

Corso 2007-08

CHAPTER 1

Distanza su una superficie

1. Distanza e geodetiche.

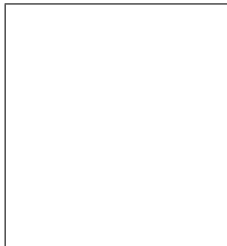
1.1. Le nozioni di base. La distanza tra due punti del piano o dello spazio è la lunghezza del segmento che li congiunge; la linea retta è la curva più breve che congiunge due punti¹. In altre parole la distanza di due punti nel piano o nello spazio è la lunghezza della curva più breve che li congiunge.

Quest'ultima formulazione, che non fa riferimento esplicito alle rette, si presta ad essere estesa ad una qualunque superficie; cioè siamo tentati di definire la distanza tra due punti di una superficie S come la lunghezza della più breve curva di S che congiunge i due punti.

Detto questo, il problema è - assegnata una superficie - di determinarne le curve più brevi e la loro lunghezza.

1.2. Definizione di arco di geodetica. Una tecnica che sembra utile per individuare queste curve è la seguente.

Vincoliamo un filo inestensibile a stare su una superficie S , obbligandolo a passare per due punti P e Q , dai quali tiriamo tendendo a ridurne la lunghezza. Un marchingegno per ottenere questo consiste in una superficie a due strati con una piccola intercapedine tra di essi, in cui porre il filo, e in due fori, in corrispondenza dei punti P e Q , attraverso i quali tirare gli estremi del filo. In Fig. 1a è rappre-



fxi.10

FIGURE 1. a - b. Apri il file per vedere il filmato

{fxi.10}

sentato un paraboloide iperbolico e un filo a cui sono collegati dei pesi, attraverso

¹Si ricordi che per definizione (cfr. Corso di geometria Cap.V §1.1) la lunghezza di una curva è maggiore della lunghezza di una qualunque spezzata ordinatamente iscritta nella curva; in particolare la lunghezza di una curva è maggiore della lunghezza del segmento che congiunge gli estremi. Dunque il fatto che il segmento sia la linea più breve che congiunge due punti, non è un teorema, ma piuttosto una tautologia.

fori della superficie. Nel filmato è visibile come il filo si muove alla ricerca di una posizione di equilibrio².

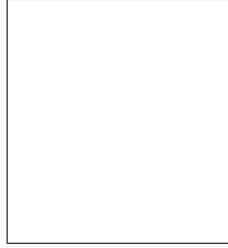
Il vincolo a stare sulla superficie determina una forza che agisce in ogni punto del filo in direzione normale alla superficie, il verso di questa forza è determinato dalla forma della superficie. Nell'esempio in figura, in assenza del vincolo, il filo si disporrebbe secondo il segmento tratteggiato in figura, ne deduciamo che in questo caso il vincolo agisce nel verso indicato dalle frecce nere - che sono dirette come la normale alla superficie. Se gli estremi fossero stati posti nei punti rossi (indicati in figura), allora il vincolo avrebbe agito nel verso opposto. Questo spiega la necessità dell'intercapedine tra i due strati: a seconda della scelta dei punti, il vincolo che agisce sul filo è uno o l'altro dei due strati. In casi particolari, se ad esempio \mathcal{S} è una sfera (vedi Fig. [1b](#)), il verso in cui agisce il vincolo (verso l'esterno della sfera) è indipendente dalla scelta dei punti P e Q , pertanto è sufficiente una sola superficie.

Supposto che il filo raggiunga una posizione di equilibrio, la proposizione seguente dice come è fatta la curva lungo cui il filo si dispone.

[xi.1](#)
[xi.1](#)

PROPOSIZIONE 1.1. *Un filo inestensibile vincolato a stare su una superficie e a passare per due punti fissati, da cui viene esercitata una trazione, se si trova in condizione di equilibrio, si dispone lungo un segmento oppure lungo una curva la cui normale \vec{N} , in ogni punto, ha la stessa direzione della normale \vec{n} alla superficie.*

Dimostrazione. Consideriamo quali forze agiscono sul filo (vedi Fig. [2a](#)). Agli estremi abbiamo applicato due forze \vec{F}_P e \vec{F}_Q . Indipendentemente dalla direzione in cui tiriamo, i fori trasmettono queste forze tangenzialmente al filo; dunque \vec{F}_P e \vec{F}_Q hanno rispettivamente la direzione delle tangenti al filo nei punti P e Q .



[fxi.11](#)

FIGURE 2. a - b

Inoltre il sistema delle due superfici esercita sul filo un vincolo. Sia $P(s)$ un punto che percorre il filo a velocità unitaria da P verso Q ; nel punto $P(s)$ agisce la forza $\vec{F}(s)$, diretta perpendicolarmente alla superficie; a seconda della forma della superficie, i vincoli agiscono da una o dall'altra parte della superficie stessa.

Ora immaginiamo di tagliare il filo in $P(s)$. Tenuto conto della forza \vec{F}_P che agisce sul tratto $P \widehat{P}(s)$ di filo restante, per mantenerlo in equilibrio nella stessa posizione devo applicare in $P(s)$ - volendo attraverso un ulteriore foro - una certa forza $\vec{\tau}(s)$ (vedi Fig. [2b](#)). Evidentemente $\vec{\tau}(s)$ avrà ancora direzione tangenziale e diretta verso Q , cioè possiede la direzione e il verso del versore tangente $\vec{T}(s)$.

²Il filmato è solo verosimile, perché non si è cercato di realizzare il moto reale del filo e l'abbassamento dei pesi non corrisponde con esattezza a quanto il filo si accorcia.

Pertanto $\vec{\tau}$ è multiplo di \vec{T} : precisamente esiste una funzione $f(s) > 0$ tale che

$$\vec{\tau}(s) = f(s)\vec{T}(s).$$

Concludiamo: l'equilibrio del filo dice che la risultante delle forze è nulla, vale a dire

$$\vec{F}_P + \int_P^Q \vec{F}(s)ds + \vec{F}_Q = 0;$$

e nel caso del filo tagliato

$$\vec{F}_P + \int_0^s \vec{F}(t)dt + \vec{\tau}(s) = 0.$$

Derivando quest'ultima equazione, otteniamo:

$$\vec{F}(s) + \frac{d\vec{\tau}}{ds}(s) = 0,$$

vale a dire

$$-\vec{F} = \frac{d(f\vec{T})}{ds} = \frac{df}{ds}\vec{T} + f(s)\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{df}{ds}\vec{T} + f(s)k(s)\vec{N}.$$

Cioè

$$\frac{df}{ds}\vec{T} = -\vec{F} - f(s)k(s)\vec{N}.$$

(Si noti che se $k(s) = 0$ il versore $\vec{N}(s)$ non è neppure definito, tuttavia interpretando $k(s)\vec{N}(s)$ come il vettore nullo, la formula continua a valere). Ma \vec{F} e \vec{N} sono entrambi perpendicolari a \vec{T} , quindi $\frac{df}{ds} = 0$; perciò

$$\vec{F} = -f(s)k(s)\vec{N}.$$

Dunque se $\vec{N}(s)$ è ben definito, allora \vec{F} ed \vec{N} hanno la stessa direzione; se $k(s) = 0$ in un intervallo la traiettoria di $P(s)$ è un segmento. \square

N.B. Si noti anche che $\vec{F} = -f(s)k(s)\vec{N}$ con $f(s) > 0$; quindi la forza \vec{F} esercitata dal vincolo ed \vec{N} hanno verso opposto, cioè i vincoli agiscono in direzione opposta alla concavità della curva (cosa che corrisponde all'intuizione).

Conviene fissare la nomenclatura.

{xi.2}

xi.2

DEFINIZIONE 1.2. Una curva \mathcal{C} , su una superfice \mathcal{S} , si chiama arco di geodetica se è una retta o una porzione di retta, oppure se, in ogni suo punto, la normale alla curva ha la stessa direzione della normale alla superfice.

xi.2.1

ESERCIZIO 1.3. Che cos'è un arco di geodetica? Come è possibile cercare di trovare un arco di geodetica che unisce due punti di una superfice?

{xi.2.1}

1.3. L'ipotesi di lavoro. Vediamo un'importantissima conseguenza della Proposizione $\frac{\text{xi.1}}{\text{I.I.}}$:

xi.3

COROLLARIO 1.4. *Sia C un'arco di curva su una superficie S che minimizza la lunghezza tra i suoi estremi (vale a dire la lunghezza di C è minore o uguale alla lunghezza di ogni curva della superficie che ha gli stessi estremi). Allora C è un arco di geodetica.*

$\{\text{xi.3}\}$

Dimostrazione. Siano P e Q gli estremi dell'arco C . Disponiamo un filo inestensibile da P a Q lungo la curva e tiriamolo agli estremi come nelle ipotesi della Proposizione $\frac{\text{xi.1}}{\text{I.I.}}$. Poiché lo tiriamo dagli estremi, l'unica possibilità che il filo ha di muoversi, sulla superficie a cui è vincolato, richiede che la lunghezza diminuisca; ma il filo, già minimizza la lunghezza, dunque è in equilibrio. Pertanto, per la Proposizione $\frac{\text{xi.1}}{\text{I.I.}}$, è disposto lungo un arco di geodetica. \square

Si potrebbe allora congetturare che gli archi di geodetica giochino, su una superficie qualsiasi, il ruolo che le rette giocano nel piano; vale a dire che gli archi di geodetica siano le curve di lunghezza minima e che ogni coppia di punti della superficie sia congiunta da una e da una sola geodetica.

Questa è una buona ipotesi di lavoro e contiene del vero, infatti vale il seguente

$\{\text{xi.13}\}$
 xi.13

TEOREMA 1.5. *Sia P un punto di una superficie S . Esiste una regione (eventualmente molto piccola) S' di S , che contiene P , tale che: per ogni coppia di punti di S' esiste un'unica arco di geodetica che li congiunge e che è contenuto in S' ; tale arco minimizza la distanza tra P e Q .*

Il Teorema afferma che la nostra ipotesi è valida in regioni piccole, tuttavia se consideriamo punti molto distanti tra loro le cose non vanno altrettanto bene. Consideriamo il seguente

$\{\text{xi.4}\}$
 xi.4

ESERCIZIO 1.6. *Mostrare con un esempio che, assegnati due punti su una superficie, non è detto che esista una curva che li congiunge la cui lunghezza sia pari alla loro distanza.*

Soluzione. Sia S il piano meno un suo punto O . Siano P e Q due punti del piano tali che O si trova sul segmento \overline{PQ} .

Il segmento \overline{PQ} ha lunghezza $\|Q - P\|$ e tutte le altre curve del piano che congiungono i due punti hanno lunghezza maggiore, ma il segmento non è contenuto in S . Sia C una curva di S che congiunge i due punti, allora

$$L(C) > \|Q - P\|.$$

La lunghezza delle spezzate $PAQ, PA'Q, PA''Q, \dots$ in Fig. $\frac{\text{xi.12}}{3}$ è evidentemente decrescente; certo trovo un punto R , abbastanza vicino ad O , in modo che la lunghezza della spezzata PRQ sia di tanto poco maggiore della distanza tra i due punti, da essere minore della lunghezza di C ; in formule

$$L(C) > L(P, R, Q) = \|Q - R\| + \|R - P\| > \|Q - P\|.$$

Perciò C non è, tra tutte le curve di S che congiungono i due punti, la più breve. Ma questo vale per ogni curva di S che congiunge i due punti, dunque - come si voleva - non esiste questa curva più breve di tutte. \square

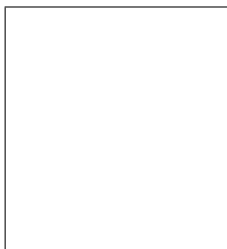


FIGURE 3

{fxi.12}

Commenti all'Esercizio 1.6 ^{xi.4} (i) Si può pensare che questo esempio sia un po' artificioso, perché in fondo basterebbe aggiungere il punto O per sistemare le cose. Ma sarebbe possibile mostrare situazioni più complesse in cui non esiste una curva di minimo che congiunge due punti e la cosa non può essere rimediata aggiungendo altri punti alla superficie.

(ii) La tecnica della Proposizione ^{xi.1} 1.1, se (e sottolineo il se) il filo raggiunge una posizione di equilibrio, fornisce un arco di geodetica. L'Esercizio ^{xi.4} 1.6 mette in luce come questa tecnica possa fallire. Se per i punti P e Q dell'Esercizio facciamo passare i capi di un filo attraverso degli anelli e poi tiriamo, il filo tende a disporsi lungo il segmento \overline{PQ} che però non è un segmento ammissibile, perché comprende il punto O che non sta sulla superficie. Dunque la curva di equilibrio non è una curva sulla superficie; vale a dire: sulla superficie non è detto che il filo raggiunga una posizione di equilibrio.

(iii) L'Esercizio ^{xi.4} 1.6 non è in contrasto con il Teorema ^{xi.13} 1.5. Per ogni punto $P \neq O$ del piano si consideri il disco di centro P e raggio $\|O - P\|$. Questo disco è una regione S' che soddisfa il Teorema.

(iv) L'Esercizio ^{xi.4} 1.6 evidenzia un difetto della definizione di distanza su una superficie che avevamo dato all'inizio. Dobbiamo riformularla con maggiore cautela, perché non è detto che tra le curve che congiungono due punti ne esista una di lunghezza minima.

{xi.5}

DEFINIZIONE 1.7. *Dati una superficie S e due suoi punti, la distanza $d_S(P, Q)$ tra i due punti (distanza relativa alla superficie S) è l'estremo inferiore³ delle lunghezze delle curve di S che congiungono i due punti.*

{xi.6}

ESERCIZIO 1.8. *Spiegare la definizione di distanza di due punti su di una superficie.*

Soluzione. Siano S una superficie e P, Q due suoi punti. Per definizione di estremo inferiore, la distanza $d_S(P, Q)$ soddisfa le seguenti condizioni⁴, che anzi la caratterizzano:

(i) Se C è un arco di curva di S che congiunge P a Q , allora

$$L(C) \geq d_S(P, Q).$$

³Ricordo che l'estremo inferiore di un insieme di numeri reali A è quel numero \hat{a} che soddisfa le seguenti condizioni: (i) per ogni $a \in A$, $\hat{a} \leq a$, (ii) \hat{a} è il più grande numero reale che soddisfa (i). Questa seconda condizione si può esprimere dicendo che se aumento di un poco \hat{a} la proprietà (i) non vale più; cioè (ii') se $M > \hat{a}$, allora esiste $a \in A$ tale che $M > a \geq \hat{a}$.

⁴Corrispondono alle condizioni (i) e (ii') della nota precedente.

(ii) Se M è un numero maggiore di $d_S(P, Q)$, allora esiste un arco di curva \mathcal{C} di \mathcal{S} , che congiunge P a Q , tale che

$$M > L(\mathcal{C}) \geq d_S(P, Q).$$

Dunque ci sono due possibilità.

(A) Esiste un arco (o anche più di uno) di curva \mathcal{C} di \mathcal{S} che congiunge P a Q e la cui lunghezza $L(\mathcal{C})$ è minore o uguale alla lunghezza di ogni qualunque altro arco di \mathcal{S} che congiunge i due punti; in tal caso $L(\mathcal{C}) = d_S(P, Q)$ e \mathcal{C} è un arco di lunghezza minima e dunque (cfr. Corollario [1.4](#)) un arco di geodetica.

(B) Non esiste un arco di lunghezza minima, ma esiste una successione \mathcal{C}_n di archi di \mathcal{S} , che congiungono P a Q , le cui lunghezze soddisfano

$$d_S(P, Q) + \frac{1}{n} > L(\mathcal{C}_n) > d_S(P, Q).$$

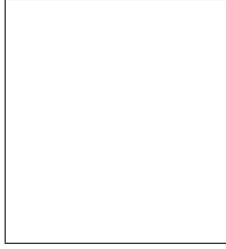
□

Un ulteriore problema è costituito dal fatto che non è detto che un arco di geodetica sia una curva di lunghezza minima.

[xi.7](#)
[xi.7](#)

ESERCIZIO 1.9. *Mostrare un esempio di arco di geodetica che non è la curva di minima lunghezza tra i suoi estremi.*

Soluzione. Si consideri la Fig. [4](#). Il segmento che congiunge i punti P e Q lungo



[fxi.14](#)

FIGURE 4

una generatrice del cilindro è certo più breve dell'arco di curva in rosso, ottenuto tirando gli estremi di un filo, vincolato a stare sulla superficie. Avremo poi occasione di stabilire chi sia questa curva rossa; qui poco importa quale sia la sua forma esatta, il fatto è che, fissati gli estremi in P e Q , se ho fatto passare il filo dall'altra parte del cilindro, non c'è speranza che si possa disporre come il segmento. □

Vediamo un altro esempio dello stesso fenomeno.

[xi.8](#)
[xi.8](#)

ESEMPIO 1.10. Si consideri la superficie \mathcal{S} in Fig. [5](#). Disposto un filo da questa parte della *montagna*, fissati gli estremi fissati in P e Q , vincoliamo il filo a restare sulla superficie e tiriamolo dagli estremi. Sembra ragionevole che il filo trovi una posizione di equilibrio e in questa posizione, per la Proposizione [1.1](#), descriverà un arco di geodetica \mathcal{C} . Allo stesso modo si costruisce l'arco di geodetica \mathcal{D} . I due archi hanno lunghezza diversa, dunque quello più lungo è un'arco di geodetica che non minimizza la lunghezza del percorso tra P e Q . □

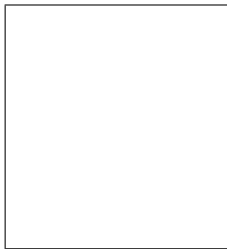


FIGURE 5

{fxi.15}

1.4. Geodetiche sulla sfera - Moto su una superficie in assenza di forze. Ora cerchiamo di capire quali sono gli archi di geodetica su una sfera. La sfera non contiene rette o segmenti, quindi gli archi di geodetica su una sfera sono curve la cui normale, in ogni punto, è diretta come la normale alla sfera, cioè verso il centro. Un piano che passa per il centro taglia sulla sfera un cerchio massimo, cioè una circonferenza di raggio uguale a quello della sfera e con lo stesso centro. In ogni punto la normale ad un cerchio massimo è dunque diretta come la normale alla sfera e pertanto i cerchi massimi sono archi di geodetica.

È naturale domandarsi se la sfera possiede altri archi di geodetica oltre ai cerchi massimi. C'è un risultato fisico che suggerisce la risposta. Vediamolo

{xi.9}

PROPOSIZIONE 1.11. *Un punto materiale, vincolato a restare su una superficie \mathcal{S} , ma non soggetto ad altre forze oltre a quelle determinate dal vincolo, è in quiete oppure si muove, a velocità scalare costante, lungo un arco di geodetica.*

{xi.9}

Dimostrazione. In assenza di forze esterne, se non fosse vincolato a muoversi sulla superficie, il punto si muoverebbe di moto rettilineo uniforme (cioè a velocità scalare costante). Sia $P(t)$ il punto mobile; in un certo istante, diciamo all'istante 0, il punto si trova in $P(0)$ con vettore velocità $\vec{V}(0)$. Se la retta, passante per $P(0)$ e con vettore direzione $\vec{V}(0)$, giace sulla superficie, allora il punto si muoverà di moto rettilineo uniforme lungo questa retta con velocità scalare costante pari a $||\vec{V}(0)||$; senza che il vincolo di stare sulla superficie abbia da esercitare nessuna azione sul punto. Se questa retta non giace sulla superficie, allora il punto descriverà una certa traiettoria sotto l'azione di un'azione del vincolo, costituito da una forza $\vec{F}(t)$ che, all'istante t , agisce in direzione normale alla superficie nel punto $P(t)$. L'accelerazione di $P(t)$ è⁵

$$\vec{A}(t) = k(t) v^2(t) \vec{N}(t) + \frac{dv}{dt} \vec{T}(t).$$

Siccome $\vec{F}(t)$ è l'unica forza che agisce, deve essere

$$\vec{F}(t) = m \vec{A}(t),$$

dove m è la massa del punto. Allora l'accelerazione è normale alla superficie e entrambi i vettori $\vec{A}(t)$ e $\vec{N}(t)$ sono perpendicolari a $\vec{T}(t)$. Ne segue che $dv/dt = 0$ (dunque la velocità scalare è costante) e \vec{A} e \vec{N} hanno la stessa direzione. Dunque la traiettoria è un arco di geodetica. \square

⁵Cfr. Corso di geometria, Cap. V, Teorema 6.2.

Si potrebbe dire che, giocando al biliardo su una superficie \mathcal{S} le palle descrivono archi di geodetica.

Per un generale principio di determinazione che vige nella fisica classica, è ragionevole pensare che due punti in moto, vincolati a restare sulla superficie, in assenza di forze esterne, che passano per uno stesso punto con la stessa direzione, descrivano la stessa traiettoria. Naturalmente esiste una dimostrazione formale di questo fatto, ma possiamo accontentarci di questa indicazione intuitiva. (Possiamo parafrasare, rifacendoci all'immagine del biliardo, che quando tirando due volte una palla, dallo stesso punto, nella stessa direzione e con la stessa velocità, il percorso sarà il medesimo). Questo significa che

$\{\text{xi.10}\}$
 $\boxed{\text{xi.10}}$

COROLLARIO 1.12. *Assegnati un punto P , di una superficie \mathcal{S} , ed un vettore \vec{v} , tangente ad \mathcal{S} in P , esiste un unico arco di geodetica che passa per P con tangente diretta come \vec{v} .*

Assegnato un punto P di una sfera, i cerchi massimi che passano per P sono le sezioni della sfera con i piani che passano per P e per il centro e ciascuno di essi individua una diversa direzione tangente alla sfera in P . Detto in altri termini le sezioni normali in P sono tante quante le direzioni tangenti in P . Per il Corollario 1.12 questi cerchi massimi sono gli unici archi di geodetica che passano per P .

Resta il problema di capire se questi archi di geodetica minimizzano o meno la lunghezza del percorso sulla sfera. Intanto se P e Q sono due punti antipodali, i piani del fascio che ha per asse la retta PQ tagliano sulla sfera cerchi massimi. Ciascuno di essi è suddiviso da P e Q in due semicirconferenze di lunghezza $\pi \times \text{raggio}$ e dunque gli archi di geodetica che congiungono P e Q sono infiniti e tutti della medesima lunghezza; il problema è di capire se questa lunghezza è pari alla distanza. Se invece P e Q non sono antipodali, esiste un unico piano che passa per P, Q e per il centro della sfera. Questo piano taglia sulla sfera un cerchio massimo che P e Q suddividono in due archi di lunghezza diversa; il problema è di capire se la lunghezza di quello minore è pari alla distanza tra P e Q .

A parte argomenti ad hoc che si possono trovare sfruttando la particolarità della sfera, esiste un argomento generale. Consideriamo un punto materiale, vincolato a stare sulla superficie \mathcal{S} , ma non sottoposto ad altre forze oltre a quelle determinate dal vincolo; questo punto si muove a velocità scalare costante lungo un'arco di geodetica; immaginiamo che il suo moto si prolunghi quanto possibile nel passato e nel futuro. Se l'arco di geodetica è una retta il moto è eterno sia nel passato che nel futuro, lo stesso accade se l'arco di geodetica è un cerchio massimo (ovviamente il punto continua a ripetere lo stesso percorso infinite volte). Nel piano privato di un punto O le cose non vanno così; se il punto descrive una semiretta uscente da O il moto avrà un inizio (se si allontana da O) oppure una fine (se si muove verso O), infatti a velocità costante non è possibile invertire il verso di percorrenza e il punto materiale non può passare attraverso O . Sulla sfera privata di un punto O gli archi di geodetica, oltre ai cerchi massimi che non passano per O , sono costituiti dai cerchi massimi che passano per O , privati ovviamente del punto O . Questi ultimi sono percorsi in un intervallo di tempo limitato, perchè il punto parte da O e ritorna ad O in tempo finito e, come sopra osservato, non può invertire il senso di marcia.

In generale diamo la seguente

{xi.11}
xi.11

DEFINIZIONE 1.13. *Un arco di geodetica si dice geodetica se non può essere proseguito oltre i suoi estremi. Ad es. un cerchio massimo è privo di estremi quindi è un arco di geodetica, l'arco di geodetica che congiunge due punti della sfera non è un arco di geodetica, perché può essere prolungato ad un cerchio massimo. La semiretta uscente da O , nel caso dell'esempio precedente, è una geodetica, perché attraverso O non posso passare. Diremo che una superficie S è completa se tutte le sue geodetiche possono essere percorse a velocità costante nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$; cioè se tutti i punti materiali, vincolati a stare sulla superficie, ma non soggetti ad ulteriore forze, se non sono in quiete si muovono in eterno (sia nel passato che nel futuro).*

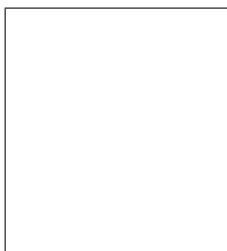
Con questa definizione il piano e la sfera sono superfici complete, il piano o la sfera meno un punto non sono complete. Sussiste questo (difficile)

xi.12

TEOREMA 1.14. *Se S è una superficie completa, allora - comunque scelti due suoi punti - esiste sempre almeno un arco di geodetica che li congiunge e che minimizza la distanza.*

{xi.12}

Questo risultato permette di concludere l'analisi delle geodetiche sulla sfera. Dati due punti P e Q esiste sempre un arco di cerchio massimo che li congiunge; anzi ne esistono infiniti e tutti della stessa lunghezza se i punti sono antipodali, ne esistono due, di lunghezza diversa se i punti non sono antipodali. Per il Teorema 1.14 uno almeno di questi archi minimizza la distanza. Dunque se i punti P e Q sono antipodali la loro distanza è πR , se invece non sono antipodali, detta θ la misura in radianti dell'angolo che i raggi per P e Q formano al centro della sfera, la loro distanza è θR (cfr. Fig. 6).



fxi.16

FIGURE 6

{fxi.16}

xi.13.1

ESERCIZIO 1.15. *Descrivere le geodetiche di una sfera e la distanza sulla sfera di due punti.*

{xi.13.1}

Soluzione. Sia S una sfera di centro C e raggio R .

Le geodetiche di S sono i cerchi massimi, cioè le circonferenze tagliate sulla sfera da piani che passano per C . La normale a queste circonferenze è, in ogni punto, diretta verso il centro della sfera, esattamente come la normale alla superficie; pertanto i cerchi massimi sono effettivamente archi di geodetica. Fissato un punto P della sfera ed una qualunque direzione t tangente alla sfera in P , il piano, passante per t e per il centro della sfera, taglia sulla sfera un cerchio massimo tangente a t

in P . Ma per P , passa un unico arco di geodetica con tangente t , quindi i cerchi massimi sono le uniche geodetiche.

Se i punti P e Q sono antipodali esistono infiniti archi di geodetica che li congiungono, così come sono infiniti i meridiani che congiungono i poli nord e sud. Se P e Q non sono antipodali esiste un unico piano che passa per P , Q e C , dunque esiste un unico cerchio massimo che passa per P e Q . Tale cerchio massimo è suddiviso, da P e Q , in due archi di geodetica di lunghezza diversa.

La sfera \mathcal{S} è una superficie completa, vale a dire le geodetiche possono essere percorse in eterno, sia nel passato che nel futuro, a velocità costante (ovviamente in tempo infinito il medesimo cerchio massimo sarà percorso infinite volte). Pertanto, dati due punti, P e Q , di \mathcal{S} , per essi passa almeno una geodetica la cui lunghezza è pari alla distanza $d_{\mathcal{S}}(P, Q)$ tra P e Q . In conclusione: (i) se P e Q sono antipodali la loro distanza $d_{\mathcal{S}}(P, Q)$ è la lunghezza di un meridiano (pari a $R\pi$). (ii) Se P e Q non sono antipodali la loro distanza è pari alla lunghezza del più breve dei due archi di geodetica che li congiungono. Detti C il centro della sfera e θ la misura in radianti dell'angolo $P\hat{C}Q$, la lunghezza di tale arco è $R\theta$. \square

2. Isometrie

{xi.14}
xi.14

DEFINIZIONE 2.1. Un'isometria tra due superfici \mathcal{S} e \mathcal{S}' è una corrispondenza biunivoca $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ che conserva la distanza, vale a dire: comunque presi due punti P, Q di \mathcal{S} , per i corrispondenti punti P', Q' di \mathcal{S}' , vale

$$d'_{\mathcal{S}'}(P', Q') = d_{\mathcal{S}}(P, Q).$$

Osserviamo che la proprietà che F sia biunivoca è, praticamente, una conseguenza del fatto che F conserva la distanza. Vediamo il perché. Sia $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ è un'applicazione tra due superfici che conserva la distanza, allora F è iniettiva. Infatti presi P, Q due punti distinti di \mathcal{S} , allora $d_{\mathcal{S}}(P, Q) > 0$; siano P', Q' i corrispondenti punti su \mathcal{T} ; riesce $d_{\mathcal{T}}(P', Q') = d_{\mathcal{S}}(P, Q)$; pertanto anche $d_{\mathcal{T}}(P', Q') > 0$ e dunque $P' \neq Q'$. Tuttavia può ben essere che la superficie \mathcal{T} contenga punti che non corrispondono a nessun punto di F , vale a dire $F(\mathcal{S})$ è un sottoinsieme di \mathcal{T} che può essere diverso da tutto \mathcal{T} . Ma niente vieta di considerare la superficie $\mathcal{S}' := F(\mathcal{S})$ e così otteniamo che la corrispondenza $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ è biunivoca.

N.B. Un'isometria, essendo biunivoca, è invertibile. La sua inversa è ovviamente ancora un'isometria.

Vediamo un primo esempio di isometria tra superfici, o meglio una classe di infiniti esempi.

{xi.15}
xi.15

ESERCIZIO 2.2. Sia \mathcal{S} una superficie realizzata in materiale plastico duttile, ma non estensibile; deformiamo la superficie \mathcal{S} fino ad ottenere una superficie \mathcal{S}' . Mostrare che la deformazione stabilisce un'isometria $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$.

Soluzione. *Premessa.* Il materiale utilizzato non è estensibile, dunque la lunghezza delle curve tracciate sulla superficie \mathcal{S} non subisce alterazioni nella deformazione. Sembrerebbe allora immediato che F sia un'isometria. Invece le cose sono meno ovvie di quello che sembra e conviene esplicitare l'argomento.

Abbiamo detto: se \mathcal{C} è una curva su \mathcal{S} e $\mathcal{C}' = F(\mathcal{C})$ è la corrispondente curva su \mathcal{S}' , allora

$$L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{C}').$$

Siano P e Q due punti di \mathcal{S} e sia \mathcal{C} un arco di geodetica che li congiunge e che minimizza la distanza; allora

$$L(\mathcal{C}) = d_{\mathcal{S}}(P, Q).$$

Siano P', Q' i punti corrispondenti su \mathcal{S}' ; essi sono gli estremi del corrispondente arco \mathcal{C}' . Ne segue

$$d_{\mathcal{S}'}(P', Q') \leq L(\mathcal{C}') = L(\mathcal{C}) = d_{\mathcal{S}}(P, Q).$$

Ma, con lo stesso argomento, preso un'arco di geodetica in \mathcal{S}' che congiunge P' a Q' e che minimizza la distanza, otteniamo,

$$d_{\mathcal{S}'}(P', Q') \geq d_{\mathcal{S}}(P, Q),$$

e quindi

$$d_{\mathcal{S}'}(P', Q') = d_{\mathcal{S}}(P, Q).$$

Purtroppo l'argomento esposto non è conclusivo, perché non è detto che due punti qualsiasi siano congiunti da un arco di geodetica che minimizza la distanza (questo è vero nelle superfici complete, cfr. [Proposizione I.14](#), oppure se i due punti sono molto vicini, cfr. [Proposizione I.5](#)). Bisogna ragionare altrimenti.

La soluzione corretta. Siano P, Q due punti di \mathcal{S} . Poiché è possibile scambiare i ruoli di \mathcal{S} ed \mathcal{S}' , è sufficiente provare

$$d_{\mathcal{S}'}(P', Q') \leq d_{\mathcal{S}}(P, Q).$$

Comunque fissato $M > d_{\mathcal{S}}(P, Q)$ esiste (cfr. [Esercizio I.8\(ii\)](#)) un'arco di curva \mathcal{C} di \mathcal{S} che congiunge i due punti e soddisfa

$$M > L(\mathcal{C}) \geq d_{\mathcal{S}}(P, Q).$$

Allora, con le stesse notazioni precedenti,

$$M > L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{C}') \geq d_{\mathcal{S}'}(P', Q').$$

Posto $A := d_{\mathcal{S}}(P, Q)$ e $B := d_{\mathcal{S}'}(P', Q')$ abbiamo provato che: se M è un numero maggiore di A , allora M è un numero maggiore di B ; questo impedisce che possa essere $B > A$, infatti in tal caso, ogni numero M compreso tra A e B contraddirebbe l'affermazione appena fatta. Dunque $B \leq A$. \square

L'Esercizio [2.2](#) non solo mostra che quell'esempio concreto è un'isometria tra superfici, ma, riformulato in termini matematici, prova che

xi.16

PROPOSIZIONE 2.3. Una corrispondenza biunivoca $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ tra due superfici che conserva la lunghezza delle curve è un'isometria. {xi.16}

xi.16.1

ESERCIZIO 2.4. Dimostrare la [Proposizione xi.16](#) [2.3](#). {xi.16.1}

Soluzione. In sostanza si tratta di riscrivere la soluzione dell'Esercizio [xi.15](#) [2.2](#). \square

Sia G un'isometria dello spazio; come sappiamo G si ottiene componendo moti rigidi e riflessioni. Tutto sommato è piuttosto ovvio che G conservi la lunghezza delle curve e non mi pare valga la pena di esporne una dimostrazione rigorosa. Da questo e dalla [Proposizione xi.16](#) [2.3](#) segue il

{xi.17}

COROLLARIO 2.5. Sia G un'isometria dello spazio e sia \mathcal{S} una superficie. La restrizione di G ad \mathcal{S} determina un'isometria $G|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ tra \mathcal{S} e la superficie $\mathcal{S}' := G(\mathcal{S})$.

Dimostrazione. G è biunivoca, quindi iniettiva. La restrizione al sottoinsieme \mathcal{S} di G resta iniettiva. Prendendo come codominio esattamente l'immagine $G(\mathcal{S})$ la restrizione $G|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ è suriettiva e dunque biunivoca. Ma G conserva la lunghezza delle curve, dunque, per la Proposizione 2.3 è un'isometria tra le due superfici. \square

Dalle considerazioni precedenti sorgono alcune domande. (i) Data un'isometria $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ tra due superfici, essa è la restrizione di un'isometria dello spazio? Cioè esiste un'isometria G dello spazio di cui F sia la restrizione? (ii) Data un'isometria $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ tra due superfici essa si può pensare come una deformazione, cioè esiste una famiglia continua di superfici \mathcal{S}_t , $0 \leq t \leq 1$ con $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$ e $\mathcal{S}' = \mathcal{S}_1$? (iii) Vale il viceversa della Proposizione 2.3, vale a dire un'isometria tra due superfici conserva la lunghezza delle curve?

La risposta alla prima questione è negativa, prendiamo un foglio di carta (materiale evidentemente inestensibile) e incurviamolo leggermente. Per l'Esercizio 2.2 si tratta di un'isometria, che ovviamente non è definita da un'isometria dello spazio, perché quest'ultime (composte di moti rigidi e riflessioni) mandano un piano in un piano e quindi il foglio deve restare piano.

Anche la risposta alla seconda domanda è negativa, lo vedremo più avanti. Infine la risposta alla terza domanda è positiva, ma richiede un po' di lavoro.

3. Applicazioni tra i piani tangenti

Supponiamo che la superficie \mathcal{S} sia definita da un'applicazione $X(u, v)$ dove (u, v) varia in un aperto Ω del piano. Fissato (u_0, v_0) in Ω , per questo punto passano due rette parallele agli assi (vedi Fig. 7); a cui corrispondono due curve sulla

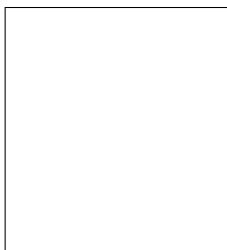


FIGURE 7

{fxi.17.1}

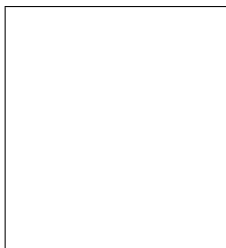
superficie, passanti per il punto $X(u_0, v_0)$. Come abbiamo visto (cfr. Proposizione 10.31) i vettori tangenti a queste due curve, nel punto $X(u_0, v_0)$ sono

$$\frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) \text{ e } \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Più in generale sia assegnata una traiettoria $(u(t), v(t))$ che passa, all'istante t_0 , per il punto (u_0, v_0) , con vettore velocità

$$(\dot{u}(t_0), \dot{v}(t_0))$$

(come illustrato in Fig. ^{fxi.17.2}8 queste sono le componenti del vettore verde a sinistra,



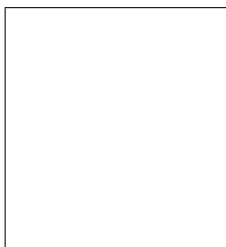
{fxi.17.2}

FIGURE 8

tangente alla traiettoria). A questa curva in Ω corrisponde una curva sulla superficie \mathcal{S} : la traiettoria $X(u(t), v(t))$ (in figura la curva verde a destra); il cui vettore velocità è, per la regola derivazione della composta:

{exi.3} (3.1) {exi.3} $\frac{d}{dt} X(u(t), v(t)) = \frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) \dot{u}(t_0) + \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0) \dot{v}(t_0).$

È opportuno soffermarsi sul significato di questa formula. Si consideri la Fig. ^{fxi.20}9. Le traiettorie rossa e blu di sinistra nel punto (u_0, v_0) hanno la medesima tangente



{fxi.20}

FIGURE 9

{fxi.20}

e possiamo percorrerle in modo che abbiano lo stesso vettore velocità \vec{w} . Le due traiettorie sono simmetriche e possiamo pensare che anche i moti che le percorrono siano simmetrici. Dunque le loro immagini in \mathcal{S} vengono percorse nello stesso tempo; ma esse sono piuttosto diverse tra loro e sembrerebbe ragionevole ritenere che in $P_0 = X(u_0, v_0)$ la velocità della traiettoria blu sia maggiore di quella della traiettoria rossa, perché la traiettoria blu appare più lunga. Contrariamente a questa intuizione la formula afferma che il vettore velocità \vec{w}' in P_0 dipende solo dai vettori $\frac{\partial X}{\partial u}$ e $\frac{\partial X}{\partial v}$ e dalle componenti $\dot{u}(t_0), \dot{v}(t_0)$ di \vec{w} ; dunque il vettore velocità è lo stesso per le due traiettorie!

Questa osservazione permette di dare la seguente

{xi.17.1}

DEFINIZIONE 3.1. Data l'applicazione $\Omega \xrightarrow{X} \mathcal{S}$, per ogni punto (u_0, v_0) di Ω è definita un'applicazione X_* che associa, ad ogni vettore \vec{w} applicato in (u_0, v_0) , un vettore $X_*(\vec{w})$ tangente ad \mathcal{S} in $X(u_0, v_0)$.

Il vettore $X_*(\vec{w})$ è così definito: presa una traiettoria in Ω che passa per (u_0, v_0) con velocità \vec{w} , $X_*(\vec{w})$ è la velocità della corrispondente traiettoria su \mathcal{S} nel punto $X(u_0, v_0)$.

{xi.17.1}

Insisto, a priori si potrebbe pensare che l'applicazione X_* non sia ben definita, vale a dire che $X_*(\vec{w})$ dipenda dalla traiettoria in Ω che abbiamo scelto. Ma la formula precedente dice che così non è: se $\vec{w} = (a, b)$, allora

$$X_*(\vec{w}) = a \frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) + b \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Possiamo estendere questa definizione al caso di un'applicazione tra due superfici.

{xi.19}
xi.19

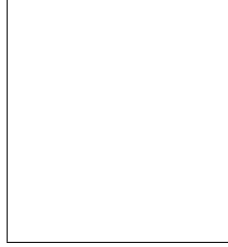
DEFINIZIONE 3.2. Sia $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ un'applicazione tra due superfici. Preso un punto P_0 su \mathcal{S} , a questo corrisponde un punto $P'_0 = F(P_0)$ su \mathcal{S}' .

Definiamo un'applicazione

$$F_* : \tau_{P_0} \rightarrow \tau_{P'_0}$$

tra i piani $\tau_{P_0}, \tau_{P'_0}$ tangenti (rispettivamente ad \mathcal{S} e a \mathcal{S}') nei punti P_0 e P'_0 . Se \vec{v}_0 è un vettore tangente ad \mathcal{S} in P_0 , indicheremo con $F_*(\vec{v}_0)$ il corrispondente vettore tangente ad \mathcal{S}' in P'_0 .

In Fig. 10 sono rappresentate le due superfici, i punti P_0 e P'_0 , i piani tangenti in



{fxi.18}

FIGURE 10. a - b

questi due punti e un vettore \vec{v}_0 e il suo corrispondente $F_*(\vec{v}_0)$.

Il vettore $F_*(\vec{v}_0)$ è definito come segue:

presa una traiettoria \mathcal{C} , su \mathcal{S} , che passa per P_0 con velocità \vec{v}_0 , $F_*(\vec{v}_0)$ è il vettore velocità della corrispondente traiettoria su \mathcal{S}' , nel corrispondente punto P'_0 .

In Fig. 10 sono anche rappresentate le due traiettorie \mathcal{C} e \mathcal{C}' .

Anche qui si presenta la necessità di verificare che il vettore $F_*(\vec{v}_0)$ non dipenda dalla scelta della traiettoria in \mathcal{S} . L'argomento è il seguente. Descriviamo \mathcal{S} mediante un'applicazione $\Omega \xrightarrow{X} \mathcal{S}$. Allora componendo otteniamo un'applicazione $\Omega \xrightarrow{Y} \mathcal{S}'$ dove $Y := F \circ X$; in altri termini il diagramma

exi.d

(3.2)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{F} & \mathcal{S}' \\ \nwarrow X & & \nearrow Y \\ & \Omega & \end{array}$$

è commutativo. Si trova un vettore \vec{w}_0 tale che $X_*(w_0) = v_0$, allora dalle definizioni segue subito

$$F_*(v_0) = F_*(X_*(w_0)) = Y_*(w_0).$$

{xi.19.1}
xi.19.1

OSSERVAZIONE 3.3. Se l'applicazione $\mathcal{S} \xrightarrow{F} \mathcal{S}'$ è biunivoca, esiste la sua inversa $\mathcal{S}' \xrightarrow{F^{-1}} \mathcal{S}$ e risulta: se \vec{v} è un vettore tangente ad \mathcal{S} , allora

$$F_*^{-1}(F_*(\vec{v})) = \vec{v}.$$

Dimostrazione. Sia P il punto di \mathcal{S} in cui \vec{v} è tangente. Sia \mathcal{C} una traiettoria che passa per P all'istante 0 con velocità \vec{v} ; allora $F_*(\vec{v})$ è il vettore velocità di $F(\mathcal{C})$ all'istante 0. Infine $F_*^{-1}(F_*(\vec{v}))$ è il vettore velocità di $F^{-1}(F(\mathcal{C}))$ all'istante 0. Ma $F^{-1}(F(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$, quindi $F_*^{-1}(F_*(\vec{v})) = \vec{v}$. \square

4. Alcune caratterizzazioni delle isometrie.

Possiamo passare alla dimostrazione del seguente

xi.20

{xi.20}

TEOREMA 4.1. Sia $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ un'applicazione biunivoca tra due superfici. le seguenti proprietà sono equivalenti:

(i) F è un'isometria.

(ii) F conserva la lunghezza delle curve, cioè se \mathcal{C} è una curva di \mathcal{S} e \mathcal{C}' è la corrispondente curva su \mathcal{S}' , allora

$$L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{C}').$$

(iii) F conserva la lunghezza dei vettori tangenti, cioè se \vec{v} è un vettore tangente ad \mathcal{S} in P , allora

$$\|\vec{v}\| = \|F_*(\vec{v})\|.$$

Dimostrazione. La Proposizione xi.16 2.3 afferma che (ii) \Rightarrow (i).

Proviamo (iii) \Rightarrow (ii). Supponiamo che (iii) sia vera. Sia \mathcal{C} una curva di \mathcal{S} descritta dal moto di un punto $P(t)$ nell'intervallo temporale (t_0, t_1) . Allora

$$L(\mathcal{C}) = \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{dP}{dt}(t) \right\| dt.$$

Da (iii), segue

$$\left\| \frac{dP}{dt}(t) \right\| = \|F_*\left(\frac{dP}{dt}(t)\right)\|.$$

Per definizione di F_* , il vettore $F_*\left(\frac{dP}{dt}(t)\right)$ è la velocità di $P'(t) = F(P(t))$, quindi

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{dP}{dt}(t) \right\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{dP'}{dt}(t) \right\| dt = L(\mathcal{C}').$$

Infine **proviamo (i) \Rightarrow (iii)** e così chiudiamo il giro. Supponiamo che F sia un'isometria.

Sia \vec{v}_0 un vettore tangente ad \mathcal{S} nel punto P_0 , dobbiamo provare

$$\|\vec{v}_0\| = \|F_*(\vec{v}_0)\|.$$

A questo scopo è sufficiente stabilire

$$\|\vec{v}_0\| \leq \|F_*(\vec{v}_0)\|.$$

Infatti, poiché anche F^{-1} è un'isometria, allora, per ogni vettore \vec{w} , tangente ad \mathcal{S}' ,

$$\|\vec{w}\| \leq \|F_*^{-1}(\vec{w})\|.$$

In particolare, prendendo $\vec{w} = F_*(\vec{v}_0)$, otteniamo

$$\|F_*(\vec{v}_0)\| \leq \|F_*^{-1}(F_*(\vec{v}_0))\| = \|\vec{v}_0\|.$$

Sia $P(t)$ il moto di un punto che descrive un arco di geodetica, che all'istante 0 passa per P_0 con vettore tangente \vec{v}_0 . Un tale moto esiste perché, per il Corollario xi.16 1.12 per P_0 passa un arco di geodetica con tangente diretta come \vec{v}_0 ; pertanto percorrendo l'arco a velocità opportuna possiamo ottenere che all'istante 0 passi per P_0 con la velocità voluta.

Per il Teorema xi.13 vicino a P_0 esiste una piccola regione in cui per ogni coppia di punti passa un'unica geodetica contenuta nella regione e tale geodetica minimizza la lunghezza. Dunque se il valore assoluto di t è piccolo, $P(t)$ è in questa regione. Ne segue che se i valori assoluti di t ed h sono piccoli l'arco $C_{t,t+h} = P(t), P(t+h)$ è contenuto nella regione; pertanto

$$\int_t^{t+h} \left\| \frac{dP}{du} \right\| du = L(C_{t,t+h}) = d_S(P(t), P(t+h)).$$

Ma F è un'isometria, dunque

$$d_S(P(t), P(t+h)) = d_{S'}(P'(t), P'(t+h)).$$

Infine, se consideriamo il corrispondente arco $C'_{t,t+h}$ descritto da $P'(s) = F(P(s))$,

$$d_{S'}(P'(t), P'(t+h)) \leq L(C'_{t,t+h}) = \int_t^{t+h} \left\| \frac{dP'}{du} \right\| du.$$

Dunque

$$\int_t^{t+h} \left\| \frac{dP}{du} \right\| du \leq \int_t^{t+h} \left\| \frac{dP'}{du} \right\| du$$

Allora

$$f(t) = \int_0^t \left\| \frac{dP'}{du} \right\| du - \int_0^t \left\| \frac{dP}{du} \right\| du$$

è una funzione non decrescente, infatti

$$\begin{aligned} f(t+h) - f(t) &= \int_0^{t+h} \left\| \frac{dP'}{du} \right\| du - \int_0^t \left\| \frac{dP'}{du} \right\| du - \int_0^{t+h} \left\| \frac{dP}{du} \right\| du + \int_0^t \left\| \frac{dP}{du} \right\| du = \\ &= \int_t^{t+h} \left\| \frac{dP'}{du} \right\| du - \int_t^{t+h} \left\| \frac{dP}{du} \right\| du \geq 0. \end{aligned}$$

Dunque la sua derivata è non negativa, vale a dire

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{df}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \left\| \frac{dP'}{du} \right\| du - \int_0^t \left\| \frac{dP}{du} \right\| du \right) = \\ &= \left\| \frac{dP'}{dt}(t) \right\| - \left\| \frac{dP}{dt}(t) \right\|. \end{aligned}$$

In particolare $\frac{dP}{dt}(0) = \vec{v}_0$ e $\frac{dP'}{dt}(0) = F_*(\vec{v}_0)$, quindi

$$0 \leq \|F_*(\vec{v}_0)\| - \|\vec{v}_0\|.$$

□

5. Le funzioni E, F, G, l, m, n e il teorema fondamentale delle superfici

Sia $\Omega \xrightarrow{X} \mathcal{S}$ un'applicazione che definisce la superficie \mathcal{S} .

xi.18
xi.18

OSSERVAZIONE 5.1. *Sappiamo che, se il prodotto vettoriale*

$$\frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0) \neq 0,$$

il punto $P = X(u_0, v_0)$ possiede piano tangente. In tal caso il prodotto vettoriale è perpendicolare ad entrambi i fattori, cioè possiede la direzione della retta normale alla superficie in $P = X(u_0, v_0)$. Pertanto (ho diviso per la lunghezza)

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} \right\|}$$

è un versore normale alla superficie in P . Poiché evidentemente \vec{n} dipende con continuità da (u, v) , questo prova che se $X(u, v)$ è iniettiva, la regione di \mathcal{S} che essa ricopre è orientabile.

5.1. Le funzioni E, F, G, l, m, n . Definiamo le quantità⁶ (che dipendono dal punto sulla superficie)

$$E := \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \right\|^2, \quad F := \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v}, \quad G := \left\| \frac{\partial X}{\partial v} \right\|^2.$$

Inoltre definiamo:

$$l := \vec{n} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}, \quad m := \vec{n} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \quad n := \vec{n} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}.$$

Tutte queste formule sono probabilmente faticose per il lettore. Cerchiamo di riassumerne il senso:

Data un'applicazione $X(u, v)$, definita in una certa regione Ω del piano, che definisce una certa superficie \mathcal{S} , sono definite sei funzioni $E(u, v), F(u, v), G(u, v), l(u, v), m(u, v), n(u, v)$. Queste funzioni si possono esplicitamente calcolare mediante le formule precedenti. In particolare le prime tre funzioni dipendono dalla lunghezza dei vettori tangenti alle curve $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ e dal loro prodotto scalare.

Mentre curvatura e torsione di una curva, dipendono dal punto sulla curva e non dal moto con cui possiamo descriverla, le funzioni E, F, G, l, m, n non hanno questa stessa proprietà. Infatti queste sei funzioni dipendono non solo dal punto sulla superficie, ma anche dall'applicazione $X(u, v)$ prescelta. Per provarlo è sufficiente esibire un esempio in cui questo si verifica.

xi.0.1

ESERCIZIO 5.2. *Mostrare che le funzioni $E(u, v), F(u, v), G(u, v), l(u, v), m(u, v), n(u, v)$ dipendono non solo dal punto sulla superficie \mathcal{S} , come è ovvio, ma anche dalla scelta dell'applicazione $X(u, v)$ che definisce \mathcal{S} .*

{xi.0.1}

Soluzione. Come abbiamo visto in §XI.6.1, possiamo descrivere una sfera mediante un'applicazione

$$X : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

fatta in modo tale che le rette $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ corrispondano rispettivamente a paralleli e meridiani. Pertanto $G = \left\| \frac{\partial X}{\partial v} \right\|^2$ è il quadrato della velocità con cui si percorre un parallelo e $E = \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \right\|^2$ è il quadrato della velocità con cui si percorre un meridiano.

Ora i meridiani hanno tutti la stessa lunghezza e quindi è possibile che nell'intervallo $[0, 1]$ i meridiani vengano percorsi a velocità costante, nel qual caso E sarebbe costante in tutti i punti. Viceversa la lunghezza dei paralleli varia e quindi non possono essere percorsi, nel medesimo intervallo di tempo, a velocità costante ed uguale per tutti i paralleli; pertanto G non può essere costante.

Se immaginiamo di scambiare tra loro le coordinate u e v sul foglio $[0, 1] \times [0, 1]$, la superficie non subisce nessuna alterazione e resta sempre una sfera, mentre le funzioni E e G si scambiano. \square

⁶Anche qui avrei dovuto scrivere $E(u_0, v_0) = \left\| \frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) \right\|^2$ ecc. Il prodotto indicato con un punto è il prodotto scalare

5.2. Il teorema fondamentale delle superfici. Ricordo che curvatura e torsione definiscono completamente una curva nello spazio. Ciò significa che

{xi.0}

xi.0

TEOREMA 5.3. (1) *Data una curva \mathcal{C} , in ogni suo punto sono definite la curvatura e la torsione⁷.*

(2) *Assegnate due funzioni $k = k(t) > 0$ e $\tau = \tau(t)$ definite per t in un certo intervallo I , esiste una curva \mathcal{C} , descritta dal moto di un punto $P(t)$, tale che la sua curvatura e torsione nel punto $P(t)$ siano proprio $k(t)$ e $\tau(t)$. Tale curva è unica salvo ovviamente la possibilità di trasportarla rigidamente nello spazio.*

Per le superfici vale un risultato parzialmente analogo, che ora enunciamo in forma approssimativa.

{xi.1*}
xi.1*

TEOREMA 5.4. *Assegnate sei funzioni $E^*, F^*, G^*, l^*, m^*, n^*$ definite in una certa regione del piano Ω , allora esiste una superficie \mathcal{S} , descritta da un'applicazione $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, tale che*

$$E(u, v) = E^*(u, v), \quad F(u, v) = F^*(u, v), \dots, n(u, v) = n^*(u, v).$$

Inoltre tale superficie \mathcal{S} è unica a meno di trasportarla rigidamente nello spazio.

N.B. L'enunciato è impreciso, perché abbiamo ommesso di specificare che le sei funzioni $E^*, F^*, G^*, l^*, m^*, n^*$ devono soddisfare certe condizioni di compatibilità che le legano tra loro. Inoltre non è certo che la funzione $X(u, v)$ possa essere definita in tutto Ω , quello che si sa è che preso un punto (u_0, v_0) di Ω si può definire la funzione X vicino a (u_0, v_0) .

Concludiamo cercando di distillare il senso di questo teorema. Il teorema innanzi tutto fornisce una visione teoretica dell'insieme di tutte le possibili superfici: assegnare sei funzioni, che soddisfano certe condizioni di compatibilità, significa assegnare una superficie, esattamente come assegnare curvatura e torsione significa assegnare una curva.

Nel caso delle curve possiamo dire che, considerando uguali due curve che si possono ottenere una dall'altra mediante un moto rigido, l'insieme di tutte le possibili curve è in corrispondenza biunivoca con l'insieme di tutte le possibili coppie di funzioni k, τ (con $k > 0$).

Nel caso delle superfici, sia \mathcal{A} l'insieme di tutti i possibili sestetti di funzioni (che soddisfano certe condizioni di compatibilità) e sia \mathcal{B} l'insieme di tutte le possibili superfici, considerando uguali due superfici che si possono ottenere una dall'altra mediante un moto rigido. Il teorema dice che esiste una corrispondenza $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Questa corrispondenza è suriettiva perché per ogni superficie posso definire, scelta un'applicazione $X(u, v)$ le sei funzioni; dunque in questo modo trovo tutte le superfici. Purtroppo la corrispondenza non è iniettiva, vale a dire sestetti diversi di funzioni possono dare la stessa superficie (questo per quanto osservato nell'Esercizio xi.0.1 5.2).

{xi.21}

xi.21

Esponiamo un ultimo criterio utile in pratica

PROPOSIZIONE 5.5. *Sia $\mathcal{S} \xrightarrow{F} \mathcal{S}'$ un'applicazione biunivoca tra due superfici. Supponiamo che la superficie \mathcal{S} sia definita dall'applicazione*

$$\Omega \xrightarrow{X} \mathcal{S}.$$

⁷In verità nei punti della curva in cui la curvatura si annulla la torsione non è definita

Sia

$$\Omega \xrightarrow{Y} \mathcal{S}'$$

la composta, cioè $Y := F \circ X$, vale a dire il diagramma

$$\boxed{\mathbf{d}} \quad (5.1) \quad \{\mathbf{d}\} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{F} & \mathcal{S}' \\ \nwarrow_X & & \nearrow_Y \\ & \Omega & \end{array}$$

è commutativo.

Restano allora definite le funzioni $E(u, v), F(u, v), G(u, v)$, mediante l'applicazione X e $E'(u, v), F'(u, v), G'(u, v)$, mediante l'applicazione Y .

Allora F è un'isometria se e solo se

$$E = E', F = F', G = G'.$$

Dimostrazione. Facciamo alcune semplici osservazioni. Per il Teorema ^{xi.20}_{4.1}

(1) F è un'isometria se e solo se F_* conserva la lunghezza dei vettori tangenti.

Osserviamo che

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v},$$

e quindi

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

Dunque il prodotto scalare si può esprimere in termini della lunghezza dei vettori. Pertanto

(2) se l'applicazione F_* conserva la lunghezza dei vettori, conserva anche i loro prodotti scalari.

Osserviamo anche che

$$\|a \vec{u} + b \vec{v}\|^2 = a^2 \|\vec{u}\|^2 + b^2 \|\vec{v}\|^2 + 2ab \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Quindi

(3) F_* conserva la lunghezza di \vec{u}, \vec{v} e il loro prodotto scalare se e solo se conserva la lunghezza di tutti i vettori del piano individuato da \vec{u} e \vec{v} .

Inoltre $\frac{\partial X}{\partial u}(u, v)$ e $\frac{\partial X}{\partial v}(u, v)$ sono una base del piano tangente in $P = X(u, v)$ e

$$F_*\left(\frac{\partial X}{\partial u}(u, v)\right) = \frac{\partial Y}{\partial u}(u, v)$$

e

$$F_*\left(\frac{\partial X}{\partial v}(u, v)\right) = \frac{\partial Y}{\partial v}(u, v)$$

Pertanto

(4) F_* conserva la lunghezza e il prodotto scalare di $\frac{\partial X}{\partial u}(u, v)$ e $\frac{\partial X}{\partial v}(u, v)$ se e solo se $E(u, v) = E'(u, v), F(u, v) = F'(u, v), G(u, v) = G'(u, v)$.

Mettendo in fila queste osservazioni si conclude. \square

6. Alcune considerazioni in merito alle funzioni E, F, G

In un romanzo⁸ del 1882 l'autore immagina un universo bidimensionale abitato da esseri bidimensionali; ci domandiamo in che misura questi esseri, che vivono in una superficie, possano rendersi conto della forma del loro mondo.

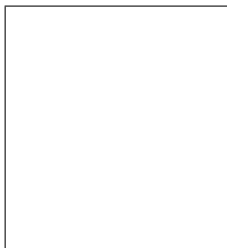
Per rendere più comprensibile e soprattutto più stimolante questa domanda, conviene partire da considerazioni apparentemente del tutto distanti.

6.1. Costruzione di superfici. Consideriamo qualcosa che avviene nel piano; ad esempio una circonferenza che prima si dilata, trasformandosi da un punto in una circonferenza di raggio 1, poi si contrae fino ad essere di nuovo un punto. Più precisamente la circonferenza ha centro nell'origine e, all'istante t , il suo raggio è

$$R(t) = \sqrt{1 - t^2}.$$

All'istante -1 il raggio è nullo, poi cresce fino all'istante 0 in cui il raggio è 1, per poi diminuire fino all'istante 1, in cui il raggio è di nuovo nullo.

Facciamo un filmato di questo avvenimento, che accade nell'intervallo temporale $(-1, 1)$, e poi separiamo uno dall'altro i fotogrammi (che immaginiamo infiniti, uno per ogni istante) e sovrapponiamoli in modo da formare un blocchetto tridimensionale, in cui, alla quota t , c'è il fotogramma F_t relativo a quell'istante. La figura che si viene così formare è una superficie sferica di raggio 1, come illustrato dalla Fig. 11. In altri termini, all'istante t , abbiamo la circonferenza di equazione



{fxi.42}

FIGURE 11. Apri il file per vedere il filmato

$$x^2 + y^2 = 1 - t^2;$$

se invece interpretiamo t come terza coordinata spaziale otteniamo la superficie sferica di equazione

$$x^2 + y^2 + t^2 = 1,$$

nelle incognite x, y, t .

Questo esempio fornisce un metodo per costruire una qualunque superficie; data una superficie \mathcal{S} consideriamo la sezione orizzontale \mathcal{C}_t con il piano $z = t$. Possiamo pensare queste sezioni come fotogrammi di un filmato in cui vediamo una certa curva, la sezione \mathcal{C}_t , modificarsi nel tempo.

⁸Edwin A. Abbott, *Flatlandia*, Adelphi.

6.2. Costruzione di oggetti tridimensionali. La cosa interessante è che questa procedura si può estendere ad una dimensione maggiore. Nel caso appena illustrato abbiamo assemblato curve piane in modo da ottenere una superficie nello spazio tridimensionale; ora assembleremo superfici nello spazio tridimensionale per ottenere un oggetto di dimensione tre in uno spazio a quattro dimensioni. Immaginiamo di avere una superficie che si trasforma nel tempo, sia \mathcal{S}_t la superficie all'istante t ; se immaginiamo di sovrapporre nello spazio quadridimensionale tutte queste superfici, esattamente come facevamo prima con i fotogrammi F_t , dovremmo ottenere un oggetto con una dimensione in più, un oggetto tridimensionale. È chiaro che qui le cose si fanno difficili, perché abbiamo difficoltà a immaginare in quattro dimensioni, ma il calcolo ci è d'aiuto.

Supponiamo che la superficie \mathcal{S}_t sia la superficie sferica di centro l'origine e raggio $R(t) = \sqrt{1 - t^2}$. Si tratta di una sfera che all'istante -1 è ridotta alla sola origine, poi si dilata fino ad avere raggio 1 all'istante 0, poi si contrae, fino ad avere di nuovo raggio nullo all'istante 1. Mutatis mutandis è l'esempio della circonferenza che avevamo fatto prima. Proseguiamo l'analogia: \mathcal{S}_t ha equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 - t^2$$

e se interpretiamo t come quarta coordinata, otteniamo

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1,$$

che è l'equazione di questo oggetto tridimensionale (immerso in uno spazio a quattro dimensioni). Questo oggetto si indica con S_3 e si chiama sfera tridimensionale.

Queste considerazioni ci fanno capire che possiamo interpretare un'equazione nelle incognite x, y, z e t come un oggetto tridimensionale e che dunque esistono infiniti oggetti tridimensionali con forme molto diverse tra loro (anche se sembra molto difficile interpretare intuitivamente il concetto di forma per un oggetto di questo tipo).

È importante capire che S_3 è fortemente diversa da uno dei solidi che siamo abituati a considerare. Ad esempio sia \mathcal{T} la superficie di un toro e consideriamo il solido \mathcal{T}^* formato dai punti interni al toro. Certo \mathcal{T}^* è un oggetto tridimensionale, ma muovendoci in esso possiamo arrivare al bordo, cioè sulla superficie \mathcal{T} che costituisce un confine. Al contrario muovendoci su S_3 non troveremo mai un confine esattamente come su una superficie sferica non si incontra mai un confine o bordo. La cosa è ancor più significativa: se mi muovo nell'intero spazio tridimensionale, oppure all'interno di un cilindro circolare retto, in direzione dell'asse, anche in questi casi non incontro mai un confine, tuttavia in questi casi si tratta di oggetti illimitati, mentre S_3 è limitata.

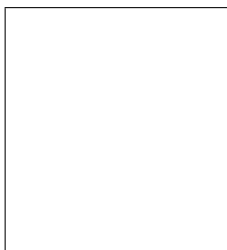
6.3. La congettura di Poincaré. Tutte queste possono sembrare considerazioni molto astratte, ma non è così. Infatti sono legate ad un problema reale: qual è la forma dell'universo?

Se ammettiamo la teoria del big-bang l'universo è limitato. L'idea è che tutto ha avuto inizio in un certo punto e in un certo istante; da quel momento è trascorso molto tempo, diciamo pure un enorme quantità di tempo, ma la velocità massima possibile con cui qualunque cosa si può propagare è la velocità della luce, che per quanto grande è comunque una quantità definita. Dunque, dal punto e dal momento iniziale la materia non può essersi propagata infinitamente lontano.

Per ragioni più complesse gli studiosi dubitano che l'universo abbia un confine (una metafora grossolana potrebbe essere questa: se la terra fosse piatta, ad esempio un disco, ad un certo punto si arriverebbe al bordo e si cascherebbe di sotto) dunque l'universo dovrebbe essere un oggetto tridimensionale, limitato e privo di confine, come ad esempio S_3 .

Come abbiamo detto esistono molti altri oggetti tridimensionali che sono limitati e privi di confine, come possiamo stabilire se uno di questi ha la forma dell'universo? Una risposta a questa domanda non esiste ancora, ma un piccolo passo forse di recente è stato fatto.

Disponiamo un laccio, insomma una curva chiusa - come ad esempio una circonferenza - su una superficie, ad esempio un toro \mathcal{T} . Immaginiamo che il laccio sia vincolato a stare sulla superficie; a seconda di come il laccio è disposto, muovendolo sulla superficie, è possibile o non è possibile ridurlo ad un punto (vedi Fig. 12). Se facciamo la stessa operazione sulla superficie di una sfera, comunque sia stato



{fxi.43}

FIGURE 12

disposto il laccio, è sempre possibile ridurlo ad un punto. Questa è una proprietà molto particolare della superficie sferica che la caratterizza rispetto a tutte le altre superfici orientabili, limitate e senza bordo. Ben inteso anche un ellissoide gode della stessa proprietà, ma in sostanza un ellissoide è una sfera deformata.

Ora circa un secolo fa il grande matematico francese, Henry Poincaré, pensò che la sfera tridimensionale S_3 , tra tutti gli altri oggetti tridimensionali, grosso modo fosse l'unica ad essere limitata, priva di confini e con la proprietà che ogni laccio può essere contratto ad un punto. Questa congettura è stata solo di recente (2002) dimostrata da Grigori Perelman e questo difficile risultato costituisce forse un passo utile per determinare la forma dell'universo⁹. Infatti ora sappiamo che se fossimo in grado di provare che nel nostro universo tutti i lacci sono contraibili ad un punto, allora esso sarebbe la sfera tridimensionale S_3 .

6.4. La conoscenza delle superfici. Ritorniamo ai nostri esseri bidimensionali che vivono in un universo bidimensionale (superficie). Per loro il problema di scoprire qualcosa circa la forma del loro universo è più difficile di quanto sia stato, per gli antichi, il problema di determinare la forma della terra; infatti quest'ultime hanno potuto utilizzare qualcosa di esterno alla terra: l'ombra lasciata dal sole ad Alessandria e Siene è stata utilizzata da Eratostene per calcolare il raggio della terra.

I nostri esseri bidimensionali possono determinare le funzioni E , F e G nel modo seguente. Fissano in una regione \mathcal{R} del loro universo bidimensionale una rete di

⁹Donal O'Shea: La congettura di Poincaré. Rizzoli.

curve, precisamente una famiglia di curve \mathcal{C}_u , per $0 < u < 1$, e una famiglia di curve \mathcal{D}_v , per $0 < v < 1$, disposte in modo tale che due curve sono incidenti se solo se stanno in famiglie diverse e in tal caso si incontrano in un punto e inoltre per ogni punto P di \mathcal{R} passa una ed una sola curva \mathcal{C}_u ed una ed una sola curva \mathcal{D}_v . Resta così stabilita un'applicazione

$$X : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathcal{R},$$

definita da: $X(u, v)$ è il punto in cui \mathcal{C}_u e \mathcal{D}_v sono incidenti.

Per calcolare $E(u, v) = \|\frac{\partial X}{\partial u}(u, v)\|^2$ osservano che il punto $P(t) = X(u + t, v)$, che si muove sulla curva \mathcal{D}_v , all'istante $t = 0$, passa per $X(u, v)$ con velocità

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial X}{\partial u}(u, v).$$

D'altra parte $\|\frac{dP}{dt}\| = \sqrt{E(u, v)}$ è la velocità scalare, quindi

$$\sqrt{E(u, v)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(\widehat{P(0)P(t)})}{t}.$$

Si tratta di misurare la lunghezza dell'arco $L(\widehat{P(0)P(t)})$ che congiunge $X(u, v)$ a $X(u + t, v)$ per valori di t molto piccoli e dividerla per t .

In modo analogo calcolano $G(u, v) = \|\frac{\partial X}{\partial v}(u, v)\|^2$. Infine per calcolare $F(u, v)$ osservano che

$$F(u, v) = \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) = \cos \theta \sqrt{E(u, v)} \sqrt{G(u, v)},$$

dove θ è l'angolo formato in $X(u, v)$ dalle curve \mathcal{C}_u e \mathcal{D}_v . Dunque misurato quest'angolo il lavoro è terminato.

Ora i nostri esseri bidimensionali dispongono delle funzioni E, F e G . Come vedremo esiste una quantità $K(u, v)$, denominata curvatura di Gauss, che dipende solo da queste tre funzioni e dalle loro derivate; pertanto i nostri esseri bidimensionali sono in grado di calcolare la curvatura di Gauss. Anticipiamo un altro fatto: il punto $X(u, v)$ è rispettivamente ellittico, iperbolico, parabolico oppure planare se la curvatura di Gauss, $K(u, v)$, è rispettivamente positiva, negativa, nulla. Dunque i nostri esseri bidimensionali, senza uscire dal loro universo (d'altra parte come potrebbero farlo?) sono in grado di stabilire, grazie alle funzioni E, F e G , di che tipo sono i punti del loro mondo.