CHAPTER 1

Geodetiche

1

La distanza tra due punti del piano o dello spazio è la lunghezza del segmento che li congiunge, la linea retta è la curva più breve che congiunge due punti[1]. Ne segue che la distanza di due punti nel piano o nello spazio è la lunghezza della curva più breve che li congiunge.

Per analogia, siamo tentati di definire la distanza tra due punti di una superfice $\mathcal{S}$ come la lunghezza della più breve curva di $\mathcal{S}$ che li congiunge.

Come vedremo questa nozione di distanza ha risvolti piuttosto interessanti. Per iniziare vediamo un risultato *fisico* che ci darà importanti informazioni. {xi.1}

xi.1 Proposizione 1.1. *Siano date due superfici $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'$ praticamente uguali, con un'intercapedine tra loro di spessore molto ridotto, in modo da poter identificare le due superfici. In due punti pratichiamo dei fori attraverso l'intercapedine e stendiamo un filo inestendibile nell'intercapedine, filo che tiriamo poi attraverso i fori* (vedi Fig. xi.12 1.12).

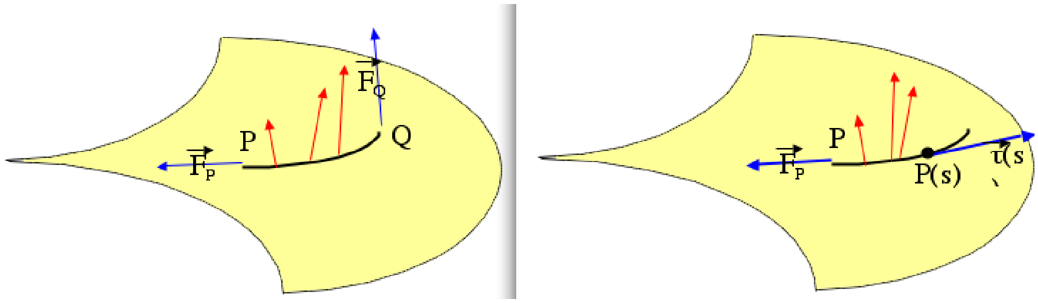
Raggiunta una posizione di equilibrio il filo è disposto lungo una retta oppure lungo una curva tale che, in ogni punto, la normale $\vec{N}$ alla curva abbia la stessa direzione della normale $\vec{n}$ alla superfice.

<u>Dimostrazione</u>. Consideriamo quali forze agiscono sul filo (vedi Fig. fxi.13 1a). Agli estremi abbiamo applicato due forze $\vec{F}_P$ e $\vec{F}_Q$. Indipendentemente dalla direzione in cui tiriamo, i fori trasmettono queste forze tangenzialmente al filo; dunque $\vec{F}_P$ e $\vec{F}_Q$ hanno la direzione delle tangenti al filo nei punti P e Q rispettivamente.

Inoltre il sistema delle due superfici esercita sul filo dai vincoli. Sia $P(s)$ un punto che percorre il filo a velocità unitaria da P verso Q; nel punto $P(s)$ agisce la forza $\vec{F}(s)$, diretta perpendicolarmente alla superfice; a seconda della forma della superfice, i vincoli agiscono da una o dall'altra parte della superfice stessa.

Ora immaginiamo di tagliare il filo in $P(s)$. Tenuto conto della forza $\vec{F}_P$ che agisce sul tratto $\overset{\frown}{P\,P(s)}$ di filo restante, per mantenerlo in equilibrio nella stessa posizione devo applicare in $P(s)$ - volendo attraverso un ulteriore foro - una certa forza $\vec{\tau}(s)$ (vedi Fig. fxi.13 1b). Evidentemente $\vec{\tau}(s)$ avrà ancora direzione tangenziale e diretta verso Q, cioè possiede la direzione e il verso del versore tangente $\vec{T}(s)$.

[1] Si noti che la prima è una definizione, la definizione di distanza. La seconda è una conseguenza immediata della definizione di lunghezza di una curva: come si ricorderà (Corso di geometria Cap.V §1.1) si è introdotta la nozione di lunghezza di una curva, richiedendo che essa fosse maggiore della lunghezza di una qualunque spezzata ordinatamente iscritta nella curva; in particolare la lunghezza di una curva è maggiore della lunghezza del segmento che congiunge gli estremi.



fxi.13 FIGURE 1. a - b {fxi.13}

Pertanto $\vec{\tau}$ è multiplo di $\vec{T}$: precisamente esiste una funzione $f(s) > 0$ tale che

$$\vec{\tau}(s) = f(s)\vec{T}(s).$$

Concludiamo: l'equilibrio del filo dice che la risultante delle forze è nulla, vale a dire

$$\vec{F}_P + \int_P^Q \vec{F}(s)ds + \vec{F}_Q = 0;$$

e nel caso del filo tagliato

$$\vec{F}_P + \int_0^s \vec{F}(t)dt + \vec{\tau}(s) = 0.$$

Derivando quest'ultima equazione, otteniamo:

$$\vec{F}(s) + \frac{d\vec{\tau}}{ds}(s) = 0,$$

vale a dire

$$-\vec{F} = \frac{d(f\,\vec{T})}{ds} = \frac{df}{ds}\,\vec{T} + f(s)\frac{dT}{ds} = \frac{df}{ds}\,\vec{T} + f(s)k(s)\vec{N}.$$

Cioè

$$\frac{df}{ds}\,\vec{T} = -\vec{F} - f(s)k(s)\vec{N}.$$

Ma $\vec{F}$ e $\vec{N}$ sono entrambi perpendicolari a $\vec{T}$, quindi $\frac{df}{dt} = 0$; perciò $\vec{F}$ ed $\vec{N}$ hanno la stessa direzione.

Nel calcolo abbiamo utilizzato $d\vec{T}/ds = k\vec{N}$, ma se la curvatura è nulla, il versore normale non è definito e il filo è disposto lungo una retta. □

N.B. **(i)** Se $k = 0$, allora $d\vec{T}/ds = 0$. Allora

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{df}{ds}\vec{T}$$

e otteniamo

$$0 = \vec{F}(s) + \frac{df}{ds}\vec{T}.$$

Ma $\vec{F}$ e $\vec{T}$ sono perpendicolari, quindi $\vec{F} = 0$ e $f = 0$. Cioè se il filo è disposto lungo una retta, non c'è azione dei vincoli.

(ii) Si noti anche che, nel caso generale, $-\vec{F} = f(s)k(s)\vec{N}$ con $f(s) > 0$, quindi la forza $\vec{F}$ esercitata dal vincolo ed $\vec{N}$ hanno verso opposto, cioè i vincoli agiscono in direzione opposta alla concavità della curva (cosa che corrisponde all'intuizione). Si pensi al caso di una sfera: tirando i due capi del filo, il filo tenderebbe ad accorciarsi e quindi ad avvicinarsi al segmento che unisce gli estremi, segmento interno alla sfera. Se resta sulla sfera è perché la superficie interna (si ricordi che il filo è nell'intercapedine tra due sfere di raggio simile) lo *spinge* verso l'esterno, in direzione opposta alla concavità.

Vedremo che questo risultato è molto interessante e conviene fissare la nomenclatura. {xi.2}

xi.2 DEFINIZIONE 1.2. *Una curva $\mathcal{C}$ su una superfice $\mathcal{S}$ si chiama* arco di geodetica *se è una retta o porzione di retta, oppure se, in ogni suo punto, la normale alla curva ha la stessa direzione della normale alla superfice.*

Vediamo un'importantissima conseguenza della Proposizione xi.1 1.1: {xi.3}

xi.3 COROLLARIO 1.3. *Sia $\mathcal{C}$ un'arco di curva su una superfice $\mathcal{S}$ che minimizza la lunghezza tra i suoi estremi (vale a dire la lunghezza di $\mathcal{C}$ è minore o uguale alla lunghezza di ogni curva della superfice che ha gli stessi estremi). Allora $\mathcal{C}$ è un arco di geodetica.*

Dimostrazione. Siano P e Q gli estremi dell'arco $\mathcal{C}$. Disponiamo un filo inestensibile da P a Q lungo la curva e tiriamolo agli estremi come nelle ipotesi della Proposizione xi.1 1.1. Poiché lo tiriamo dagli estremi, l'unica possibilità che il filo ha di muoversi, sulla superfice a cui è vincolato, richiede che la lunghezza diminuisca; ma il filo già minimizza la lunghezza, dunque non si muove. Pertanto, per la Proposizione xi.1 1.1, è disposto lungo un arco di geodetica. □

Si potrebbe allora congetturare che gli archi di geodetica giochino, su una superfice qualsiasi, il ruolo che le rette giocano nel piano; vale a dire che gli archi di geodetica siano le curve di lunghezza minima e che ogni coppia di punti della superfice sia congiunta da una e da una sola geodetica.

Questa è una buona ipotesi di lavoro e contiene del vero, ma le cose purtroppo sono molto più complicate di quanto la congettura preveda.

Tanto per cominciare non è affatto detto che dati due punti su una superfice ci sia una curva di lunghezza minima che li congiunge. {xi.4}

xi.4 ESERCIZIO 1.4. *Mostrare con un esempio che, assegnati due punti su una superfice, non è detto che esista una curva che li congiunge la cui lunghezza sia pari alla loro distanza.*

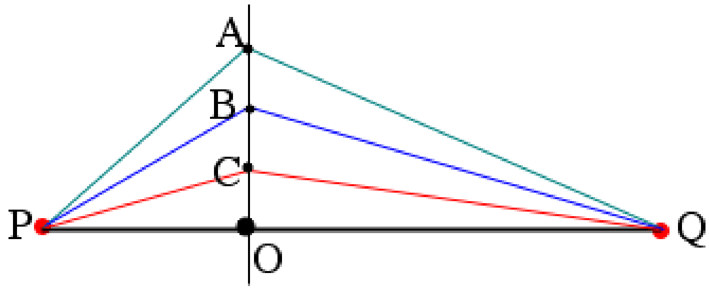
Soluzione. Sia $\mathcal{S}$ il piano meno un suo punto O. Siano P e Q due punti del piano tali che O si trova sul segmento $\overline{PQ}$.

Il segmento $\overline{PQ}$ ha lunghezza $||Q-P||$ e tutte le altre curve del piano che congiungono i due punti hanno lunghezza maggiore, ma il segmento non è contenuto in $\mathcal{S}$. Sia $\mathcal{C}$ una curva di $\mathcal{S}$ che congiunge i due punti, allora

$$L(\mathcal{C}) > ||Q-P||.$$

La lunghezza delle spezzate $PAQ, PA'Q, PA''Q, \ldots$ in Fig. fxi.11 2 è evidentemente decrescente; certo trovo un punto R, abbastanza vicino ad O, in modo che la lunghezza della spezzata PRQ sia di tanto poco maggiore della distanza tra i due punti, da essere minore della lunghezza di $\mathcal{C}$.

Perciò $\mathcal{C}$ non è, tra tutte le curve di $\mathcal{S}$ che congiungono i due punti, la più breve. Ma questo vale per ogni curva di $\mathcal{S}$ che congiunge i due punti, dunque - come si voleva - non esiste questa curva più breve di tutte. □



fxi.11 FIGURE 2 {fxi.11}

L'Esercizio 1.4 mette in luce come una tecnica per trovare le curve di minima distanza, suggerita dalla Proposizione 1.1 possa fallire. Se in P e in Q facciamo passare i capi di un filo attraverso degli anelli e poi tiriamo, il filo tende a disporsi lungo il segmento $\overline{PQ}$ che però non è un segmento ammissibile, perché comprende il punto O che non sta sulla superfice.

Si può pensare che questo esempio sia un po' artificioso, perché in fondo basterebbe aggiungere il punto O per sistemare le cose. Ma sarebbe possibile mostrare situazioni più complesse in cui non esiste una curva di minimo che congiunge due punti e la cosa non può essere rimediata aggiungendo altri punti alla superfice.

L'Esercizio 1.4 ha anche evidenziato un difetto della definizione di distanza su una superfice che avevamo dato all'inizio. Dobbiamo riformularla con maggiore cautela:

{xi.5}
xi.5 DEFINIZIONE 1.5. *Dati una superfice $\mathcal{S}$ e due suoi punti, la distanza $d_{\mathcal{S}}(P, Q)$ tra i due punti (distanza relativa alla superfice $\mathcal{S}$) è l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve di $\mathcal{S}$ che congiungono i due punti.*

{xi.6}
xi.6 ESERCIZIO 1.6. *Spiegare la definizione di distanza di due punti su di una superfice.*

<u>Soluzione</u>. Siano $\mathcal{S}$ una superfice e P, Q due suoi punti. Per definizione di estremo inferiore, la distanza $d_{\mathcal{S}}(P, Q)$ soddisfa le seguenti condizioni, che anzi la caratterizzano:

(i) Se $\mathcal{C}$ è un arco di curva di $\mathcal{S}$ che congiunge P a Q, allora

$$L(\mathcal{C}) \geq d_{\mathcal{S}}(P, Q).$$

(ii) Se M è un numero maggiore di $d_{\mathcal{S}}(P, Q)$, allora esiste un arco di curva $\mathcal{C}$ di $\mathcal{S}$, che congiunge P a Q, tale che

$$M > L(\mathcal{C}) \geq d_{\mathcal{S}}(P, Q).$$

Dunque ci sono due possibilità.

(A) Esiste un arco (o anche più di uno) di curva $\mathcal{C}$ di $\mathcal{S}$ che congiunge P a Q e la cui lunghezza $L(\mathcal{C})$ è minore o uguale alla lunghezza di ogni qualunque altro arco di $\mathcal{S}$ che congiunge i due punti; in tal caso $L(\mathcal{C}) = d_{\mathcal{S}}(P, Q)$ e $\mathcal{C}$ è un arco di lunghezza minima e dunque (cfr. Corollario 1.3) un arco di geodetica.

(B) Non esiste un arco di lunghezza minima, ma esiste una successione $\mathcal{C}_n$ di archi di $\mathcal{S}$, che congiungono P a Q, le cui lunghezze soddisfano

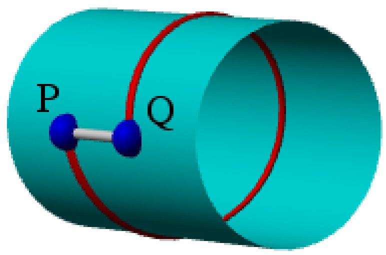
$$d_{\mathcal{S}}(P,Q) + \frac{1}{n} > L(\mathcal{C}_n) > d_{\mathcal{S}}(P,Q).$$

□

Un ulteriore problema è costituito dal fatto che non è detto che un arco di geodetica sia una curva di lunghezza minima. {xi.7}

xi.7 Esercizio 1.7. *Mostrare un esempio di arco di geodetica che non è la curva di minima lunghezza tra i suoi estremi.*

Soluzione. Si consideri la Fig. fxi.14 3. Il segmento che congiunge i punti P e Q lungo

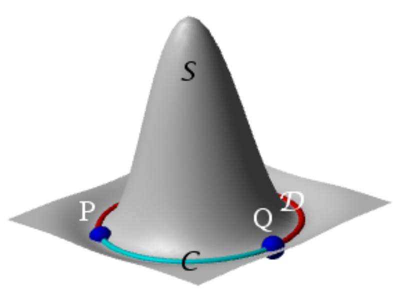


fxi.14 Figure 3 {fxi.14}

una generatrice del cilindro è certo più breve dell'arco di curva in rosso, ottenuto tirando gli estremi di un filo, vincolato a stare sulla superfice. Avremo poi occasione di stabilire chi sia questa curva rossa; qui poco importa quale sia la sua forma esatta, il fatto è che, fissati gli estremi in P e Q, se ho fatto passare il filo dall'altra parte del cilindro, non c'è speranza che si possa disporre come il segmento. □

Vediamo un altro esempio dello stesso fenomeno. {xi.8}

xi.8 Esempio 1.8. Si consideri la superfice $\mathcal{S}$ in Fig. fxi.15 4. Disposto un filo da questa parte della *montagna*, fissati gli estremi fissati in P e Q, vincoliamo il filo a restare sulla superfice e tiriamolo dagli estremi. Sembra ragionevole che il filo trovi una posizione di equilibrio e in questa posizione, per la Proposizione xi.1 1.1, descriverà un



fxi.15 Figure 4 {fxi.15}

arco di geodetica $\mathcal{C}$. Allo stesso modo si costruisce l'arco di geodetica $\mathcal{D}$. I due archi hanno lunghezza diversa, dunque quello più lungo è un'arco di geodetica che non minimizza la lunghezza del percorso tra P e Q. □

Ora cerchiamo di capire quali sono gli archi di geodetica su una sfera. La sfera non contiene rette o segmenti, quindi gli archi di geodetica su una sfera sono curve la cui normale, in ogni punto, è diretta come la normale alla sfera, cioè verso il centro. Un piano che passa per il centro taglia sulla sfera un cerchio massimo, cioè una circonferenza di raggio uguale a quello della sfera e con lo stesso centro. In ogni punto la normale ad un cerchio massimo è dunque diretta come la normale alla sfera e pertanto i cerchi massimi sono archi di geodetica.

È naturale domandarsi se la sfera possiede altri archi di geodetica oltre ai cerchi massimi. C'è un risultato fisico che suggerisce la risposta. Vediamolo

{xi.9} xi.9 PROPOSIZIONE 1.9. *Siano date due superfici $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'$ praticamente uguali, con un'intercapedine tra loro di spessore molto ridotto, in modo da poter identificare le due superfici. Consideriamo il moto di una biglia, di diametro uguale allo spessore dell'intercapedine, che si muove tra le due superfici, senza attrito e in assenza di forze esterne. La biglia si muove a velocità scalare costante lungo un'arco di geodetica.*

Dimostrazione. In assenza di forze esterne, se non fosse vincolato a muoversi sulla superfice, la biglia si muoverebbe di moto rettilieneo uniforme (cioè a velocità scalare costante). Sia $P(t)$ il punto mobile che rappresenta la biglia. In un certo istante, diciamo all'istante 0, la biglia si trova in $P(0)$ con vettore velocità $\vec{V}(0)$. Se la retta, passante per $P(0)$ e con vettore direzione $\vec{V}(0)$, giace sulla superfice, allora la biglia si muoverà di moto rettilineo uniforme lungo questa retta con velocità scalare costante pari a $||\vec{V}(0)||$; senza che il vincolo di stare sulla superfice abbia da esercitare nessuna azione sulla biglia. Se questa retta non giace sulla superfice, allora la biglia descriverà una certa traiettoria sotto l'azione di un'azione del vincolo, costituito da una forza $\vec{F}(t)$ che, all'istante t, agisce in direzione normale alla superfice nel punto $P(t)$. L'accelerazione di $P(t)$ è

$$\vec{A}(t) = v^2(t)k(t)\vec{N}(t) + \frac{dv}{dt}\,\vec{T}(t).$$

Siccome $\vec{F}(t)$ è l'unica forza che agisce, deve essere

$$\vec{F}(t) = m\,\vec{A}(t),$$

dove m è la massa della biglia. Allora l'accelerazione è normale alla superfice e entrambi i vettori $\vec{A}(t)$ e $\vec{N}(t)$ sono perpendicolari a $\vec{T}(t)$. Ne segue che $dv/dt = 0$ (dunque la velocità scalare è costante) e $\vec{A}$ e $\vec{N}$ hanno la stessa direzione. Dunque la traittoria è un arco di geodetica. □

Per un generale principio di determinazione che vige nella fisica classica, è ragionevole pensare che due punti in moto, vincolati a restare sulla superfice, in assenza di forze esterne, che passano per uno stesso punto con la stessa direzione, descrivano la stessa traiettoria. Naturalmente esiste una dimostrazione formale di questo fatto, ma possiamo accontentarci di questa indicazione intuitiva. Questo significa che

{xi.10} xi.10 COROLLARIO 1.10. *Assegnati un punto P, di una superfice $\mathcal{S}$, ed un vettore $\vec{v}$, tangente ad $\mathcal{S}$ in P, esiste un unico arco di geodetica che passa per P con tangente diretta come $\vec{v}$.*

Assegnato un punto P di una sfera, i cerchi massimi che passano per P sono le sezioni della sfera con i piani che passano per P e per il centro e ciascuno di essi individua una diversa direzione tangente alla sfera in P. Detto in altri termini le sezioni normali in P sono tante quante le direzioni tangenti in P. Per il Corollario xi.10 1.10 questi cerchi massimi sono gli unici archi di geodetica che passano per P.

Resta il problema di capire se questi archi di geodetica minimizzino o meno la lunghezza del percorso sulla sfera. Intanto se P e Q sono due punti antipodali, i piani del fascio che ha per asse la retta PQ tagliano sulla sfera cerchi massimi. Ciascuno di essi è suddiviso da P e Q in due semicirconferenze di lunghezza $\pi \times$ *raggio* e dunque gli archi di geodetica che congiungono P e Q sono infiniti e tutti della medesima lunghezza; il problema è di capire se questa lunghezza è pari alla distanza. Se invece P e Q non sono antipodali, esiste un unico piano che passa per P, Q e per il centro della sfera. Questo piano taglia sulla sfera un cerchio massimo che P e Q suddividono in due archi di lunghezza diversa; il problema è di capire se la lunghezza di quello minore è pari alla distanza tra P e Q.

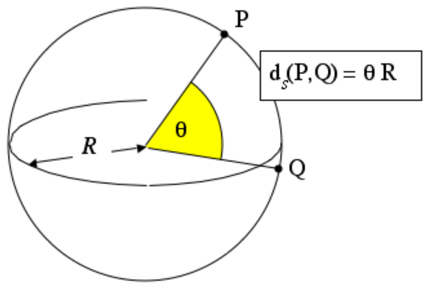
A parte argomenti ad hoc che si possono trovare sfruttando la particolarità della sfera, essite un argomento generale. Tutti i cerchi massimi, come le rette del piano, possono essere percorsi a velocità costante in un tempo illimitato in entrambi i versi. Al contrario se consideriamo la superfice $\mathcal{S}$ costituita dal piano meno un punto O i suoi archi di geodetica sono le rette che non passano per O e le semirette che escono da O. Queste ultime possono essere percorse a velocità costante solo in intervalli della forma $(0, +\infty)$ o $(-\infty, 0)$. Ancora un esempio: sia $\mathcal{T}$ la superfice costituita da una sfera meno un suo punto O. Gli archi di geodetica di $\mathcal{T}$ sono i cerchi massimi che non passano per O e i cerchi massimi, che passano per O, privati del punto O. Questi ultimi sono lunghi $2\pi \times R$ e quindi a velocità costante v sono percorsi in un intervallo temporale di lunghezza $2\pi R/v$; si noti bene che per continare a percorrere questi archi, arrivato in O, devo invertire il verso di percorrenza e questo non è possibile se la velocità è costante. In generale diamo la seguente {xi.11}

xi.11 Definizione 1.11. *Un arco di geodetica si dice* geodetica *se non può essere proseguito oltre i suoi estremi.* Ad es. un cerchio massimo è privo di estremi quindi è un arco di geodetica, l'arco di geodetica che congiunge due punti della sfera non è un arco di geodetica, perché può essere prolungato ad un cerchio massimo. La semiretta uscente da O, nel caso dell'esempio precedente, è una geodetica, perché attraverso O non posso passare. *Diremo che una superfice è* completa *se tutte le sue geodetiche possono essere percorse a velocità costante nell'intervallo* $(-\infty, +\infty)$.

Con questa definizione il piano e la sfera sono superfici complete, il piano o la sfera meno un punto non sono complete. Ora sussiste questo (difficile) {xi.12}

xi.12 Teorema 1.12. *Se $\mathcal{S}$ è una superfice completa, allora - comunque scelti due suoi punti - esiste sempre almeno un arco di geodetica che li congiunge e che minimizza la distanza.*

Questo risultato permette di concludere l'analisi delle geodetiche sulla sfera. Dati due punti P e Q esiste sempre un arco di cerchio massimo che li congiunge; anzi ne esistono infiniti e tutti della stessa lunghezza se i punti sono antipodali, ne esistono due, di lunghezza diversa se i punti non sono antipodali. Per il Teorema xi.12 1.12 uno almeno di questi archi minimizza la distanza. Dunque se i punti P e Q sono antipodali la loro distanza è πR, se invece non sono antipodali, detta θ la misura in radianti dell'angolo che i raggi per P e Q formano al centro della sfera, la loro distanza è θR (cfr. Fig. fxi.16 5).



fxi.16 FIGURE 5 {fxi.16}

Per concludere la trattazione generale e prima di fare altri esempi, enuciamo e cerchiamo di giustificare il seguente risultato che descrive in modo semplice la situazione locale.

{xi.13}

xi.13 PROPOSIZIONE 1.13. *Sia P un punto di una superfice $\mathcal{S}$. Esiste una regione $\mathcal{S}'$ di $\mathcal{S}$ che contiene P (eventualmente molto piccola) tale che: per ogni coppia di punti di $\mathcal{S}'$ esiste un'unico arco di geodetica che li congiunge e che è contenuto in $\mathcal{S}'$; tale arco minimizza la distanza tra P e Q.*

Per giustificare parzialmente e spiegare questo enunciato, osserviamo che da P, per ogni direzione tangente, si diparte un unico arco di geodetica (Corollario xi.10 1.10). Partiti in direzioni diverse sembra ragionevole che questi archi non si incontrino troppo vicino a P, vale a dire esiste una piccola regione $\mathcal{S}'$ della superfice, che contiene P e all'interno della quale questi archi non si incontrano. Siccome questi archi partono in tutte le direzioni sembra ragionevole che la loro unione ricopra completamente la regione vicino a P (se Q è vicino a P, ma non sta su nessuno di questi archi, gli archi di geodetica che escono da Q verso P, dove diavolo vanno a finire?). Questa spiegazione non esaurisce la dimostrazione, non solo per l'imprecisione dell'argomentare, ma soprattutto perché non chiarisce il motivo per cui questi archi di geodetica debbano minimizzare la distanza e come questo argomento possa valere non solo per P, ma contemporaneamente per tutti i punti di $\mathcal{S}'$.

{xi.14}

2. Isometrie

xi.14 DEFINIZIONE 2.1. *Un'*isometria *tra due superfici $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ è una corrispondenza biunivoca $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ che conserva la distanza, vale a dire: comunque presi due punti P, Q di $\mathcal{S}$, per i corrispondenti punti P', Q' di $\mathcal{S}'$, vale*

$$d'_{\mathcal{S}}(P', Q') = d_{\mathcal{S}}(P, Q).$$

Osserviamo che il fatto che F sia biunivoca è, praticamente, una conseguenza del fatto che conservi la distanza. Sia $F : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ è un'applicazione tra due superfici che conserva la distanza, allora F è iniettiva. Infatti presi P, Q due punti distinti di $\mathcal{S}$, siano P', Q' i corrispondenti punti su $\mathcal{T}$; riesce

$$d_{\mathcal{T}}(P', Q') = d_{\mathcal{S}}(P, Q) > 0;$$

perché $P \neq Q$ e dunque hanno distanza positiva; pertanto anche $P' \neq Q'$. Tuttavia può ben essere che la superfice $\mathcal{T}$ contenga punti che non corrispondono a nessun punto di F, vale a dire $F(\mathcal{S})$ è un sottoinsieme di $\mathcal{T}$ che può essere diverso da tutto $\mathcal{T}$. Ma niente vieta di considerare la superfice $\mathcal{S}' := F(\mathcal{S})$ e così otteniamo che la corrispondenza $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ è biunivoca.

N.B. Un'isometria, essendo biunivoca, è invertibile. La sua inversa è ovviamente ancora un'isometria.

{xi.15}

xi.15 Esercizio 2.2. *Sia $\mathcal{S}$ una superfice realizzata in materiale plastico duttile, ma non estendibile; deformiamo la superfice $\mathcal{S}$ fino ad ottenere una superfice $\mathcal{S}'$. Mostrare che la deformazione stabilisce un'isometria $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$.*

Soluzione. *Premessa.* Il materiale utilizzato non è estendibile, dunque la lunghezza delle curve tracciate sulla superfice $\mathcal{S}$ non subisce alterazioni nella deformazione. Sembrerebbe allora ovvio che F sia un'isometria. Invece le cose sono meno ovvie di quello che sembra e conviene esplicitare l'argomento.

Abbiamo detto: se $\mathcal{C}$ è una curva su $\mathcal{S}$ e $\mathcal{C}' = F(\mathcal{C})$ è la curva corrispondente su $\mathcal{S}'$, allora
$$L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{C}').$$
Siano P e Q due punti di $\mathcal{S}$ e sia $\mathcal{C}$ un arco di geodetica che li congiunge e che minimizza la distanza. Vale a dire
$$L(\mathcal{C}) = d_{\mathcal{S}}(P, Q).$$
Siano P', Q' i punti corrispondenti su $\mathcal{S}'$; essi sono gli estremi del corrispondente arco $\mathcal{C}'$. Ne segue
$$d_{\mathcal{S}'}(P', Q') \geq L(\mathcal{C}') = L(\mathcal{C}) = d_{\mathcal{S}}(P, Q).$$
Ma, con lo stesso argomento, preso un'arco di geodetica in $\mathcal{S}'$ che congiunge P' a Q' e che minimizza la distanza, otteniamo,
$$d_{\mathcal{S}'}(P', Q') \leq d_{\mathcal{S}}(P, Q),$$
e quindi
$$d_{\mathcal{S}'}(P', Q') = d_{\mathcal{S}}(P, Q).$$
Purtroppo l'argomento esposto non è conclusivo, perché non è detto che due punti qualsiasi siano congiunti da un arco di geodetica che minimizza la distanza (questo è vero nelle superfici complete, cfr. Proposizione xi.12 1.12, oppure se i due punti sono molto vicini, cfr. Proposizione xi.13 1.13). Bisogna ragionare altrimenti.

La soluzione corretta. Siano P, Q due punti di $\mathcal{S}$. Poiché è possibile scambiare i ruoli di $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'$ è sufficiente provare
$$d_{\mathcal{S}}(P, Q) \leq d_{\mathcal{S}'}(P', Q').$$
Comunque fissato $M > d_{\mathcal{S}}(P, Q)$ esiste (cfr. Esercizio xi.6 1.6 (ii)) un'arco di curva $\mathcal{C}$ di $\mathcal{S}$ che congiunge i due punti e soddisfa
$$M > L(\mathcal{C}) \geq d_{\mathcal{S}}(P, Q).$$
Allora, con le stesse notazioni precedenti,
$$M > L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{C}') \geq d_{\mathcal{S}'}(P', Q').$$
Posto $A := d_{\mathcal{S}}(P, Q)$ e $B := d_{\mathcal{S}'}(P', Q')$ abbiamo provato che: *se M è un numero maggiore di A, allora M è un numero maggiore di B;* questo impedisce che possa

essere $B > A$, infatti in tal caso, ogni numero M compreso tra A e B contraddirebbe l'affermazione appena fatta. Dunque $A \leq B$. $\square$

L'Esercizio 2.2 non solo mostra che quell'esempio concreto è un'isometria tra superfici, ma, riformulato in termini matematici, prova che

{xi.16}
xi.16 Proposizione 2.3. *Una corrispondenza biunivoca $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ tra due superfici che conserva la lunghezza delle curve è un'isometria.*

Sia G un'isometria dello spazio; come sappiamo G si ottiene componendo moti rigidi e riflessioni. Tutto sommato è piuttosto ovvio che G conservi la lunghezza delle curve e non mi pare valga la pena di esporne una dimostrazione rigorosa. Da questo e dalla Proposizione 2.3 segue il

{xi.17}
xi.17 Corollario 2.4. *Sia G un'isometria dello spazio e sia $\mathcal{S}$ una superfice. La restrizione di G ad $\mathcal{S}$ determina un'isometria $G_{|\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ tra $\mathcal{S}$ e la superfice $\mathcal{S}' := G(\mathcal{S})$.*

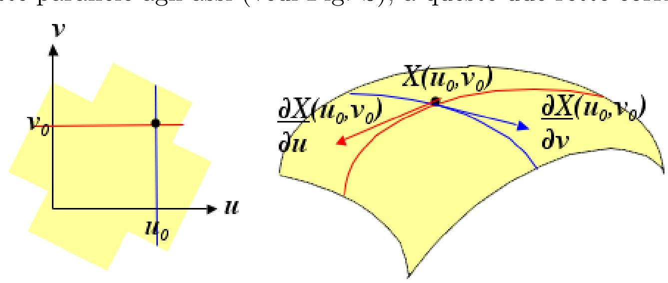
Dimostrazione. G è biunivoca, quindi iniettiva. La restrizione al sottoinsieme $\mathcal{S}$ di G resta iniettiva. Prendendo come codominio esattamente l'immagine $G(\mathcal{S})$ la restrizione $G_{|\mathcal{S}}\mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ è suriettiva e dunque biunivoca. Ma G conserva la lunghezza delle curve, dunque, per la Proposizione 2.3 è un'isometria tra le due superfici. $\square$

Dalle considerazioni precedenti sorgono alcune domande. (i) Data un'isometria $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ tra due superfici, essa è la restrizione di un'isometria dello spazio? Cioè esiste un'isometria G dello spazio di cui F sia la restrizione? (ii) Data un'isometria $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ tra due superfici essa si può pensare come una deformazione, cioè esiste una famiglia continua di superfici $\mathcal{S}_t$, $0 \leq t \leq 1$ con $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$ e $\mathcal{S}' = \mathcal{S}_1$? (iii) Vale il viceversa della Proposizione 2.3, vale a dire un'isometria tra due superfici conserva la lunghezza delle curve?

Come vedremo la risposta è negativa per le prime due le questioni; mentre per la terza la risposta è affermativa.

3. Interludio di calcoli

Supponiamo che la superfice $\mathcal{S}$ sia definita da un'applicazione $X(u, v)$ dove (u, v) varia in un aperto Ω del piano. Fissato (u_0, v_0) in Ω, per questo punto passano due rette parallele agli assi (vedi Fig. 6); a queste due rette corrispondono



{fxi.17.1} Figure 6

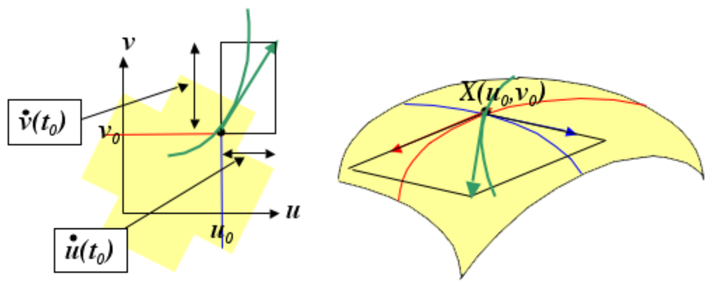
due curve sulla superfice, passanti per il punto $X(u_0, v_0)$. Come abbiamo visto i vettori tangenti a queste due curve, nel punto $X(u_0, v_0)$ sono

$$\frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) \text{ e } \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Consideriamo ora una traiettoria $(u(t), v(t))$ che passa per il punto (u_0, v_0), con vettore velocità

$$(\dot{u}(t_0).\dot{v}(t_0))$$

(come illustrato in Fig. fxi.17.2 7 queste sono le componenti del vettore verde a sinistra,



fxi.17.2 FIGURE 7 {fxi.17.2}

tangente alla traiettoria). A questa curva in Ω corrisponde una curva sulla superfice: la traiettoria $X(u(t), v(t))$ (in figura la curva verde a destra); il cui vettore velocità è, per la regola derivazione della composta:

$$\frac{d}{dt}X(u(t_0), v(t_0)) = \frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0)\ \dot{u}(t_0) + \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0)\ \dot{v}(t_0).$$

A costo di ripetrsi è opportuno enunciare con chiarezza tutta questa faccenda: {xi.18}

xi.18 OSSERVAZIONE 3.1. *Sia $X(u, v)$ un'applicazione che descrive la superfice $\mathcal{S}$.*
• *Ad un certo punto (u_0, v_0) nel piano corrisponde il punto $P := X(u_0, v_0)$ della superfice $\mathcal{S}$.*
• *Ad ogni traiettoria del piano che passa per (u_0, v_0) corrisponde una traiettoria sulla superfice che passa per P.*
• *In particolare ci sono due traiettorie per (u_0, v_0): le rette parallele agli assi (le rette $v = v_0$ e $u = u_0$). I vettori velocità delle corrispondenti traiettorie sulla superfice sono*

$$\frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) \ e\ \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0).$$

• *Se esiste il piano tangente in P, questi due vettori, tangenti ad $\mathcal{S}$ in P lo individuano. In particolare ogni vettore tangente ad $\mathcal{S}$ in P si può scrivere come combinazione lineare di questi due vettori, cioè nella forma*

$$a\ \frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) + b\ \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0),$$

dove a, b sono numeri qualsiasi.
• *Possiamo infine interpretare il significato di questa coppia di numeri a e b. Se prendiamo una traiettoria sul piano che passa per (u_0, v_0) con vettore velocità (a, b)*

(è un vettore del piano, quindi è individuato da una coppia di numeri), allora il vettore velocità della corrispondente traiettoria in $\mathcal{S}$ è proprio

$$a\ \frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) + b\ \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0).$$

È opportuno aggiungere due osservazioni apparentemente banali, ma che mettono in luce il senso si fare dei calcoli

{xi.18}
$\boxed{\texttt{xi.18}}$ Osservazione 3.2. **(i)** Esistono infinite traiettorie nel piano che passano per il punto (u_0, v_0) con vettore velocità $\vec{V} = (a, b)$. In corrispondenza ad esse ci sono infinite traiettorie sulla superfice che passano per P; chi ci dice che quest'ultime hanno lo stesso vettore velocità nel punto P? Ce lo dice il calcolo perché il vettore velocità nel punto P è

$$a\ \frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) + b\ \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0),$$

e quindi dipende solo da $\vec{V}$ e non dalla scelta della traiettoria. Pertanto

> *esiste una corrispondenza biunivoca tra i vettori del piano applicati in (u_0, v_0) e i vettori tangenti ad $\mathcal{S}$ in P. E l'esistenza di questa corrispondenza è garantita dal calcolo.*

(ii) Sappiamo che, se il prodotto vettoriale $\frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0) \neq 0$, il punto P possiede piano tangente. In tal caso il prodotto vettoriale è perpendicolare ad entrambi i fattori, cioè possiede la direzione della retta normale alla superfice in $P = X(u_0, v_0)$. Pertanto (ho diviso per la lunghezza)

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}}{||\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}||}$$

> *è un versore normale alla superfice in P. Poiché evidentemente $\vec{n}$ dipende con continuità da (u, v), questo prova che se $X(u, v)$ è iniettiva, la regione di $\mathcal{S}$ che essa ricopre è orientabile.*