutta la circonferenza, che misura 2π raggi. Dunque un angolo giro misura 360 gradi ovvero 2π radianti. Cioè l'angolo di un grado misura $\frac{2\pi}{360}$ radianti. Così possiamo concludere che

Proposizione 1.4. *Un angolo θ, che misura t gradi, misura $\frac{2\pi}{360}t$ radianti.*

Perché usare i radianti? L'uso dei gradi è molto diffuso; una delle ragioni della sua comodità è una certa coerenza con il sistema di misura del tempo: il giorno ha 24 ore, l'angolo giro misura 360 gradi e 24 divide 360, precisamnete $24 \times 15 = 360$. Ne viene che se dividiamo la terra in 24 spicchi in cui consideriamo la stessa ora legale, ciascuno spicchio misura un numero intero di gradi, 15.

Chi è abituato ad usare i gradi trova una certa difficoltà ad usare i radianti come sistema di misura; può essere utile capire perché questo secondo sistema ha qualche vantaggio. In Fig. 5 è

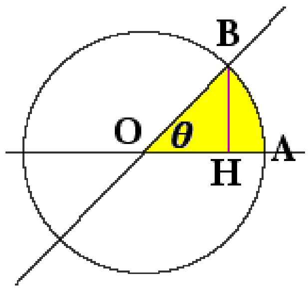

FIGURE 5

richiamata la definizione di seno e coseno di un angolo: la circonferenza ha raggio 1, la lunghezza del segmento OH è pari al *coseno* dell'angolo θ e la lunghezza di HB al *seno* di θ. Dunque seno e coseno di un angolo sono le lunghezze di certi segmenti determinati dall'angolo[3].

Possiamo poi definire due funzioni: $sin(x)$ e $cos(x)$ come segue: *dato un angolo θ che misura x* **radianti**, *$sin(x)$ è il seno di θ e $cos(x)$ è il coseno di θ.*

Volendo possiamo anche introdurre altre funzioni, che potremmo indicare per esempio con $Sin(t)$ e $Cos(t)$, così definite: *dato un angolo θ che misura t* **gradi**, *$Sin(t)$ è il seno di θ e $Cos(t)$ è il coseno di θ.*

La cosa sembra complicata ma non lo è: mutatis mutandis il seno, di una certa quantità di vernice, potrebbe essere l'area di muro che riesco a dipingere con quella vernice, allora $sin(x)$ sarebbe ad es. il seno di x litri di vernice e $Sin(t)$ il seno di t galloni di vernice.

Come detto, se un angolo θ misura t gradi, allora esso misura anche $\frac{2\pi}{360}t$ radianti; perciò

$$Sin(t) = sin(\frac{2\pi}{360}t)$$
$$Cos(t) = cos(\frac{2\pi}{360}t)$$

Il fatto è che le funzioni $sin(x)$ e $cos(x)$ sono molto più comode delle funzioni $Sin(t)$ e $Cos(t)$ che abbiamo appena inventato. Infatti

$$\frac{d}{dx}sin(x) = cos(x) \text{ e } \frac{d}{dx}cos(x) = -sin(x),$$

[3]La definizione di *seno* e *coseno* può essere formulata in modo leggermente diverso, utilizzando la medesima Fig. 5. Rinunciamo all'ipotesi che il raggio della circonferenza sia 1 e diciamo che: *il coseno dell'angolo θ è il* **rapporto** *tra la lunghezza di OH e il raggio*, analogamente possiamo definire il *seno di θ come il* **rapporto** *tra la lunghezza del segmento HB e il raggio.* Con questa definizione *seno* e *coseno* di un angolo sono numeri che non dipendono dalla scelta dell'unità di misura delle lunghezze.

mentre per le funzioni $Sin(t)$ e $Cos(t)$ vale una formula più complicata:

$$\frac{d}{dt}Sin(t) = \frac{2\pi}{360}Cos(t) \text{ e } \frac{d}{dt}Cos(t) = -\frac{2\pi}{360}Sin(t).$$

Ma c'è di peggio. Per calcolare con la precisione che voglio il valore di $sin(x)$ posso usare la formula di Taylor:

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

che per $Sin(t)$ diventa:

$$Sin(t) = \frac{2\pi}{360}t - \frac{(2\pi)^3}{360^3}\frac{t^3}{3!} + \frac{(2\pi)^5}{360^5}\frac{t^5}{5!} - \dots$$

Si noti che lo svantaggio di quest'ultima formula non è dovuto solo all'evidente maggior complicazione. Il difetto più grave è che, per stabilire quanti termini della sommatoria conviene utilizzare al fine di ottenere la precisone voluta, sono costretto a valutare con attenzione l'effetto che ha, sul mio calcolo, l'inevitabile approssimazione con cui esprimo π.

Vale la pena di insistere sulla comodità della formula di Taylor per calcolare i valori di $sin(x)$, perchè con questa formula un tempo si scrivevano le tavole della funzione seno e con questa formula lavorano i computer. In effetti la formula completa si scrive continuando ad alternare il segno dei termini:

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

e la *formula del resto* dice che se mi arresto, ad esempio, al termine $\frac{x^{11}}{11!}$, allora l'errore che commetto tralasciando i termini successivi è inferiore a $|\frac{x^{13}}{13!}|$. Possiamo limitarci a calcolare il valore del seno per angoli compresi tra 0 e $\pi/2$, perchè per angoli che cascano negli altri tre quadranti ci si può facilmente ricondurre a questi.

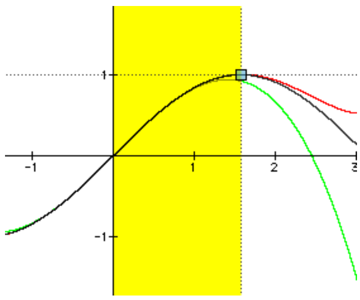

FIGURE 6

In Fig. 6 sono riportati i grafici per $0 < x < \pi/2$ delle funzioni:
- in nero la funzione $sin(x)$
- in verde la funzione $x - \frac{x^3}{3!}$ con cui approssimiamo $sin(x)$ usando solo due termini
- in rosso la funzione $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ con cui approssimiamo $sin(x)$ usando tre termini.

Come si vede dalla figura l'errore massimo si ha in $x = \pi/2$ (all'estremità destra della striscia gialla). Per la funzione verde possiamo stimare l'errore E : poiché $\pi/2 = \frac{3{,}1415}{2} < \frac{3{,}2}{2}$, avremo

$$E \le \frac{|x|^5}{5!} \le \frac{(\pi/2)^5}{5!} < \frac{(1,6)^5}{5!} < 0,09$$

quindi meno di un decimo. Mentre se usiamo la funzione rossa si può verificare con lo stesso calcolo che l'errore è inferiore al centesimo. Cioè la formula

$$sin(x) \simeq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

permette di calcolare con precisione le prime due cifre decimali di $sin(x)$. In Fig. 7 ci sono due ingrandimenti della Fig. 6 che permettono di vedere che gli errori sono, come detto, rispettivamente inferiori a un decimo e a un centesimo.

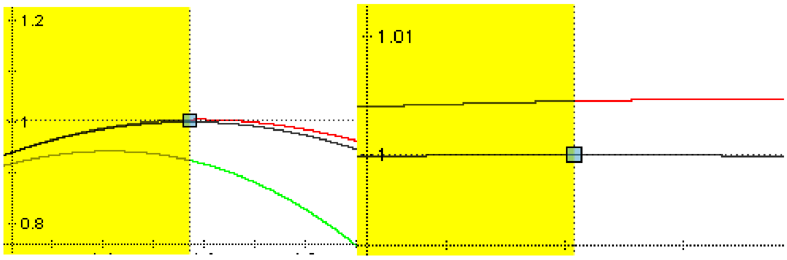

FIGURE 7

Nota bene. Dalla convenzione stabilita in Definizione 1.3 segue che l'angolo $\widehat{rs}$ formato da due semirette è minore di un angolo piatto, quindi la sua misura sarà compresa tra 0 e 180°, ovvero tra 0 e π radianti. Mentre l'angolo formato da due rette incidenti sarà acuto, quindi di misura compresa tra 0 e 90°, ovvero tra 0 e $\pi/2$ radianti.

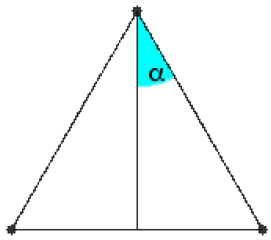

FIGURE 8. È un triangolo equilatero.

Un'ultima precisazione, forse inutile. Spesso - e lo faremo anche noi - si confonde tra angolo e sua misura. Ad esempio si dice che l'angolo α in Fig. 8 misura 30° oppure $\pi/6$ radianti, ma poi si scrive $\alpha = \pi/6$ e si scrive anche $sin(\alpha)$ o $cos(\alpha)$, intendendo così che α è la misura dell'angolo.

1.3. **Angoli orientati.** Talvolta è utile considerare un orientamento degli angoli. Supponiamo di avere una bussola, sia n la semiretta uscente dal centro e diretta verso il nord, e sia a la semiretta che rappresenta la direzione di marcia. Possiamo convenire che $\widehat{na} = 15°$ significhi che la direzione di marcia è spostata di 15 gradi verso est, mentre $\widehat{na} = -5°$ vuol dire che la direzione di marcia è spostata di 5 gradi verso ovest.

Precisamente; siano date due semirette r e s uscenti da un punto O e l'angolo $\widehat{rs}$ da esse formato misuri x radianti (o gradi). Conveniamo che tale angolo debba considerarsi positivo, e quindi misurare x radianti, se percorrendolo da r verso s ci muoviamo in senso antiorario; in caso contario lo consideriamo negativo, e quindi misurerà $-x$ radianti.

Osservazione 1.5. Con questa convenzione è essenziale l'ordine con cui consideriamo le due semirette: gli angoli $\hat{rs}$ e $\hat{sr}$ risultano infatti opposti.

Inoltre se vogliamo registrare le successive posizioni della semiretta che rappresenta la direzione di marcia e supponiamo che questa si sposti rapidamente da nord verso est poi verso sud, poi a sud-ovets allora registreremo successivamente:

$5°, 32°, 87°$ (cioè quasi est), $115°, 178°$ (cioè quasi sud), $184°, 193° \ldots$. Ma allora abbiamo violato la convenzione (cfr. Definizione 1.3) che voleva che l'angolo tra due semirette fosse sempre convesso, cioè minore di un angolo piatto. Questo è un esempio del motivo per cui nella suddetta definizione abbiamo scritto *di norma*. Da una parte, in generale, è comodo che quando scriviamo $\widehat{rs}$ non ci siano dubbi su quale angolo intendiamo indicare, dall'altro, in circostanze particolari può essere conveniente considerare anche angoli concavi. Discorso analogo vale per due rette incidenti, in circostanze particolari può interessare l'angolo ottuso da esse formato e non quello retto, quindi di nuovo l'indicazione della definizione va presa cum grano salis.

1.4. **Angolo tra due rette nello spazio.** L'angolo, formato da due rette dello spazio che sono incidenti in un punto, non presenta concettualmente nessuna difficoltà aggiuntiva, infatti le due rette individuano univocamente il piano su cui giacciono e ci possiamo ricondurre tranquillamente al caso piano.

Tuttavia in pratica qualche difficoltà c'è. Si consideri ad esempio il seguente

Esercizio 1.6. *Qual è l'angolo formato dalle diagonali delle faccie del cubo in Fig. 9a ?*

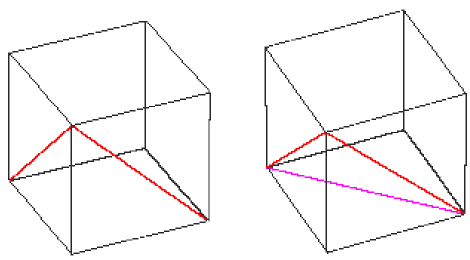

FIGURE 9. a - b. Aprendo il file è possibile muovere con il mouse il cubo.

<u>Soluzione.</u> Si consideri la Fig. 9b. I tre lati del triangolo sono uguali tra loro, dunque si tratta di un triangolo equilatero e, poichè la somma degli angoli interni di un triangolo è di $180°$, l'angolo cercato misura $60°$, cioè $\pi/3$ radianti.

2. Angolo tra una retta ed un piano

2.1. **Retta perpendicolare ad un piano.**

Definizione 2.1. *Una retta r ed un piano α incidenti in un punto P si dicono* perpendicolari *o* ortogonali *se la retta r è perpendicolare a tutte le rette del piano che passano per P. In tal caso si dice anche che la retta r è la* retta normale *al piano α condotta per P.*

Non dimostriamo, considerandola sufficientemente evidente, la seguente

Proposizione 2.2. *(i) Siano r ed α una retta ed un piano incidenti in un punto P. Se la retta r è perpendicolare in P a due rette del piano α allora è perpendicolare a tutte le altre rette del piano α che passano per P.*

(ii) Tutte le rette perpendicolari ad uno stesso piano sono parallele tra loro.

Vediamo subito un'applicazione della Proposizione 2.2(i):

Esercizio 2.3. *Si consideri la diagonale d della faccia di un cubo. Si disegni il piano ortogonale alla diagonale d in uno dei suoi estremi*

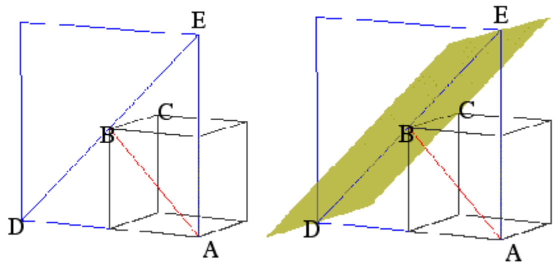

FIGURE 10. a - b

<u>Soluzione.</u> Si consideri la diagonale AB di una faccia del cubo (cfr. Fig. 10a). Per costruire il piano ortogonale passante per il punto B, per la Proposizione 2.2, è sufficiente trovare due rette per B ortogonali ad AB. Una di queste è lo spigolo BC, l'altra la si trova per es. considerando la perpendicolare ad AB sul piano della faccia del cubo: la retta DE. Quindi il piano cercato è il piano che contiene le rette BC e DE.

Esercizio 2.4. *Si disegni il piano ortogonale alla diagonale di un cubo nel suo punto medio.*

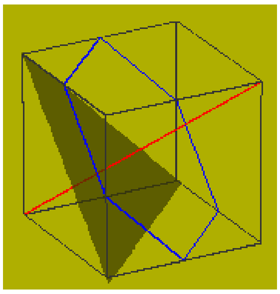

FIGURE 11. Aprire il file per vedere il filmato

<u>Soluzione.</u> Siano A e B vertici opposti di un cubo (cfr. Fig. 11). Immaginiamo di disporre il cubo con il vertice A in alto e il vertice B in basso. La diagonale AB è dunque disposta verticalmente e il piano cercato è il piano orizzontale che divide in due il cubo. Dal vertice A escono tre spigoli; immaginiamo che tre punti P_1, P_2, P_3 si allontanino da A alla stessa velocità lungo ciascuno di questi spigoli e vadano verso B. Il piano che passa per questi tre punti si mantiene orizzontale (cioè ortogonale alla diagonale AB). Inoltre i tre punti sono equidistanti da A, dunque il piano taglia sul cubo un triangolo equilatero. I tre punti, percorso il primo tratto (uno spigolo), arrivano contemporaneamente in tre vertici (in questo momento la sezione è il triangolo equilatero formato dalle diagonali delle facce). Lì hanno due strade per proseguire: possiamo supporre che ciascuno di essi scelga per esempio quella alla sua destra; percorrono il secondo tratto (spigolo) fino al nuovo vertice, intanto il piano che passa per i tre punti continua a mantenersi orizzontale; al termine del secondo tratto, ciascuno dei tre punti ha davanti a sè il terzo tratto

che lo conduce nel vertice B. Dunque il punto medio del percorso si trova a metà del secondo tratto.

Pertanto il piano che cerchiamo è così determinato: *dei 12 spigoli del cubo, 3 escono da A, 3 escono da B, i restanti 6 vengono tagliati dal piano nel loro punto medio. Dunque la sezione è un esagono regolare.* Inoltre abbiamo scoperto che ci sono due triangoli equilateri formati dalle diagonali delle facce che sono ortogonali alla diagonale (in Fig. 11 ne vedi uno, chi è l'altro?)

2.2. **Angolo tra retta e piano.** Le cose si complicano se consideriamo una retta r, incidente ad un piano α in un suo punto P, che non è la normale (cioè la perpendicolare). Che cos'è l'angolo formato da questa retta con il piano ? Evidentemente se r non è perpendicolare al piano α, allora le rette del piano che passano per P fromano con r angoli tra loro diversi (vedi Fig. 12). Diamo la seguente

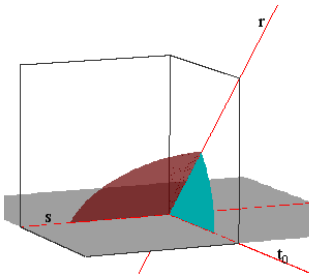

FIGURE 12. Le rette s e t_0 del piano α formano con la retta r angoli diversi.

Definizione 2.5. *Siano r e α una retta ed un piano incidenti in un punto P e non ortogonali tra loro. L'angolo $\widehat{r\alpha}$ tra la retta r e il piano α è, per definizione, l'angolo tra la retta r e la sua proiezione ortogonale t_0 sul piano.*

(In Fig. 12 la retta t_0 è la proiezione ortogonale di r sul piano, lo si riconosce facendo riferimento al profilo del cubo. Quindi l'angolo $\widehat{r\alpha}$ è l'angolo celeste in figura.)

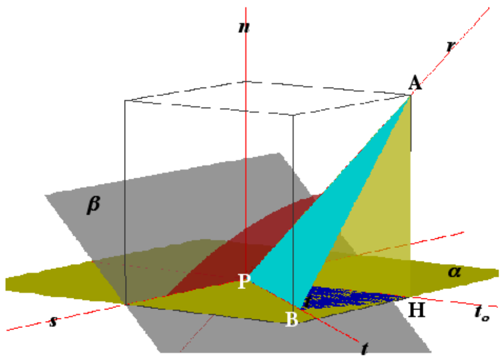

FIGURE 13. Aprendo il file si vede la retta t muoversi sul piano

Proposizione 2.6. (Si segua l'enunciato con la Fig. 13) *Sia r una retta incidente (e non perpendicolare) in P ad un piano α.*

(i) Condotto il piano β perpendicolare ad r in P, questo taglia su α una retta s che è perpendicolare a r.

(ii) Tutte le altre rette t del piano α che passano per P formano con r angoli $\widehat{rt}$ minori di un angolo retto. (Ovviamente qui, come da Definizione 1.3, con $\widehat{rt}$ si intende l'angolo acuto formato dalle due rette!)

(iii) Inoltre, tra queste rette, la retta t_0 che forma con r l'angolo minimo è la proiezione ortogonale di r sul piano α.

(iv) L'angolo $\widehat{r\alpha} = \widehat{rt_0}$ è il complementare dell'angolo $\widehat{rn}$ formato da r con la normale n al piano.

Dimostrazione. L'affermazione (i) è evidente: il piano β è ortogonale ad r, quindi tutte le rette di β, in particolare s, che passano per P sono ortogonali a r.

Per giustificare (ii) si osservi che le rette t del piano α che passano per P, diverse da s, formano angoli minori di un retto con r; perchè sul piano α non ci possono essere, oltre ad s altre rette perpendicolari a r, altrimenti questa sarebbe ortogonale al piano.

Per provare (iii) si osservi (vedi Fig. 13) che i triangoli APH e APB hanno in comune il lato AP; i lati PH e PB sono uguali per costruzione. Il segmento AH è minore di AB perché H è il piede della perpendicolare al piano α condotta da A. Quindi $\hat{r}t_0 = A\hat{P}H < A\hat{P}B = \hat{r}t$.

L'ultima affermazione è chiara se si osserva che t_0 e n sono ortogonali. $\square$

Riassumendo possiamo dire che: *data una retta r incidente ad un piano α in un punto P l'angolo che essa forma con una retta t del piano α passante per P* (intendi bene l'angolo acuto $\widehat{rt}$) *dipende dalla retta scelta. Esso è massimo quando t è perpendicolare ad r, minimo quando t coincide con la proiezione ortogonale t_0 di r sul piano α. Quest'angolo minimo $\widehat{rt_0}$ è, per definizione, l'angolo $\widehat{r\alpha}$ tra la retta r e il piano α. Infine se n_α è la perpendicolare al piano α condotta per P, allora $\widehat{r\alpha} + \widehat{rn_\alpha}$ è retto.*

Esercizio 2.7. *Determinare l'angolo formato dalla diagonale di una faccia di un cubo con una delle faccie a cui è incidente.*

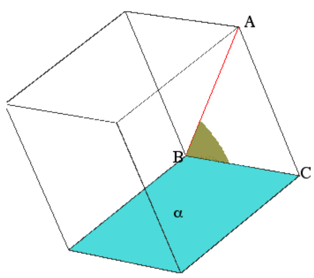

FIGURE 14

Soluzione. Si consideri la Fig. 14: determiniamo l'angolo formato dalla diagonale AB con la faccia α. Per la Definizione 2.5 tale angolo è uguale a quello formato dalla diagonale AB con la sua proiezione ortogonale sulla faccia α. Lo spigolo AC è ortogonale alla faccia α, quindi lo spigolo CB è la proiezione ortogonale della diagonale. Dunque l'angolo che ci interessa è l'angolo formato dalla diagonale AB con lo spigolo CB, che, con tutta evidenza è di $45°$, cioè di $\pi/4$ radianti.

Esercizio 2.8. *Determinare l'angolo formato dalla diagonale di un cubo con una delle faccie a cui è incidente.*

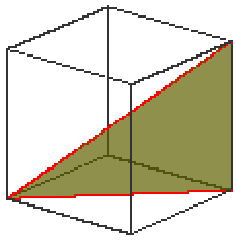

Figure 15

<u>Soluzione.</u> Come si vede dalla Fig. 15 la diagonale del cubo si proietta ortogonalmente sulla diagonale di una faccia e quindi l'angolo θ che ci interessa è l'angolo tra la diagonale del cubo e la diagonale di una faccia (che escono dallo stesso vertice). Esse formano con uno spigolo del cubo un triangolo rettangolo i cui lati, sono 1, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ e quindi $\sqrt{3}sin(\theta) = 1$. Utilizzando una calcolatrice si ricava $\theta = 0,61548$ radianti.

3. Angoli tra piani

3.1. **Piani ortogonali.** Due piani incidenti (non paralleli) si tagliano lungo una retta e dividono lo spazio in 4 regioni dette *diedri* o angoli diedri.

Definizione 3.1. *Due piani incidenti sono* ortogonali *se i* 4 *angoli diedri sono uguali tra loro.*

Si osservi (non lo dimostriamo perché lo riteniamo sufficientemente evidente) che, dati due piani perpendicolari, le normali ai piani (condotte per un punto comune ai piani) sono a loro volta perpendicolari. Quindi potremmo anche dire: *due piani incidenti sono perpendicolari se le normali ad essi condotte per un punto comune sono perpendicolari.*

3.2. **Angolo tra due piani.** Si consideri la Fig. 16. I due piani α e β sono

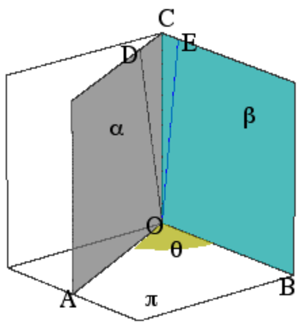

Figure 16

incidenti lungo la retta OC. Le rette OD e OE che stanno sui due piani formano tra loro un angolo $D\hat{O}E$ molto piccolo, mentre le rette OD e OB, anche loro sui due piani, formano un angolo $B\hat{O}D$ prossimo ad un angolo retto (ricordo ancora che con l'angolo tra due rette si intende l'angolo acuto da esse formato, quindi l'angolo retto è il più grande possibile.) Insomma dovrebbe essere chiaro che non è facile trovare una correlazione tra l'angolo diedro formato dai due piani e l'angolo $\widehat{rs}$ tra una retta r del piano α e una retta s del piano β, perché - scegliendo in modo opportuno queste rette r, s - posso fare in modo che l'angolo $\widehat{rs}$ assuma qualunque valore tra $0°$ e $90°$.

Dunque che cos'è l'angolo tra due piani? Nella stessa Fig. 16 il piano π è ortogonale ad entrambi i piani α e β e taglia su di essi le rette OA e OB che formano un certo angolo θ (in giallo in figura). Questo è l'angolo $\widehat{\alpha\beta}$. Precisamente:

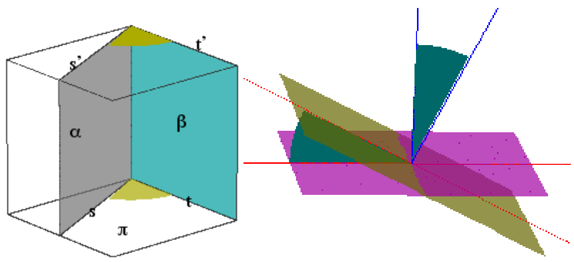

FIGURE 17. a - b

Definizione 3.2. (Vedi Fig. 17a) *Dati due piani α e β incidenti lungo una retta (spigolo del diedro) s, si consideri un piano π perpendicolare ad s in un suo punto P. Esso taglia sui piani due rette s e t. L'angolo $\widehat{rs}$ non dipende dalla scelta del particolare piano π, cioè del punto P sullo spigolo. Infatti, sostituendo il piano π con un piano parallelo, che taglia lo spigolo in un altro punto, si determineranno altre rette s' e t'. Ma s e s' sono tra loro parallele, così t e t', quindi gli angoli $\widehat{st} = \widehat{s't'}$ sono uguali. Dunque senza nessuna ambiguità possiamo porre per definizione:*

$$\widehat{\alpha\beta} := \widehat{st}.$$

Osservazione 3.3. (vedi Fig. 17b) *L'angolo $\widehat{\alpha\beta}$ formato da due piani α e β incidenti lungo una retta s coincide con l'angolo $\widehat{n_\alpha n_\beta}$ formato dalle rette normali n_α e n_β ai piani condotte per uno stesso punto P dello spigolo s.*

Esercizio 3.4. *Si disegnino due piani α e β incidenti lungo una retta s.*

(i) Si traccino su ciascuno di essi due rette: r_α sul piano α e una retta r_β sul piano β, concorrenti in un punto P dello spigolo s, tali che l'angolo $\widehat{r_\alpha r_\beta}$ da esse formato sia retto.

(ii) Si traccino altre due rette r'_α, r'_β, come prima r'_α sul piano α, r'_β sul piano β, concorrenti in P, tali che l'angolo $\widehat{r'_\alpha r'_\beta}$ da esse formato sia piccolissimo.

Esercizio 3.5. *Un tetraedro regolare è un poliedro le cui 4 facce sono triangoli equilateri. Gli angoli diedri tra le facce sono tutti uguali tra loro. Determinare una correlazione tra l'angolo diedro φ formato dalle facce di un tetraedro regolare e l'angolo θ formato dalla diagonale di un cubo con la diagonale di una faccia dello stesso cubo (ovviamente esse si dipartono da uno stesso vertice.)*

Soluzione. Utilizzando le diagonali delle facce di un cubo possiamo costruire un tetraedro regolare (cfr. Fig. 18a). La perpendicolare a ciascuna faccia del tetraedro

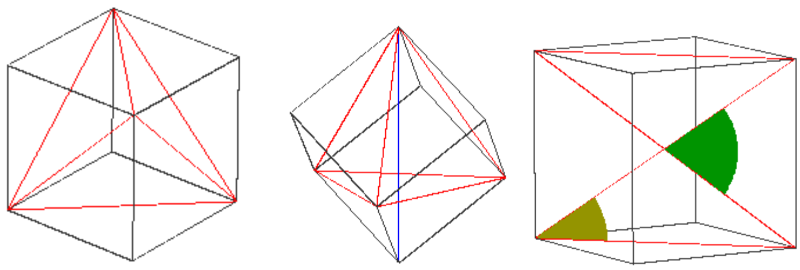

Figure 18. a - b - c

è la diagonale del cubo che passa per il vertice opposto alla faccia, come abbiamo già osservato nell'Esercizo 2.4 (cfr. Fig. 18b). L'angolo $\theta = \widehat{\alpha\beta}$ tra due facce α e β del tetraedro è l'angolo $\widehat{n_\alpha n_\beta}$ tra le loro normali (cfr. Osservazione 3.3), cioè l'angolo tra due diagonali del cubo. Due diagonali di un cubo sono anche le diagonali di un rettangolo che ha per base la diagonale di una faccia e per altezza lo spigolo del cubo (cfr. Fig. 18c con Fig: 15). Come si vede dalla Fig. 18c l'angolo φ (verde) tra le due diagonali del cubo è il doppio dell'angolo θ (giallo) tra la diagonale del cubo e la diagonale di una faccia. In conclusione $\varphi = 2\theta$.

Osservazione 3.6. Nell'Esercizio 2.8 avevamo calcolato che $\theta \simeq 0,61548$ radianti. Dunque l'angolo φ formato dalle facce di un tetraedro regolare misura circa $70,5288°$. Questi numeri sembrano poco interessanti. Ma se proviamo ad accostare 5 tetraedri regolari con un lato in comune come in Fig. 19, poiché $5 \times 70,5288 = 352,644°$ si ottiene qualcosa di meno di un angolo giro e resta una fessura di circa $7,3561°$.

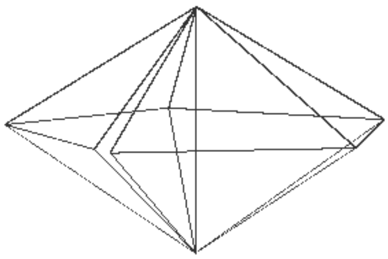

Figure 19

Esercizio 3.7. *Si determini l'angolo formato dai piani in Fig. 20.*

Soluzione. Per definizione (cfr. Definizione 3.2) per determinare l'angolo $\widehat{\alpha\beta}$ tra i due piani si considera un piano π ortogonale allo spigolo dell'angolo diedro; tale piano π taglia sui due piani due rette s e t e risulta $\widehat{\alpha\beta} = \widehat{st}$.

Nel caso presente lo spigolo è una diagonale del cubo e sappiamo (cfr. Esercizio 2.4) che il piano perpendicolare alla diagonale nel centro del quadrato taglia sulle facce del cubo un esagono regolare. Tracciamo questo esagono (cfr. Fig. 21a)[4].

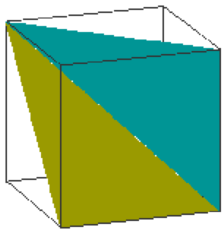

FIGURE 20

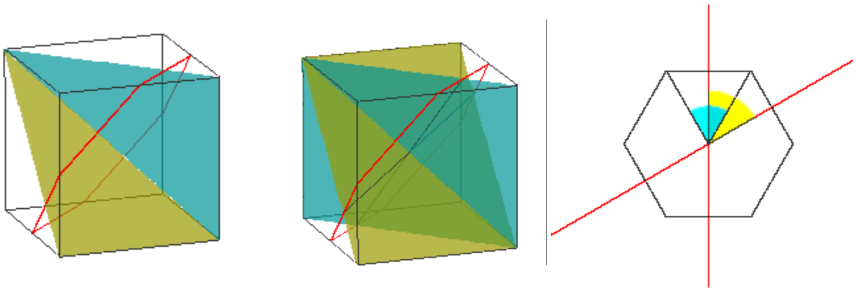

FIGURE 21. a - b - c

Dunque l'esagono regolare individua il piano π. Per tracciare le due rette s ed t lungo cui il piano π taglia i due piani α e β assegnati, conviene riprendere la figura, completando il disegno dei piani, in modo da individuare più facilmente le due rette (cfr. Fig. 21b). Fatto questo si riconosce facilmente che le rette s e t congiungono i punti medi dei lati opposti dell'esagono e quindi (cfr. Fig. 21c) formano un angolo pari all'angolo di un triangolo equilatero, cioè di $60° = \pi/3$ radianti. Cioè $\widehat{\alpha\beta} = \widehat{st} = 60°$.

Possiamo procedere altrimenti. Nel corso dell'Esercizio 2.4 abbiamo anche avuto occasione di osservare che il triangolo equilatero formato da 3 diagonali delle facce è ortogonale alla diagonale del cubo che lo attraversa. Dunque tracciamo questo triangolo (cfr. Fig. 22a) e consideriamo il piano π' da esso determinato; tale piano

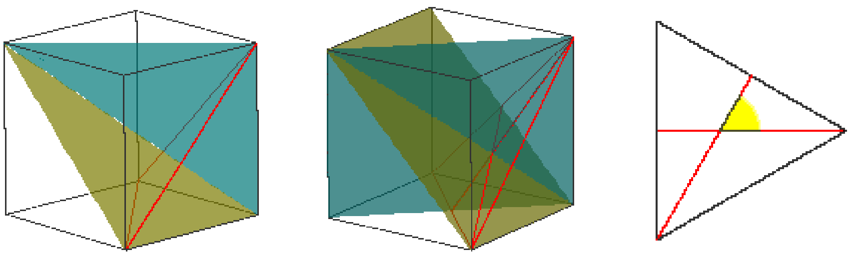

FIGURE 22. a - b - c

[4]Per farlo si osservi che il cubo ha 4 diagonali e quindi ci sono 4 esagoni regolari ed è necessario tracciare l'esagono che corrisponde alla nostra diagonale; per scegliere l'esagono giusto conviene osservare che - come già visto nell'Esercizio 2.4 - andando da un estremo all'altro della diagonale, seguendo gli spigoli del cubo, si percorrono 3 spigoli e a metà del secondo spigolo si incontra l'esagono regolare.

taglia sui piani, α e β, assegnati due rette s' e t'. Come si vede dalla Fig. 22b esse sono le altezze del triangolo equilatero e dunque si tagliano lungo un angolo di $60° = \pi/3$ radianti (perché? Spiegarlo con l'ausilio della Fig. 22c). Dunque $\widehat{\alpha\beta} = \widehat{s't'} = 60°$.

Esiste almeno un altro modo per risolvere il problema. Qui mi limito a dare un suggerimento, lasciando lo svolgimento al lettore volonteroso. Per l'Osservazione 3.3 l'angolo diedro $\widehat{\alpha\beta}$ è uguale all'angolo $\widehat{n_\alpha n_\beta}$ formato dalle perpendicolari, n_α e n_β, ai due piani in un punto dello spigolo. Si proceda allora così :

(i) Sia B il vertice del cubo sullo spigolo in basso a destra in Fig. 20. Si trovi la retta n_α perpendicolare al piano α nel punto B.

(ii) Analogamente si determini la retta n_β perpendicolare al piano β nel punto B.

(iii) Si determini l'angolo $\widehat{\alpha\beta}$.