Corso 2007-08

CHAPTER 1

Distanza su una superfice

1. Distanza e geodetiche.

1.1. Le nozioni di base. La distanza tra due punti del piano o dello spazio è la lunghezza del segmento che li congiunge; la linea retta è la curva più breve che congiunge due punti[1]. Ne segue che la distanza di due punti nel piano o nello spazio è la lunghezza della curva più breve che li congiunge.

Per analogia, siamo tentati di definire la distanza tra due punti di una superfice $\mathcal{S}$ come la lunghezza della più breve curva di $\mathcal{S}$ che congiunge i due punti.

Detto questo, il problema è - assegnata una superfice - di determinarne le curve più brevi e la loro lunghezza.

1.2. Definizione di arco di geodetica. Una tecnica che sembra utile per individuare queste curve è la seguente.

Vincoliamo un filo inestensibile a stare su una superfice $\mathcal{S}$, obbligandolo a passare per due punti P e Q, dai quali tiriamo tendendo a ridurne la lunghezza. Un marchingegno per ottenere questo consiste in una superfice a due strati con una piccola intercapedine tra di essi, in cui porre il filo, e in due fori, in corrispondenza dei punti P e Q, attraverso i quali tirare gli estremi del filo. In Fig. fxi.10 1a è rappre-

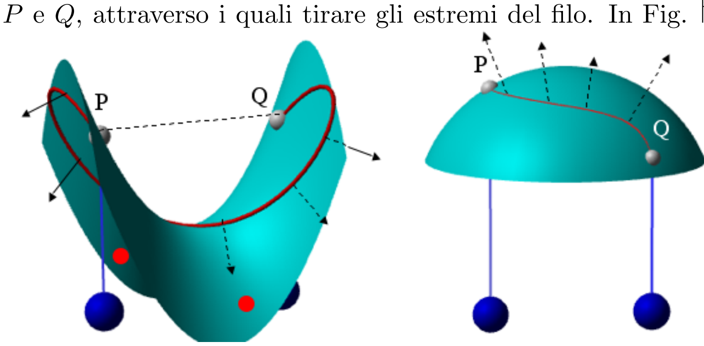

FIGURE 1. a - b. Apri il file per vedere il filmato fxi.10

sentato un paraboloide iperbolico e un filo a cui sono collegati dei pesi, attraverso

[1]Si ricordi che per definizione (cfr. Corso di geometria Cap.V §1.1) la lunghezza di una curva è maggiore della lunghezza di una qualunque spezzata ordinatamente iscritta nella curva; in particolare la lunghezza di una curva è maggiore della lunghezza del segmento che congiunge gli estremi. Dunque il fatto che il segmento sia la linea più breve che congiunge due punti, non è un teorema, ma piuttosto una tautologia.

fori della superfice. Nel filmato è visibile come il filo si muove alla ricerca di una posizione di equilibrio[2].

In assenza del vincolo di stare sulla superfice, il filo si disporrebbe secondo il segmento tratteggiato in figura, ne deduciamo che il vincolo agisce nella direzione e verso indicati dalle freccette nere - che sono dirette come la normale alla superfice. Se gli estremi fossero stati posti nei punti rossi (indicati in figura), allora il vincolo avrebbe agito nel verso opposto. Questo spiega la necessità dell'intercapedine tra i due strati: a seconda della scelta dei punti, il vincolo che agisce sul filo è uno o l'altro dei due strati. In casi particolari, se ad esempio $\mathcal{S}$ è una sfera (vedi Fig. 1b), il verso in cui agisce il vincolo (verso l'esterno della sfera) è indipendente dalla scelta dei punti P e Q, pertanto è sufficiente una sola superfice.

Supposto che il filo raggiunga una posizione di equilibrio, la proposizione seguente dice come è fatta la curva lungo cui il filo si dispone.

xi.1 PROPOSIZIONE 1.1. *Un filo inestensibile vincolato a stare su una superfice e passare per due punti fissati, da cui viene esercitata una trazione, se si trova in condizione di equilibrio, si dispone lungo un segmento oppure lungo una curva la cui normale $\vec{N}$, in ogni punto, ha la stessa direzione della normale $\vec{n}$ alla superfice.*

Dimostrazione. Consideriamo quali forze agiscono sul filo (vedi Fig. 2a). Agli estremi abbiamo applicato due forze $\vec{F}_P$ e $\vec{F}_Q$. Indipendentemente dalla direzione in cui tiriamo, i fori trasmettono queste forze tangenzialmente al filo; dunque $\vec{F}_P$ e $\vec{F}_Q$ hanno rispettivamente la direzione delle tangenti al filo nei punti P e Q .

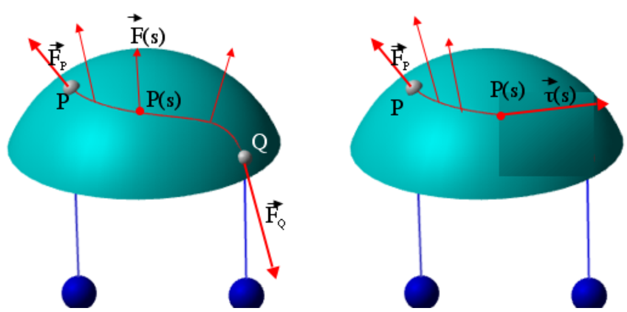

FIGURE 2. a - b fxi.11

Inoltre il sistema delle due superfici esercita sul filo un vincolo. Sia $P(s)$ un punto che percorre il filo a velocità unitaria da P verso Q; nel punto $P(s)$ agisce la forza $\vec{F}(s)$, diretta perpendicolarmente alla superfice; a seconda della forma della superfice, i vincoli agiscono da una o dall'altra parte della superfice stessa.

Ora immaginiamo di tagliare il filo in $P(s)$. Tenuto conto della forza $\vec{F}_P$ che agisce sul tratto $\overset{\frown}{P\,P(s)}$ di filo restante, per mantenerlo in equilibrio nella stessa posizione devo applicare in $P(s)$ - volendo attraverso un ulteriore foro - una certa forza $\vec{\tau}(s)$ (vedi Fig. 2b). Evidentemente $\vec{\tau}(s)$ avrà ancora direzione tangenziale e diretta verso Q, cioè possiede la direzione e il verso del versore tangente $\vec{T}(s)$. Pertanto $\vec{\tau}$ è multiplo di $\vec{T}$: precisamente esiste una funzione $f(s) > 0$ tale che

$$\vec{\tau}(s) = f(s)\vec{T}(s).$$

[2]Il filmato è solo verosimile, perché non si è cercato di realizzare il moto reale del filo e l'abbassamento dei pesi non corrisponde con esattezza a quanto il filo si accorcia.

Concludiamo: l'equilibrio del filo dice che la risultante delle forze è nulla, vale a dire

$$\vec{F}_P + \int_P^Q \vec{F}(s)ds + \vec{F}_Q = 0;$$

e nel caso del filo tagliato

$$\vec{F}_P + \int_0^s \vec{F}(t)dt + \vec{\tau}(s) = 0.$$

Derivando quest'ultima equazione, otteniamo:

$$\vec{F}(s) + \frac{d\vec{\tau}}{ds}(s) = 0,$$

vale a dire

$$-\vec{F} = \frac{d(f\,\vec{T})}{ds} = \frac{df}{ds}\,\vec{T} + f(s)\frac{dT}{ds} = \frac{df}{ds}\,\vec{T} + f(s)k(s)\vec{N}.$$

Cioè

$$\frac{df}{ds}\,\vec{T} = -\vec{F} - f(s)k(s)\vec{N}.$$

(Si noti che se $k(s) = 0$ il versore $\vec{N}(s)$ non è neppure definito, tuttavia interpretando $k(s)\vec{N}(s)$ come il vettore nullo, la formula continua a valere). Ma $\vec{F}$ e $\vec{N}$ sono entrambi perpendicolari a $\vec{T}$, quindi $\frac{df}{ds} = 0$; perciò

$$\vec{F} = -f(s)k(s)\vec{N}.$$

Dunque se $\vec{N}(s)$ è ben definito, allora $\vec{F}$ ed $\vec{N}$ hanno la stessa direzione; se $k(s) = 0$ in un intervallo la traiettoria di $P(s)$ è un segmento. □

N.B. Si noti anche che $\vec{F} = -f(s)k(s)\vec{N}$ con $f(s) > 0$; quindi la forza $\vec{F}$ esercitata dal vincolo ed $\vec{N}$ hanno verso opposto, cioè i vincoli agiscono in direzione opposta alla concavità della curva (cosa che corrisponde all'intuizione).

Conviene fissare la nomenclatura.

xi.2 Definizione 1.2. *Una curva $\mathcal{C}$ su una superfice $\mathcal{S}$ si chiama* arco di geodetica *se è una retta o porzione di retta, oppure se, in ogni suo punto, la normale alla curva ha la stessa direzione della normale alla superfice.*

1.3. L'ipotesi di lavoro. Vediamo un'importantissima conseguenza della Proposizione 3.5:

xi.3 Corollario 1.3. *Sia $\mathcal{C}$ un'arco di curva su una superfice $\mathcal{S}$ che minimizza la lunghezza tra i suoi estremi (vale a dire la lunghezza di $\mathcal{C}$ è minore o uguale alla lunghezza di ogni curva della superfice che ha gli stessi estremi). Allora $\mathcal{C}$ è un arco di geodetica.*

Dimostrazione. Siano P e Q gli estremi dell'arco $\mathcal{C}$. Disponiamo un filo inestensibile da P a Q lungo la curva e tiriamolo agli estremi come nelle ipotesi della Proposizione 3.5. Poiché lo tiriamo dagli estremi, l'unica possibilità che il filo ha di muoversi, sulla superfice a cui è vincolato, richiede che la lunghezza diminuisca; ma il filo già minimizza la lunghezza, dunque è in equilibrio. Pertanto, per la Proposizione 3.5, è disposto lungo un arco di geodetica. □

Si potrebbe allora congetturare che gli archi di geodetica giochino, su una superfice qualsiasi, il ruolo che le rette giocano nel piano; vale a dire che gli archi di geodetica siano le curve di lunghezza minima e che ogni coppia di punti della superfice sia congiunta da una e da una sola geodetica.

Questa è una buona ipotesi di lavoro e contiene del vero, infatti vale il seguente

xi.13 TEOREMA 1.4. *Sia P un punto di una superfice $\mathcal{S}$. Esiste una regione (eventualmente molto piccola) $\mathcal{S}'$ di $\mathcal{S}$ che contiene P tale che: per ogni coppia di punti di $\mathcal{S}'$ esiste un'unico arco di geodetica che li congiunge e che è contenuto in $\mathcal{S}'$; tale arco minimizza la distanza tra P e Q.*

Il Teorema afferma che la nostra ipotesi è valida in regioni piccole, tuttavia se consideriamo punti molto distanti tra loro le cose non vanno altrettanto bene. Consideriamo il seguente

xi.4 ESERCIZIO 1.5. *Mostrare con un esempio che, assegnati due punti su una superfice, non è detto che esista una curva che li congiunge la cui lunghezza sia pari alla loro distanza.*

Soluzione. Sia $\mathcal{S}$ il piano meno un suo punto O. Siano P e Q due punti del piano tali che O si trova sul segmento $\overline{PQ}$.

Il segmento $\overline{PQ}$ ha lunghezza $||Q-P||$ e tutte le altre curve del piano che congiungono i due punti hanno lunghezza maggiore, ma il segmento non è contenuto in $\mathcal{S}$. Sia $\mathcal{C}$ una curva di $\mathcal{S}$ che congiunge i due punti, allora

$$L(\mathcal{C}) > ||Q-P||.$$

La lunghezza delle spezzate $PAQ, PA'Q, PA''Q, \ldots$ in Fig. fxi.12 3 è evidentemente

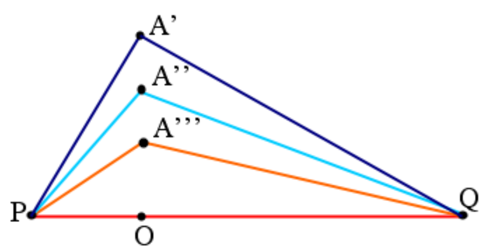

FIGURE 3 fxi.12

decrescente; certo trovo un punto R, abbastanza vicino ad O, in modo che la lunghezza della spezzata PRQ sia di tanto poco maggiore della distanza tra i due punti, da essere minore della lunghezza di $\mathcal{C}$; in formule

$$L(\mathcal{C}) > L(P,R,Q) = ||Q-R|| + ||R-P|| > ||Q-P||.$$

Perciò $\mathcal{C}$ non è, tra tutte le curve di $\mathcal{S}$ che congiungono i due punti, la più breve. Ma questo vale per ogni curva di $\mathcal{S}$ che congiunge i due punti, dunque - come si voleva - non esiste questa curva più breve di tutte. $\square$

Commenti all'Esercizio xi.4 1.5 (i) Si può pensare che questo esempio sia un po' artificioso, perché in fondo basterebbe aggiungere il punto O per sistemare le cose. Ma sarebbe possibile mostrare situazioni più complesse in cui non esiste una curva di minimo che congiunge due punti e la cosa non può essere rimediata aggiungendo altri punti alla superfice.

(ii) La tecnica della Proposizione 3.5, se (e sottolineo il se) il filo raggiunge una posizione di equilibrio, fornisce un arco di geodetica. L'Esercizio 1.5 mette in luce come questa tecnica possa fallire. Se per i punti P e Q dell'Esercizio facciamo passare i capi di un filo attraverso degli anelli e poi tiriamo, il filo tende a disporsi lungo il segmento $\overline{PQ}$ che però non è un segmento ammissibile, perché comprende il punto O che non sta sulla superfice. Dunque la curva di equilibrio non è una curva sulla superfice; vale a dire: sulla superfice non è detto che il filo raggiunga una posizione di equilibrio.

(iii) L'Esercizio 1.5 non è in contrasto con il Teorema 1.4. Per ogni punto $P \neq O$ del piano si consideri il disco di centro P e raggio $||O - P||$. Questo disco è una regione $\mathcal{S}'$ che soddisfa il Teorema.

(iv) L'Esercizio 1.5 evidenzia un difetto della definizione di distanza su una superfice che avevamo dato all'inizio. Dobbiamo riformularla con maggiore cautela, perché non è detto che tra le curve che congiungono due punti ne esista una di lunghezza minima.

xi.5 DEFINIZIONE 1.6. *Dati una superfice $\mathcal{S}$ e due suoi punti, la distanza $d_{\mathcal{S}}(P,Q)$ tra i due punti (distanza relativa alla superfice $\mathcal{S}$) è l'estremo inferiore*[3] *delle lunghezze delle curve di $\mathcal{S}$ che congiungono i due punti.*

xi.6 ESERCIZIO 1.7. *Spiegare la definizione di distanza di due punti su di una superfice.*

Soluzione. Siano $\mathcal{S}$ una superfice e P, Q due suoi punti. Per definizione di estremo inferiore, la distanza $d_{\mathcal{S}}(P,Q)$ soddisfa le seguenti condizioni[4], che anzi la caratterizzano:

(i) Se $\mathcal{C}$ è un arco di curva di $\mathcal{S}$ che congiunge P a Q, allora

$$L(\mathcal{C}) \geq d_{\mathcal{S}}(P,Q).$$

(ii) Se M è un numero maggiore di $d_{\mathcal{S}}(P,Q)$, allora esiste un arco di curva $\mathcal{C}$ di $\mathcal{S}$, che congiunge P a Q, tale che

$$M > L(\mathcal{C}) \geq d_{\mathcal{S}}(P,Q).$$

Dunque ci sono due possibilità.

(A) Esiste un arco (o anche più di uno) di curva $\mathcal{C}$ di $\mathcal{S}$ che congiunge P a Q e la cui lunghezza $L(\mathcal{C})$ è minore o uguale alla lunghezza di ogni qualunque altro arco di $\mathcal{S}$ che congiunge i due punti; in tal caso $L(\mathcal{C}) = d_{\mathcal{S}}(P,Q)$ e $\mathcal{C}$ è un arco di lunghezza minima e dunque (cfr. Corollario 1.3) un arco di geodetica.

(B) Non esiste un arco di lunghezza minima, ma esiste una successione $\mathcal{C}_n$ di archi di $\mathcal{S}$, che congiungono P a Q, le cui lunghezze soddisfano

$$d_{\mathcal{S}}(P,Q) + \frac{1}{n} > L(\mathcal{C}_n) > d_{\mathcal{S}}(P,Q).$$

---

[3] Ricordo che l'estremo inferiore di un insieme di numeri reali A è quel numero $\hat{a}$ che soddisfa le seguenti condizioni: (i) per ogni $a \in A, \hat{a} \leq a$, (ii) $\hat{a}$ è il più grande numero reale che soddisfa (i). Questa seconda condizione si può esprimere dicendo che se aumento di un poco $\hat{a}$ la proprietà (i) non vale più; cioè (ii') se $M > \hat{a}$, allora esiste $a \in A$ tale che $M > a \geq \hat{a}$.

[4] Corrispondono alle condizioni (i) e (ii') della nota precedente.

□

Un ulteriore problema è costituito dal fatto che non è detto che un arco di geodetica sia una curva di lunghezza minima.

xi.7 Esercizio 1.8. *Mostrare un esempio di arco di geodetica che non è la curva di minima lunghezza tra i suoi estremi.*

Soluzione. Si consideri la Fig. fxi.14 4. Il segmento che congiunge i punti P e Q lungo

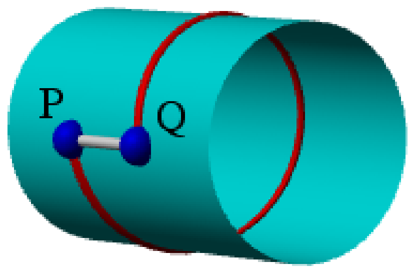

Figure 4 fxi.14

una generatrice del cilindro è certo più breve dell'arco di curva in rosso, ottenuto tirando gli estremi di un filo, vincolato a stare sulla superfice. Avremo poi occasione di stabilire chi sia questa curva rossa; qui poco importa quale sia la sua forma esatta, il fatto è che, fissati gli estremi in P e Q, se ho fatto passare il filo dall'altra parte del cilindro, non c'è speranza che si possa disporre come il segmento. □

Vediamo un altro esempio dello stesso fenomeno.

xi.8 Esempio 1.9. Si consideri la superfice $\mathcal{S}$ in Fig. fxi.15 5. Disposto un filo da questa parte della *montagna*, fissati gli estremi fissati in P e Q, vincoliamo il filo a restare sulla superfice e tiriamolo dagli estremi. Sembra ragionevole che il filo trovi una posizione di equilibrio e in questa posizione, per la Proposizione xi.1 3.5, descriverà un

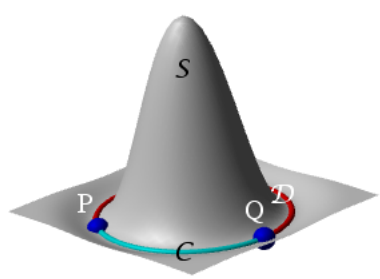

Figure 5 fxi.15

arco di geodetica $\mathcal{C}$. Allo stesso modo si costruisce l'arco di geodetica $\mathcal{D}$. I due archi hanno lunghezza diversa, dunque quello più lungo è un'arco di geodetica che non minimizza la lunghezza del percorso tra P e Q. □

1.4. Geodetiche sulla sfera. Moto su una superfice in assenza di forze. Ora cerchiamo di capire quali sono gli archi di geodetica su una sfera. La sfera non contiene rette o segmenti, quindi gli archi di geodetica su una sfera sono curve la cui normale, in ogni punto, è diretta come la normale alla sfera, cioè verso il centro. Un piano che passa per il centro taglia sulla sfera un cerchio massimo, cioè una circonferenza di raggio uguale a quello della sfera e con lo stesso centro. In ogni punto la normale ad un cerchio massimo è dunque diretta come la normale alla sfera e pertanto i cerchi massimi sono archi di geodetica.

È naturale domandarsi se la sfera possiede altri archi di geodetica oltre ai cerchi massimi. C'è un risultato fisico che suggerisce la risposta. Vediamolo

xi.9 PROPOSIZIONE 1.10. *Un punto materiale, vincolato a restare su una superfice $\mathcal{S}$, ma non soggetto ad altre forze oltre a quelle determinate dal vincolo, è in quiete oppure si muove, a velocità scalare costante, lungo un arco di geodetica.*

Dimostrazione. In assenza di forze esterne, se non fosse vincolato a muoversi sulla superfice, il punto si muoverebbe di moto rettilieneo uniforme (cioè a velocità scalare costante). Sia $P(t)$ il punto mobile; in un certo istante, diciamo all'istante 0, il punto si trova in $P(0)$ con vettore velocità $\vec{V}(0)$. Se la retta, passante per $P(0)$ e con vettore direzione $\vec{V}(0)$, giace sulla superfice, allora il punto si muoverà di moto rettilineo uniforme lungo questa retta con velocità scalare costante pari a $||\vec{V}(0)||$; senza che il vincolo di stare sulla superfice abbia da esercitare nessuna azione sulla biglia. Se questa retta non giace sulla superfice, allora il punto descriverà una certa traiettoria sotto l'azione di un'azione del vincolo, costituito da una forza $\vec{F}(t)$ che, all'istante t, agisce in direzione normale alla superfice nel punto $P(t)$. L'accelerazione di $P(t)$ è

$$\vec{A}(t) = v^2(t)k(t)\vec{N}(t) + \frac{dv}{dt}\,\vec{T}(t).$$

Siccome $\vec{F}(t)$ è l'unica forza che agisce, deve essere

$$\vec{F}(t) = m\,\vec{A}(t),$$

dove m è la massa del punto. Allora l'accelerazione è normale alla superfice e entrambi i vettori $\vec{A}(t)$ e $\vec{N}(t)$ sono perpendicolari a $\vec{T}(t)$. Ne segue che $dv/dt = 0$ (dunque la velocità scalare è costante) e $\vec{A}$ e $\vec{N}$ hanno la stessa direzione. Dunque la traiettoria è un arco di geodetica. □

Si potrebbe dire che, giocando al biliardo su una superfice $\mathcal{S}$ le palle descrivono archi di geodetica.

Per un generale principio di determinazione che vige nella fisica classica, è ragionevole pensare che due punti in moto, vincolati a restare sulla superfice, in assenza di forze esterne, che passano per uno stesso punto con la stessa direzione, descrivano la stessa traiettoria. Naturalmente esiste una dimostrazione formale di questo fatto, ma possiamo accontentarci di questa indicazione intuitiva. (Possiamo parafrasare, rifacendoci all'immagine del biliardo, che quando tirando due volte una palla, dallo stesso punto, nella stessa direzione e con la stessa velocità, il percorso sarà il medesimo). Questo significa che

xi.10 COROLLARIO 1.11. *Assegnati un punto P, di una superfice $\mathcal{S}$, ed un vettore $\vec{v}$, tangente ad $\mathcal{S}$ in P, esiste un unico arco di geodetica che passa per P con tangente diretta come $\vec{v}$.*

Assegnato un punto P di una sfera, i cerchi massimi che passano per P sono le sezioni della sfera con i piani che passano per P e per il centro e ciascuno di essi individua una diversa direzione tangente alla sfera in P. Detto in altri termini le sezioni normali in P sono tante quante le direzioni tangenti in P. Per il Corollario 1.11 questi cerchi massimi sono gli unici archi di geodetica che passano per P.

Resta il problema di capire se questi archi di geodetica minimizzino o meno la lunghezza del percorso sulla sfera. Intanto se P e Q sono due punti antipodali, i piani del fascio che ha per asse la retta PQ tagliano sulla sfera cerchi massimi. Ciascuno di essi è suddiviso da P e Q in due semicirconferenze di lunghezza $\pi \times$ *raggio* e dunque gli archi di geodetica che congiungono P e Q sono infiniti e tutti della medesima lunghezza; il problema è di capire se questa lunghezza è pari alla distanza. Se invece P e Q non sono antipodali, esiste un unico piano che passa per P, Q e per il centro della sfera. Questo piano taglia sulla sfera un cerchio massimo che P e Q suddividono in due archi di lunghezza diversa; il problema è di capire se la lunghezza di quello minore è pari alla distanza tra P e Q.

A parte argomenti ad hoc che si possono trovare sfruttando la particolarità della sfera, essite un argomento generale. Consideriamo un punto materiale, vincolato a stare sulla superfice $\mathcal{S}$, ma non sottoposto ad altre forze oltre a quelle determinate dal vincolo; questo punto si muove a velocità scalare costante lungo un'arco di geodetica; immaginiamo che il suo moto si prolunghi quanto possibile nel passato e nel futuro. Se la geodetica è una retta il moto è eterno sia nel passato che nel futuro, lo stesso accade se la geodetica è un cerchio massimo (ovviamente il punto continua a ripetere lo stesso percorso infinite volte). Nel piano privato di un punto O le cose non vanno così; se il punto descrive una semiretta uscente da O il moto avrà un inizio (se si allontana da O) oppure una fine (se si muove verso O), infatti a velocità costante non è possibile invertire il verso di percorrenza e il punto materiale non può passare attraverso O. Sulla sfera privata di un punto O le geodetiche, oltre ai cerchi massimi che non passano per O, sono costituite dai cerchi massimi che passano per O, privati ovviamente del punto O. Quest'ultime geodetiche sono percorse in un intervallo di tempo limitato, perchè il punto parte da O e ritorna ad O in tempo finito e, come sopra osservato, non può invertire il senso di marcia.

In generale diamo la seguente

xi.11 Definizione 1.12. *Un arco di geodetica si dice* geodetica *se non può essere proseguito oltre i suoi estremi.* Ad es. un cerchio massimo è privo di estremi quindi è un arco di geodetica, l'arco di geodetica che congiunge due punti della sfera non è un arco di geodetica, perché può essere prolungato ad un cerchio massimo. La semiretta uscente da O, nel caso dell'esempio precedente, è una geodetica, perché attraverso O non posso passare. *Diremo che una superfice $\mathcal{S}$ è* completa *se tutte le sue geodetiche possono essere percorse a velocità costante nell'intervallo* $(-\infty, +\infty)$; *cioè se tutti i punti materiali, vincolati a stare sulla superfice, ma non soggetti ad ulteriore forze, se non sono in quiete si muovono in eterno (sia nel passato che nel futuro).*

Con questa definizione il piano e la sfera sono superfici complete, il piano o la sfera meno un punto non sono complete. Ora sussiste questo (difficile)

xi.12 Teorema 1.13. *Se $\mathcal{S}$ è una superfice completa, allora - comunque scelti due suoi punti - esiste sempre almeno un arco di geodetica che li congiunge e che minimizza la distanza.*

Questo risultato permette di concludere l'analisi delle geodetiche sulla sfera. Dati due punti P e Q esiste sempre un arco di cerchio massimo che li congiunge; anzi ne esistono infiniti e tutti della stessa lunghezza se i punti sono antipodali, ne esistono due, di lunghezza diversa se i punti non sono antipodali. Per il Teorema 1.13 uno almeno di questi archi minimizza la distanza. Dunque se i punti P e Q sono antipodali la loro distanza è πR, se invece non sono antipodali, detta θ la misura in radianti dell'angolo che i raggi per P e Q formano al centro della sfera, la loro distanza è θR (cfr. Fig. 6).

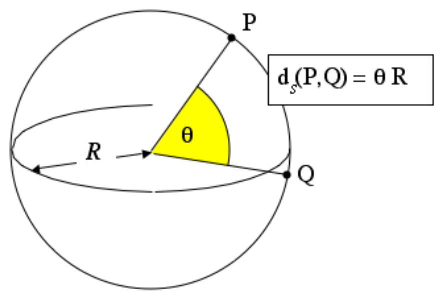

FIGURE 6 fxi.16

2. Isometrie

xi.14 DEFINIZIONE 2.1. *Un'*isometria *tra due superfici $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ è una corrispondenza biunivoca $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ che conserva la distanza, vale a dire: comunque presi due punti P, Q di $\mathcal{S}$, per i corrispondenti punti P', Q' di $\mathcal{S}'$, vale*

$$d'_{\mathcal{S}}(P', Q') = d_{\mathcal{S}}(P, Q).$$

Osserviamo che la proprietà che F sia biunivoca è, praticamente, una conseguenza del fatto che F conservi la distanza. Vediamo il perché. Sia $F : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ è un'applicazione tra due superfici che conserva la distanza, allora F è iniettiva. Infatti presi P, Q due punti distinti di $\mathcal{S}$, allora $d_{\mathcal{S}}(P, Q) > 0$; siano P', Q' i corrispondenti punti su $\mathcal{T}$; riesce $d_{\mathcal{T}}(P', Q') = d_{\mathcal{S}}(P, Q)$; pertanto anche $d_{\mathcal{T}}(P', Q') > 0$ e dunque $P' \neq Q'$. Tuttavia può ben essere che la superfice $\mathcal{T}$ contenga punti che non corrispondono a nessun punto di F, vale a dire $F(\mathcal{S})$ è un sottoinsieme di $\mathcal{T}$ che può essere diverso da tutto $\mathcal{T}$. Ma niente vieta di considerare la superfice $\mathcal{S}' := F(\mathcal{S})$ e così otteniamo che la corrispondenza $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ è biunivoca.

N.B. Un'isometria, essendo biunivoca, è invertibile. La sua inversa è ovviamente ancora un'isometria.

Vediamo un primo esempio di isometria tra superfici, o meglio una classe di infiniti esempi.

xi.15 ESERCIZIO 2.2. *Sia $\mathcal{S}$ una superfice realizzata in materiale plastico duttile, ma non estensibile; deformiamo la superfice $\mathcal{S}$ fino ad ottenere una superfice $\mathcal{S}'$. Mostrare che la deformazione stabilisce un'isometria $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$.*

Soluzione. *Premessa.* Il materiale utilizzato non è estensibile, dunque la lunghezza delle curve tracciate sulla superfice $\mathcal{S}$ non subisce alterazioni nella deformazione. Sembrerebbe allora ovvio che F sia un'isometria. Invece le cose sono meno ovvie di quello che sembra e conviene esplicitare l'argomento.

Abbiamo detto: se $\mathcal{C}$ è una curva su $\mathcal{S}$ e $\mathcal{C}' = F(\mathcal{C})$ è la corrispondente curva su $\mathcal{S}'$, allora

$$L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{C}').$$

Siano P e Q due punti di $\mathcal{S}$ e sia $\mathcal{C}$ un arco di geodetica che li congiunge e che minimizza la distanza; allora

$$L(\mathcal{C}) = d_{\mathcal{S}}(P, Q).$$

Siano P', Q' i punti corrispondenti su $\mathcal{S}'$; essi sono gli estremi del corrispondente arco $\mathcal{C}'$. Ne segue

$$d_{\mathcal{S}'}(P', Q') \leq L(\mathcal{C}') = L(\mathcal{C}) = d_{\mathcal{S}}(P, Q).$$

Ma, con lo stesso argomento, preso un'arco di geodetica in $\mathcal{S}'$ che congiunge P' a Q' e che minimizza la distanza, otteniamo,

$$d_{\mathcal{S}'}(P', Q') \geq d_{\mathcal{S}}(P, Q),$$

e quindi

$$d_{\mathcal{S}'}(P', Q') = d_{\mathcal{S}}(P, Q).$$

Purtroppo l'argomento esposto non è conclusivo, perché non è detto che due punti qualsiasi siano congiunti da un arco di geodetica che minimizza la distanza (questo è vero nelle superfici complete, cfr. Proposizione 1.13, oppure se i due punti sono molto vicini, cfr. Proposizione 1.4). Bisogna ragionare altrimenti.

La soluzione corretta. Siano P, Q due punti di $\mathcal{S}$. Poiché è possibile scambiare i ruoli di $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'$, è sufficiente provare

$$d_{\mathcal{S}'}(P', Q') \leq d_{\mathcal{S}}(P, Q).$$

Comunque fissato $M > d_{\mathcal{S}}(P, Q)$ esiste (cfr. Esercizio 1.7 (ii)) un'arco di curva $\mathcal{C}$ di $\mathcal{S}$ che congiunge i due punti e soddisfa

$$M > L(\mathcal{C}) \geq d_{\mathcal{S}}(P, Q).$$

Allora, con le stesse notazioni precedenti,

$$M > L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{C}') \geq d_{\mathcal{S}'}(P', Q').$$

Posto $A := d_{\mathcal{S}}(P, Q)$ e $B := d_{\mathcal{S}'}(P', Q')$ abbiamo provato che: *se M è un numero maggiore di A, allora M è un numero maggiore di B;* questo impedisce che possa essere $B > A$, infatti in tal caso, ogni numero M compreso tra A e B contraddirebbe l'affermazione appena fatta. Dunque $B \leq A$. $\square$

L'Esercizio 2.2 non solo mostra che quell'esempio concreto è un'isometria tra superfici, ma, riformulato in termini matematici, prova che

xi.16 Proposizione 2.3. *Una corrispondenza biunivoca $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ tra due superfici che conserva la lunghezza delle curve è un'isometria.*

xi.16.1 Esercizio 2.4. *Dimostrare la Proposizione 2.3.*

Sia G un'isometria dello spazio; come sappiamo G si ottiene componendo moti rigidi e riflessioni. Tutto sommato è piuttosto ovvio che G conservi la lunghezza delle curve e non mi pare valga la pena di esporne una dimostrazione rigorosa. Da questo e dalla Proposizione 2.3 segue il xi.17 Corollario 2.5. *Sia G un'isometria dello spazio e sia $\mathcal{S}$ una superfice. La restrizione di G ad $\mathcal{S}$ determina un'isometria $G_{|\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ tra $\mathcal{S}$ e la superfice $\mathcal{S}' := G(\mathcal{S})$.*

Dimostrazione. G è biunivoca, quindi iniettiva. La restrizione al sottoinsieme $\mathcal{S}$ di G resta iniettiva. Prendendo come codominio esattamente l'immagine $G(\mathcal{S})$ la restrizione $G_{|\mathcal{S}}\mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ è suriettiva e dunque biunivoca. Ma G conserva la lunghezza delle curve, dunque, per la Proposizione 2.3 è un'isometria tra le due superfici. □

Dalle considerazioni precedenti sorgono alcune domande. (i) Data un'isometria $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ tra due superfici, essa è la restrizione di un'isometria dello spazio? Cioè esiste un'isometria G dello spazio di cui F sia la restrizione? (ii) Data un'isometria $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ tra due superfici essa si può pensare come una deformazione, cioè esiste una famiglia continua di superfici $\mathcal{S}_t$, $0 \le t \le 1$ con $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$ e $\mathcal{S}' = \mathcal{S}_1$? (iii) Vale il viceversa della Proposizione 2.3, vale a dire un'isometria tra due superfici conserva la lunghezza delle curve?

La risposta alla prima questione è negativa, prendiamo un foglio di carta (materiale evidentemente inestensibile) e incurviamolo leggermente. Per l'Esercizio 2.2 si tratta di un'isometria, che ovviamente non è definita da un'isometria dello spazio, perché quest'ultime (composte di moti rigidi e riflessioni) mandano un piano in un piano e quindi il foglio deve restare piano.

Anche la risposta alla seconda domanda è negativa, lo vedremo più avanti. Infine la risposta alla terza domanda è positiva, ma richiede un po' di lavoro.

3. Interludio di calcoli

3.1. Descrizione analitica di una superfice e dei piani tangenti. Supponiamo che la superfice $\mathcal{S}$ sia definita da un'applicazione $X(u, v)$ dove (u, v) varia in un aperto Ω del piano. Fissato (u_0, v_0) in Ω, per questo punto passano due rette parallele agli assi (vedi Fig. 7); a cui corrispondono due curve sulla superfice, pas-

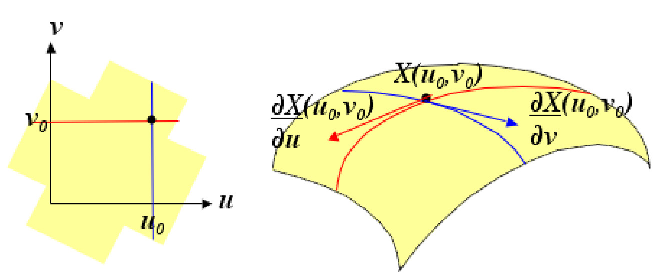

Figure 7 fxi.17.1

santi per il punto $X(u_0, v_0)$. Come abbiamo visto i vettori tangenti a queste due curve, nel punto $X(u_0, v_0)$ sono

$$\frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) \text{ e } \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Più in generale assegnata una traiettoria $(u(t), v(t))$ che passa per il punto (u_0, v_0), con vettore velocità

$$(\dot{u}(t_0).\dot{v}(t_0))$$

(come illustrato in Fig. fxi.17.2 8 queste sono le componenti del vettore verde a sinistra,

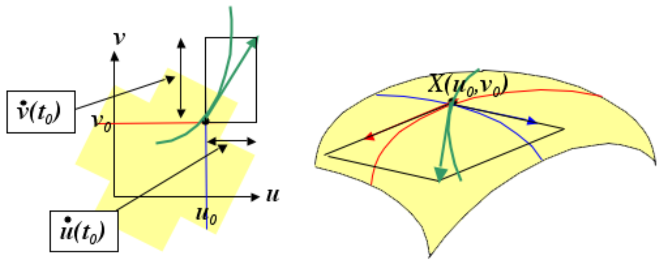

FIGURE 8 fxi.17.2

tangente alla traiettoria). A questa curva in Ω corrisponde una curva sulla superfice: la traiettoria $X(u(t), v(t))$ (in figura la curva verde a destra); il cui vettore velocità è, per la regola derivazione della composta:

$$\frac{d}{dt}X(u(t_0), v(t_0)) = \frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0)\ \dot{u}(t_0) + \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0)\ \dot{v}(t_0).$$

A costo di ripetersi è opportuno enunciare con chiarezza tutta questa faccenda:

xi.18 OSSERVAZIONE 3.1. *Sia $X(u, v)$ un'applicazione che descrive la superfice $\mathcal{S}$.*
• *Ad un certo punto (u_0, v_0) nel piano corrisponde il punto $P := X(u_0, v_0)$ della superfice $\mathcal{S}$.*
• *Ad ogni traiettoria del piano che passa per (u_0, v_0) corrisponde una traiettoria sulla superfice che passa per P.*
• *In particolare ci sono due traiettorie per (u_0, v_0): le rette parallele agli assi (le rette $v = v_0$ e $u = u_0$). I vettori velocità delle corrispondenti traiettorie sulla superfice sono*

$$\frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0)\ e\ \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0).$$

• *Se esiste il piano tangente in P, questi due vettori, tangenti ad $\mathcal{S}$ in P lo individuano. In particolare ogni vettore tangente ad $\mathcal{S}$ in P si può scrivere come combinazione lineare di questi due vettori, cioè nella forma*

$$a\ \frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) + b\ \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0),$$

dove a, b sono numeri qualsiasi.
• *Possiamo infine interpretare il significato di questa coppia di numeri a e b. Se prendiamo una traiettoria sul piano che passa per (u_0, v_0) con vettore velocità (a, b) (è un vettore del piano, quindi è individuato da una coppia di numeri), allora il vettore velocità della corrispondente traiettoria in $\mathcal{S}$ è proprio*

$$a\ \frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) + b\ \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0).$$

È opportuno aggiungere due osservazioni apparentemente banali, ma che mettono l'importanza del calcolo.

xi.18 OSSERVAZIONE 3.2. **(i)** Esistono infinite traiettorie nel piano che passano per il punto (u_0, v_0) con vettore velocità $\vec{V} = (a, b)$. In corrispondenza ad esse ci sono infinite traiettorie sulla superfice che passano per P; chi ci dice che quest'ultime hanno lo stesso vettore velocità nel punto P? Ce lo dice il calcolo perché il vettore velocità nel punto P è

$$a\,\frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) + b\,\frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0),$$

e quindi dipende solo da $\vec{V}$ e non dalla scelta della traiettoria. Pertanto

> *esiste una corrispondenza biunivoca tra i vettori del piano applicati in (u_0, v_0) e i vettori tangenti ad $\mathcal{S}$ in P. E l'esistenza di questa corrispondenza è garantita dal calcolo.*

(ii) Sappiamo che, se il prodotto vettoriale $\frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0) \neq 0$, il punto P possiede piano tangente. In tal caso il prodotto vettoriale è perpendicolare ad entrambi i fattori, cioè possiede la direzione della retta normale alla superfice in $P = X(u_0, v_0)$. Pertanto (ho diviso per la lunghezza)

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}}{||\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}||}$$

> *è un versore normale alla superfice in P. Poiché evidentemente $\vec{n}$ dipende con continuità da (u, v), questo prova che se $X(u, v)$ è iniettiva, la regione di $\mathcal{S}$ che essa ricopre è orientabile.*

3.2. Le funzioni E, F, G, l, m, n. Definiamo le quantità[5] (che dipendono dal punto sulla superfice)

$$E := ||\frac{\partial X}{\partial u}||^2,\ F := \frac{\partial X}{\partial u}.\frac{\partial X}{\partial v},\ G := ||\frac{\partial X}{\partial v}||^2.$$

Inoltre definiamo:

$$l := \vec{n}.\ \frac{\partial^2 X}{\partial u^2},\ m := \vec{n}.\ \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v},\ n := \vec{n}.\ \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}.$$

Tutte queste formule sono probabilmente faticose per il lettore. Cerchiamo di riassumerne il senso:

> *Data un'applicazione $X(u, v)$, definita in una certa regione Ω del piano, che definisce una certa superfice $\mathcal{S}$, sono definite sei funzioni $E(u, v), F(u, v), G(u, v), l(u, v), m(u, v), n(u, v)$. Queste funzioni si possono esplicitamente calcolare mediante le formule precedenti. In particolare le prime tre funzioni dipendono dalla lunghezza dei vettori tangenti alle curve $u = cost.$ e $v = cost.$ e dal loro prodotto scalare.*

[5] Anche qui avrei dovuto scrivere $E(u_0, v_0) = ||\frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0)||^2$ ecc. Il prodotto indicato con un punto è il prodotto scalare

Mentre curvatura e torsione di una curva, dipendono dal punto sulla curva e non dal moto con cui possiamo descriverla, le funzioni E, F, G, l, m, n non hanno questa stessa proprietà. Infatti queste sei funzioni dipendono non solo dal punto sulla superfice, ma anche dall'applicazione $X(u, v)$ prescelta. Per provarlo è sufficiente esibire un esempio in cui questo si verifica.

xi.0.1 Esercizio 3.3. *Mostrare che le funzioni* E(u,v), F(u,v), G(u,v), l(u,v), m(u,v), n(u,v) *dipendono non solo dal punto sulla superfice $\mathcal{S}$, come è ovvio, ma anche dalla scelta dell'applicazione* X(u,v) *che definisce $\mathcal{S}$-*

Soluzione. Come abbiamo visto in §XI.6.1, possiamo descrivere una sfera mediante un'applicazione

$$X : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$$

fatta in modo tale che le rette $u = cost.$ e $v = cost.$ corrispondano rispettivamente a paralleli e meridiani. Pertanto $G = ||\frac{\partial X}{\partial v}||^2$ è il quadrato della velocità con cui si percorre un parallelo e $E = ||\frac{\partial X}{\partial u}||^2$ è il quadrato della velocità con cui si percorre un meridiano.

Ora i meridiani hanno tutti la stessa lunghezza e quindi è possibile che nell'intervallo $[0, 1]$ i meridiani vengano percorsi a velocità costante, nel qual caso E sarebbe costante in tutti i punti. Viceversa la lunghezza dei paralleli varia e quindi non possono essere percorsi, nel medesimo intervallo di tempo, a velocità costante ed uguale per tutti i paralleli; pertanto G non può essere costante.

Se immaginiamo di scambiare tra loro le coordinate u e v sul foglio $[0, 1] \times [0, 1]$, la superfice non subisce nessuna alterazione e resta sempre una sfera, mentre le funzioni E e G si scambiano. □

3.3. Il teorema fondamentale delle superfici. Ricordo che curvatura e torsione definiscono completamente una curva nello spazio. Ciò significa che

xi.0 Teorema 3.4. **(1)** *Data una curva $\mathcal{C}$, in ogni suo punto sono definite la curvatura e la torsione*[6].

(2) *Assegnate due funzioni $k = k(t) > 0$ e $\tau = \tau(t)$ definite per t in un certo intervallo I, esiste una curva $\mathcal{C}$, descritta dal moto di un punto $P(t)$, tale che la sua curvatura e torsione nel punto $P(t)$ siano proprio $k(t)$ e $\tau(t)$. Tale curva è unica salvo ovviamente la possibilità di trasportarla rigidamente nello spazio.*

Per le superfici vale un risultato parzialmente analogo, che ora enunciamo in forma approssimativa.

xi.1 Teorema 3.5. *Assegnate sei funzioni $E^*, F^*, G^*, l^*, m^*, n^*$ definite in una certa regione del piano Ω, allora esiste una superfice $\mathcal{S}$, descritta da un'applicazione $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$, tale che*

$$E(u, v) = E^*(u, v),\ F(u, v) = F^*(u, v), \dots, n(u, v) = n^*(u, v).$$

Inoltre tale superfice $\mathcal{S}$ è unica a meno di trasportarla rigidamente nello spazio.

N.B. L'enunciato è impreciso, perché abbiamo omesso di specificare che le sei funzioni $E^*, F^*, G^*,\ l^*, m^*, n^*$ devono soddisfare certe condizioni di compatibilità che le legano tra loro. Inoltre non è certo che la funzione $X(u, v)$ possa essere

[6] In verità nei punti della curva in cui la curvatura si annulla la torsione non è definita

definita in tutto Ω, quello che si sa è che preso un punto (u_0, v_0) di Ω si può definire la funzione X vicino a (u_0, v_0).

Concludiamo cercando di distillare il senso di questo teorema. Il teorema innanzi tutto fornisce una visione teoretica dell'insieme di tutte le possibili superfici: assegnare sei funzioni, che soddisfano certe condizioni di compatibilità, significa assegnare una superfice, esattamente come assegnare curvatura e torsione significa assegnare una curva.

Nel caso delle curve possiamo dire che, considerando uguali due curve che si possono ottenere una dall'altra mediante un moto rigido, l'insieme di tutte le possibili curve è in corrispondenza biunivoca con l'insieme di tutte le possibili coppie di funzioni k, τ (con $k > 0$).

Nel caso delle superfici, sia $\mathcal{A}$ l'insieme di tutti i possibili sestetti di funzioni (che soddisfano certe condizioni di compatibilità) e sia $\mathcal{B}$ l'insieme di tutte le possibili superfici, considerando uguali due superfici che si possono ottenere una dall'altra mediante un moto rigido. Il teorema dice che esiste una corrispondenza $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Questa corrispondenza è suriettiva perché per ogni superfice posso definire, scelta un'applicazione $X(u, v)$ le sei funzioni; dunque in questo modo trovo tutte le superfici. Purtroppo la corriposndenza non è iniettiva, vale a dire sestetti diversi di funzioni possono dare la stessa superfice (questo per quanto osservsto nell'Esercizio xi.0.1 3.3).

3.4. Applicazioni tra piani tangenti. Mostriamo che ogni applicazione tra due superfici induce un'applicazione tra i piani tangenti dei punti corrispondenti.

xi.19 Definizione 3.6. *Sia $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ un'applicazione tra due superfici. Preso un punto P_0 su $\mathcal{S}$, a questo corrisponde un punto $P_0' = F(P_0)$ su $\mathcal{S}'$.*

Definiamo un'applicazione

$$F_* : \tau_{P_0} \to \tau_{P_0'}$$

tra i i piani $\tau_{P_0}, \tau_{P_0'}$ tangenti (rispettivamente ad $\mathcal{S}$ e a $\mathcal{S}'$) nei punti P_0 e P_0'. Se $\vec{v}_0$ è un vettore tangente ad $\mathcal{S}$ in P_0, indicheremo con $F_*(\vec{v}_0)$ il corrispondente vettore tangente ad $\mathcal{S}'$ in P_0'.

In Fig. fxi.18 9 sono rappresentate le due superfici, i punti P_0 e P_0', i piani tangenti in

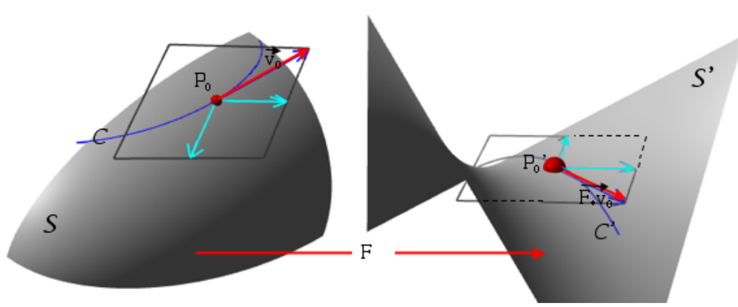

Figure 9. a - b fxi.18

questi due punti e un vettore $\vec{v}_0$ e il suo corrispondente $F_*(\vec{v}_0)$.

Vediamo come è definito $F_*(\vec{v}_0)$:

> *presa una traiettoria $\mathcal{C}$, su $\mathcal{S}$, che passa per P_0 con velocità $\vec{v}_0$, ad essa corrisponde, mediante F, una traiettoria $\mathcal{C}' := F(\mathcal{C})$ che*

ovviamente passa per P_0' con un certo vettore velocità; proprio questo vettore velocità è il vettore $F_*(\vec{v}_0)$.

In Fig. 9 sono anche rappresentate le due traiettorie $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$.

La definizione, come vedremo, è corretta, ma - così come è formulata - lascia un dubbio: il vettore $F_*(\vec{v}_0)$ che abbiamo definito, dipende o non dipende dalla scelta della traiettoria $\mathcal{C}$? Il problema è rilevante, perché esistono infinite traiettorie sulla superfice $\mathcal{S}$ che passano per P_0 con vettore velocità $\vec{v}_0$. In realtà una qualunque curva che passa per P_0 con tangente diretta come il vettore $\vec{v}_0$, percorsa ad es. a velocità costante pari a $||\vec{v}_0||$, soddisfa questa condizione; e di curve per P_0 che hanno quella tangente ce ne sono infinite.

Mostriamo dunque che il vettore $F_*(\vec{v}_0)$ non dipende dalla scelta della traiettoria. La superfice $\mathcal{S}$ sarà definita da una certa applicazione $X : \Omega \to \mathcal{S}$ e ci sarà un certo punto $(u_0, v_0) \in \Omega$ con $P_0 = X(u_0, v_0)$. La composta delle applicazioni

$$\Omega \xrightarrow{X} \mathcal{S} \text{ e } \mathcal{S} \xrightarrow{F} \mathcal{S}'$$

definisce un'applicazione

$$\Omega \xrightarrow{Y} \mathcal{S}'.$$

Vale

$$(u_0, v_0) \xmapsto{X} P_0 \xmapsto{F} P_0',$$

quindi

$$Y(u_0, v_0) = P_0'.$$

Dunque la situazione è la seguente: abbiamo Ω sottoinsieme del piano e le superfici $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$.

•Ad ogni punto (u, v) di Ω corrispondono, mediante X un punto P di $\mathcal{S}$ e, mediante Y, un punto P' di $\mathcal{S}'$ tali che $F(P) = P'$.

• Ad ogni traiettoria in Ω che passa per (u, v) corrispondono, mediante X, una traiettoria $\mathcal{C}$ su $\mathcal{S}$ e, mediante Y, una traiettoria $\mathcal{C}'$ su $\mathcal{S}'$.

• Ad ogni vettore (a, b) applicato in (u, v) corrispondono, mediante X, un vettore $\vec{v}$, tangente ad $\mathcal{S}$ in P, e, mediante Y, un vettore $\vec{v}'$, tangente ad $\mathcal{S}'$ in P'.

Quest'ultima affermazione viene dall'Osservazione 3.2(i). Si determina coì un'applicazione

$$\tau_P \ni \vec{v} \mapsto \vec{v}' \in \tau_{P'}$$

che è esattamente quella definita sopra, cioè $\vec{v}' = F_*(\vec{v})$. Per sincerasene basta rileggere l'Osservazione 3.2(i): presa una traiettoria che passa per (u, v) con velocità (a, b) le corrispondenti traiettorie in $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ avranno velocità $\vec{v}$ e $\vec{v}'$.

xi.19.1 OSSERVAZIONE 3.7. *Se l'applicazione $\mathcal{S} \xrightarrow{F} \mathcal{S}'$ è biunivoca, esiste la sua inversa $\mathcal{S}' \xrightarrow{F^{-1}} \mathcal{S}$ e risulta: se $\vec{v}$ è un vettore tangente ad $\mathcal{S}$, allora*

$$F_*^{-1}(F_*(\vec{v})) = \vec{v}.$$

<u>Dimostrazione</u>. Sia P il punto di $\mathcal{S}$ in cui $\vec{v}$ è tangente. Sia $\mathcal{C}$ una traiettoria che passa per P all'istante 0 con velocità $\vec{v}$; allora $F_*(\vec{v})$ è il vettore velocità di $F(\mathcal{C})$ all'istante 0. Infine $F_*^{-1}(F_*(\vec{v}))$ è il vettore velocità di $F^{-1}(F(\mathcal{C}))$ all'istante 0. Ma $F^{-1}(F(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$, quindi $F_*^{-1}(F_*(\vec{v})) = \vec{v}$. □

4. Alcune caratterizzazioni delle isometrie.

Possiamo passare alla dimostrazione del seguente

xi.20 Teorema 4.1. *Sia $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ un'applicazione biunivoca tra due superfici. le seguenti proprietà dono equivalenti:*

(i) F è un'isometria.

(ii) F conserva la lunghezza delle curve, cioè se $\mathcal{C}$ è una curva di $\mathcal{S}$ e $\mathcal{C}'$ è la corrispondente curva su $\mathcal{S}'$, allora

$$L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{C}').$$

(iii) F conserva la lunghezza dei vettori tangenti, cioè se $\vec{v}$ è un vettore tangente ad $\mathcal{S}$ in P, allora

$$||\vec{v}|| = ||F_*(\vec{v})||.$$

Dimostrazione. La Proposizione xi.16 2.3 afferma che (ii) $\Rightarrow$ (i).

Proviamo (iii) $\Rightarrow$ (ii). Supponiamo che (iii) sia vera. Sia $\mathcal{C}$ una curva di $\mathcal{S}$ descritta dal moto di un punto $P(t)$ nell'intervallo temporale $(t_0, t_1$. Allora

$$L(\mathcal{C}) = \int_{t_0}^{t_1} ||\frac{dP}{dt}(t)||\ dt.$$

Da (iii), segue

$$||\frac{dP}{dt}(t)|| = ||F_*(\frac{dP}{dt}(t))||.$$

Per definizione di F_*, il vettore $F_*(\frac{dP}{dt}(t)|)$ è la velocità di $P'(t) = F(P(t))$, quindi

$$\int_{t_0}^{t_1} ||\frac{dP}{dt}(t)||\ dt = \int_{t_0}^{t_1} ||\frac{dP'}{dt}(t)||\ dt = L(\mathcal{C}').$$

Infine **proviamo (i) $\Rightarrow$ (iii)** e così chiudiamo il giro. Supponiamo che F sia un'isometria.

Sia v_0 un vettore tangente ad $\mathcal{S}$ nel punto P_0, dobbiamo provare

$$||\vec{v}_0|| = ||F_*(\vec{v}_0)||.$$

A questo scopo è sufficiente stabilire

$$||\vec{v}_0|| \leq ||F_*(\vec{v}_0)||.$$

Infatti, poiché anche F^{-1} è un'isometria, allora, per ogni vettore $\vec{w}$, tangente ad $\mathcal{S}'$,

$$||\vec{w}|| \leq ||F_*^{-1}(\vec{w})||.$$

In particolare, prendendo $\vec{w} = F_*(\vec{v}_0)$, otteniamo

$$||F_*(\vec{v}_0)|| \leq ||F_*^{-1}(F_*(\vec{v}_0))|| = ||\vec{v}_0||.$$

Sia $P(t)$ il moto di un punto che descrive un arco di geodetica, che all'istante 0 passa per P_0 con vettore tangente $\vec{v}_0$. Un tale moto esiste perché, per il Corollario xi.10 1.11 per P_0 passa un arco di geodetica con tangente diretta come $\vec{v}_0$; pertanto percorrendo l'arco a velocità opportuna possiamo ottenere che all'istante 0 passi per P_0 con la velocità voluta.

Per il Teorema xi.13 1.4 vicino a P_0 esiste una piccola regione in cui per ogni coppia di punti passa un'unica geodetica contenuta nella regione e tale geodetica minimizza la lunghezza. Dunque se il valore assoluto di t è piccolo, $P(t)$ è in questa regione.

Ne segue che se i valori assoluti di t ed h sono piccoli l'arco $\mathcal{C}_{t,t+h} = \widehat{P(t), P(t+h)}$ è contenuto nella regione; pertanto

$$\int_t^{t+h} ||\frac{dP}{du}||\, du = L(\mathcal{C}_{t,t+h}) = d_{\mathcal{S}}(P(t), P(t+h)).$$

Ma F è un'isometria, dunque

$$d_{\mathcal{S}}(P(t), P(t+h)) = d_{\mathcal{S}'}(P'(t), P'(t+h)).$$

Infine, se consideriamo il corrispondente arco $\mathcal{C}'_{t,t+h}$ descritto da $P'(s) = F(P(s))$,

$$d_{\mathcal{S}'}(P'(t), P'(t+h)) \leq L(\mathcal{C}'_{t,t+h}) = \int_t^{t+h} ||\frac{dP'}{du}||\, du.$$

Dunque

$$\int_t^{t+h} ||\frac{dP}{du}||\, du \leq \int_t^{t+h} ||\frac{dP'}{du}||\, du$$

Allora

$$f(t) = \int_0^t ||\frac{dP'}{du}||\, du - \int_0^t ||\frac{dP}{du}||\, du$$

è una funzione non decrescente, infatti

$$f(t+h) - f(t) = \int_0^{t+h} ||\frac{dP'}{du}||\, du - \int_0^t ||\frac{dP'}{du}||\, du - \int_0^{t+h} ||\frac{dP}{du}||\, du + \int_0^t ||\frac{dP}{du}||\, du =$$

$$= \int_t^{t+h} ||\frac{dP'}{du}||\, du - \int_t^{t+h} ||\frac{dP}{du}||\, du \geq 0.$$

Dunque la sua derivata è non negativa, vale a dire

$$0 \leq \frac{df}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\Big(\int_0^t ||\frac{dP'}{du}||\, du - \int_0^t ||\frac{dP}{du}||\, du\Big)|| =$$

$$= ||\frac{dP'}{dt}(t)|| - ||\frac{dP}{dt}(t)||.$$

In particolare $\frac{dP}{dt}(0) = \vec{v}_0$ e $\frac{dP'}{dt}(0) = F_*(\vec{v}_0)$, quindi

$$0 \leq ||F_*(\vec{v}_0)|| - ||\vec{v}_0||.$$

□

Esponiamo un ultimo criterio uitle in pratica

Proposizione 4.2. *Sia $\mathcal{S} \xrightarrow{F} \mathcal{S}'$ un'applicazione biunivoca tra due superfici. Supponiamo che la superfice $\mathcal{S}$ sia definita dall'applicazione*

$$\Omega \xrightarrow{X} \mathcal{S}.$$

Sia

$$\Omega \xrightarrow{Y} \mathcal{S}'$$

la composta, cioè $Y := F \circ X$, vale a dire il diagramma

$\boxed{\texttt{d}}$ (4.1)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{F} & \mathcal{S}' \\ & \nwarrow X \quad \nearrow Y & \\ & \Omega & \end{array}$$

è commutativo.

Restano allora definite le funzioni $E(u,v), F(u,v), G(u,v)$, mediante l'applicazione X e $E'(u,v), F'(u,v), G'(u,v)$, mediante l'applicazione Y

Allora F è un'isometria se e solo se

$$E = E', F = F', G = G'.$$

Dimostrazione. Facciamo alcune semplici osservazioni. Per il Teorema xi.20 4.1

> **(1)** F è un'isometria se e solo se F_* conserva la lunghezza dei vettori tangenti.

Osserviamo che

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\vec{u}.\vec{v},$$

e quindi

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\big(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2.$$

Dunque il prodotto scalare si può esprimere in termini della lunghezza dei vettori. Pertanto

> **(2)** se l'applicazione F_* conserva la lunghezza dei vettori, conserva anche i loro prodotti scalari.

Osserviamo anche che

$$||a\ \vec{u} + b\ \vec{v}||^2 = a^2||\vec{u}||^2 + b^2||\vec{v}||^2 + 2ab\vec{u}.\vec{v}.$$

Quindi

> **(3)**F_* conserva la lunghezza di $\vec{u}$, $\vec{v}$ e il loro prodotto scalare se e solo se conserva la lunghezza di tutti i vettori del piano individuato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Inoltre $\frac{\partial X}{\partial u}(u,v)$ e $\frac{\partial X}{\partial v}(u,v)$. sono una base del piano tangente in $P = X(u,v)$ e

$$F_*(\frac{\partial X}{\partial u}(u,v)) = \frac{\partial Y}{\partial u}(u,v)$$

e

$$F_*(\frac{\partial X}{\partial v}(u,v)) = \frac{\partial Y}{\partial v}(u,v)$$

Pertanto

> **(4)** F_* conserva la lunghezza e il prodotto scalare di $\frac{\partial X}{\partial u}(u,v)$ e $\frac{\partial X}{\partial v}(u,v)$. se e solo se $E(u,v) = E'(u',v'), F(u,v) = F'(u',v'), G(u,v) = G'(u',v')$.

Mettendo in fila queste osservazioni si conclude. □