Corso 2007-08

CHAPTER 1

Distanza su una superfice

1. Rotolare.

1.1. Il problema. In Fig. [fxi.25] 1 si vedono tre circonferenze rotolare su una retta

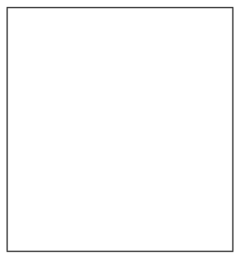

FIGURE 1. Apri il file per vedere il filmato fxi.25

e, per ciascuna, la traiettoria descritta da un punto solidale con essa. Osservato che le traiettorie sono differenti, viene da domandarsi *cosa significhi esattamente che una circonferenza rotola su una retta.*

1.2. Il topo e il carroarmato. Supponiamo che tra i denti dei cingoli di un carroarmato ci sia spazio sufficiente al passaggio di un topolino. Il topolino può passare sotto al carroarmato anche se questo è in movimento? Immagino che la risposta immediata sia no, invece il filmato di Fig. [fxi.26] 2 mostra che la parte del

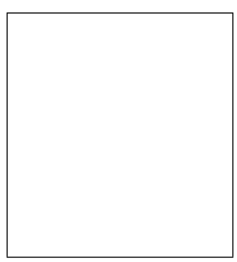

FIGURE 2. Apri il file per vedere il filmato fxi.26

cingolo in contatto con la strada è ferma! A ben pensarci, se così non fosse, cioè se anche la parte del cingolo a contatto con la strada si muovesse, essa si trascinerebbe sull'asfalto con un enorme attrito.

Mentre un punto del cingolo percorre l'arco $\widehat{A,B}$ (vedi Fig. [fxi.27] 3) la sua velocità diminuisce gradualmente, poiché il punto, giunto in B, deve avere velocità nulla.

Figure 3 fxi.27

Consideriamo una ruota dentata, che si muove alla stessa velocità del carroarmato; il moto degli archi $\overset{\frown}{A,B}$ e $\overset{\frown}{A',B'}$ è il medesimo. Concludiamo che anche il punto della ruota dentata in B' ha velocità nulla.

Poiché sembra ragionevole che il caso della ruota dentata rappresenti al meglio il rotolare di una circonferenza, sembra ragionevole richiedere che

(*) *quando una circonferenza rotola su una retta, il punto della circonferenza che tocca la retta, nell'istante di contatto, abbia velocità nulla.*

La cosa è intuitivamente confermata dal fatto che, se facciamo ruotare una moneta di spigolo sul tavolo, tenendola tra le dita, la muoviamo con il dito che la tocca nel punto diametralmente opposto a quello di tangenza, facendo *perno* su quest'ultimo, che quindi parrebbe avere velocità nulla.

xi. Esercizio 1.1.

Vale la pena di ricordare che il fatto che un punto abbia, in un certo istante, velocità nulla non significa che il punto sia fermo. Ad esempio si consideri un bambino che scende lungo lo scivolo di Fig. fxi.30 4. La forma dello scivolo è importante; le due

Figure 4. Apri il file per vedere il filmato fxi.30

caratteristiche che ci interessano sono che c'è un punto P dello scivolo con tangente orizzontale, ma in nessun tratto lo scivolo contiene un segmento orizzontale. Dal filmato si constata che il punto O, che registra la componente orizzontale del moto, si muove a velocità costante. Al contrario il punto V, che registra la componente verticale del moto, sembra fermarsi quando B è nel punto P. Questa è l'apparenza, in verità: **(a)** qualunque sia il moto di B, nell'istante in cui B passa per P, il punto V ha velocità nulla; **(b)** se, come nel filmato, il moto di O non si arresta mai, anche il punto V non si arresta mai.

Infatti, come detto, la tangente in P è orizzontale, dunque la componente verticale della velocità di B (qualunque sia il moto di B lungo lo scivolo), cioè la velocità di V, è nulla; questo spiega (a). Se V fosse fermo anche solo in un piccolissimo intervallo di tempo, poiché O continua a muoversi, il bambino B dovrebbe percorrere un tratto, sia pur breve, in orizzontale, cosa che la forma dello scivolo esclude; questo spiega (b). Resta da osservare che l'impressione illusoria che V si fermi è dovuta al fatto che è difficile distinguere ad occhio tra l'immobilità e un procedere a velocità prossima a zero.

1.3. Una prima descrizione del moto della circonferenza. Diamo una prima descrizione del moto della circonferenza, mostrando che esso dipende da una funzione $f(s)$.

Immaginiamo di realizzare un filmato con il moto della circonferenza; teniamo la telecamera fissa, in modo che il sistema di riferimento, il cui asse delle ascisse coinciderà con la retta su cui poggia la circonferenza, appaia il medesimo in tutti i fotogrammi. Nel primo fotogramma F_0 la circonferenza è tangente alla retta in un punto che prendiamo come origine O del sistema di riferimento e chiamiamo $P(0)$ il punto della circonferenza che coincide con O. Per individuare gli altri punti della circonferenza, descriviamola come traiettoria di un punto $P(s)$ che si muove in senso antiorario a partire da $P(0)$ e con velocità unitaria (dunque l'arco di circonferenza $\overset{\frown}{P(0)P(s)}$) ha lunghezza s). Numeriamo progressivamente i fotogrammi e chiamiamo F_s il fotogramma in cui il punto $P(s)$ della circonferenza tocca la retta, in un punto di ascissa $f(s)$ (i fotogrammi F_0 e F_s sono visibili in Fig. 5). In questo

FIGURE 5 fxi.28

modo abbiamo compiutamente descritto il filmato; resta solo da precisare chi debba essere la funzione $f(s)$.

Indichiamo con $Q(u,s)$ la posizione del punto $P(u)$ nel fotogramma F_s; allora le posizioni che il punto $P(u)$ assume nei vari fotogrammi, vale a dire la sua traiettoria nel filmato è descritta da $Q(u,s)$ al variare di s. In particolare $Q(u,0) = P(u)$ è la posizione iniziale del punto che appare nel fotogramma F_0; invece $Q(u,u) = (f(u),0)$ è la posizione di $P(u)$ nel fotogramma F_u in cui, come detto prima, il punto $P(u)$ tocca la retta (cfr. Fig. 6).

Dunque la traiettoria del punto $P(u)$ è l'insieme dei punti $Q(u,s)$ al variare di s, indipendentemente da quale di questi punti compaia in un certo istante sullo schermo. Ne segue che *cambiare la velocità di proiezione non altera la forma delle traiettorie dei punti della circonferenza*. Del resto nei filmati di Fig. 1 le traiettorie evidenziate non cambiano la loro forma se cambiamo la velocità di proiezione.

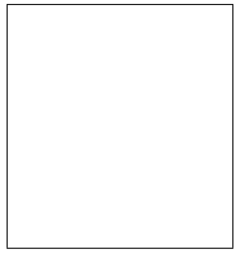

FIGURE 6 fxi.31

In conclusione *la funzione $f(s)$ determina il moto della circonferenza nel senso che determina la traiettoria di ciascun punto della circonferenza.*

Inoltre dovrebbe essere chiaro che raddoppiando la velocità di proiezione, raddoppia la velocità di tutti i punti in ogni istante; allo stesso modo dimezzando la velocità di proiezione, si dimezza la velocità di tutti i punti. In generale variando la velocità di proiezione si altera la velocità di tutti i punti di un certo fattore e dunque il fatto ceh in un certo istante un punto abbia velocità nulla è indipendente dalla velocità di proiezione. Pertanto la condizione (*) è indipendente dalla velocità di proiezione.

Dunque *la funzione $f(s)$ non determina la velocità del moto, tuttavia la condizione (*) non dipende dalla velocità del moto (del resto una ruota può rotolare bene a qualunque velocità).*

1.4. L'equazione di una traiettoria. Determiniamo ore l'equazione della traiettoria di ciascun punto. Confrontando (cfr. Fig. fxi.29 7) il fotogrammi F_0 e F_s

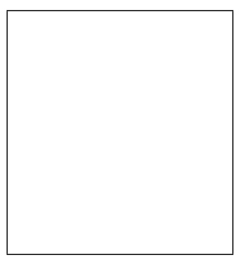

FIGURE 7 fxi.29

vediamo che la circonferenza, passando dal primo al secondo fotogramma, è stata spostata rigidamente e di conseguenza il sistema di riferimento con origine in $P(s)$ e assi diretti come i versori $\vec{T}(s)$ e $\vec{N}(s)$ è stato rigidamente spostato nel sistema con origine in $Q(s,s)$ e assi diretti come la tangente e la normale alla circonferenza, cioè come i versori $(1,0)$ e $(0,1)$. Ne segue che se il punto $P(u)$ della circonferenza ha coordinate X, Y rispetto al primo sistema, allora la sua posizione $Q(u,s)$ nel fotogramma F_s ha le medesime coordinate rispetto al secondo sistema. Vale a dire: se

exi.30
$$P(u) = P(s) + X\ \vec{T}(s) + Y\ \vec{N}(s), \tag{1.1}$$

allora

$$Q(u,s) = Q(s,s) + X\ (1,0) + Y\ (0,1),$$

ossia

$$Q(u,s) = \big(f(s) + X, Y\big).$$

Possiamo allora concludere che

xi.22 Lemma 1.2. *Il moto della circonferenza sulla retta soddisfa la condizione di rotolamento (*) se e solo se $f(s) = s$.*

Dimostrazione. Da (exi.30 1.1) si ricava

$$\begin{cases} X = \big(P(u) - P(s)\big).\, \vec{T}(s) \\ Y = \big(P(u) - P(s)\big).\, \vec{N}(s) \end{cases}$$

D'altra parte la velocità del punto $P(u)$ all'istante s è

$$\frac{\partial Q}{\partial s}(u,s) = \Big(\frac{df}{ds}(s) + \frac{\partial X}{\partial s}(u,s), \frac{\partial Y}{\partial s}(u,s)\Big);$$

e la condizione (*) si traduce nella condizione

$$\frac{\partial Q}{\partial s}(s,s) = 0.$$

Calcoliamo

$$\frac{\partial X}{\partial s}(u,s) = -\frac{dP}{ds}(s).\, \vec{T}(s) + \big(P(u) - P(s)\big).\frac{d\vec{T}}{ds}(s);$$

per $u = s$ il secondo addendo scompare e resta

$$\frac{\partial X}{\partial s}(s,s) = -\frac{dP}{ds}(s).\, \vec{T}(s) = -1.$$

Analogamente

$$\frac{\partial Y}{\partial s}(u,s) = -\frac{dP}{ds}(s).\, \vec{N}(s) + \big(P(u) - P(s)\big).\frac{d\vec{N}}{ds}(s);$$

per $u = s$ il secondo addendo scompare e resta

$$\frac{\partial Y}{\partial s}(s,s) = -\frac{dP}{ds}(s).\, \vec{N}(s) = 0.$$

Quindi

$$\frac{\partial Q}{\partial s}(s,s) = \Big(\frac{df}{ds}(s) - 1, 0\Big).$$

Pertanto la condizione (*) è soddisfatta se e solo se $f(s) = s$. □

Il significato del Lem xi.22 1.2 è il seguente:

> *la circonferenza rotola correttamente sulla retta se, presi due punti P e Q della circonferenza e detti P' e Q' i punti della retta toccati da P e Q, la lunghezza dell'arco $\widehat{PQ}$ è pari alla lunghezza del segmento $\overline{P'Q'}$.*

Ovvero, se immaginiamo che la circonferenza rotolando sulla retta si srotoli come un tappeto, l'enunciato del Lemma xi.22 1.2 può essere così riformulato:

> *la circonferenza rotola correttamente sulla retta se la lunghezza del tratto srotolato corrisponde alla lunghezza dell'arco che ha già percorso la retta.*

FIGURE 8 fxi.32

1.5. Altri moti di rotolamento. Ritorniamo ai tre casi rappresentati in Fig. **??**, dalla forma delle tre traiettorie si può dedurre qualcosa sul moto della circonferenza.

Nel caso A (vedi Fig. 8) consideriamo il punto della circonferenza che percorre la traiettoria evidenziata da sinistra verso destra; il suo vettore velocità, nell'istante in cui tocca la retta, è rivolto verso sinistra. Questo caso si verifica quando un auto procede a bassa velocità (oppure in salita) su una strada ghiacciata: le ruote non fanno sufficientemente presa e girano più velocemente di quanto l'auto proceda in avanti.

Nel caso C succede il cotrario: la velocità del punto è diretta orizzontalmente verso destra; è quanto succede ad un auto che arriva a forte velocità su un tratto di strada ghiacciato (oppure in discesa): l'auto scivola in avanti più velocemente di quanto la muoverebbero le sole ruote.

Infine nel caso B il vettore velocità dovendo essere tangente alla traiettoria non può che essere nullo, indipendentemente dalla velocit'a del moto; la velocità dell'auto è esattamente quella dovuta al moto delle ruote.

Un'altra osservazione utile per interpretare i tre casi è la seguente. Immaginiamo la ruota di un treno che rotola correttamente su una rotaia. In Fig. 9b è

FIGURE 9. a - b - c Apri il file per modificare la traiettoria fxi.33

rappresentata la traiettoria di un punto della ruota che viene a contatto diretto con la rotaia. In Fig. 9a il punto si trova sulla parte più esterna della ruota (quella che costringe la ruota a mantenersi sulla rotaia); questo punto si trova a distanza maggiore dal centro della ruota e la sua traiettoria è del tipo A. Infine in Fig. 9c il punto è più interno e la sua traiettoria è di tipo C. (Aprendo il file è possibile modificare con il mouse la posizione del punto e quindi la sua traiettoria).

1.6. Una curva piana rotola su una retta. Avremmo potuto descrivere il moto di una circonferenza su una retta in modo più semplice facendo riferimento al moto del centro della circonferenza e al moto di rotazione attorno al centro. Il vantaggio dell'esposizione che abbiamo scelto è che si può applicare parola per parola ad una qualunque curva piana.

L'unico punto in cui sarebbe necessario modificare l'esposizione è l'argomento del carroarmato; ma possiamo assumere come definizione di rotolare correttamente su una retta il fatto che sia soddisfatta la condizione (*).

A titolo d'esempio si consideri la Fig. fxi.36 ?? dove è rappresentato il moto di

FIGURE 10. Apri il file fxi.36

rotolamento di una parabola su una retta. Aperto il file è possibile vedere il filmato del moto e modificare il punto di cui viene tracciata la traiettoria.

L'unica precisazione che è opportuno fare è nel caso di curve come quelle di Fig. fxi.35 ?? che presentano concavità rivolte da parti opposte. Nel descrivere le traiettorie del

FIGURE 11. Apri il file fxi.35

moto abbiamo utilizzato il versore normale $\vec{N}(s)$ in un punto $P(s)$ della curva. Per una curva questo è definito dalla relazione $\frac{d\vec{T}}{ds}(s) = k(s)\ \vec{N}(s)$; quando la curvatura si annulla il versore normale non è definito. Nel caso, come quello in figura, in cui la concavità cambia direzione ci sono evidentemente punti di flesso in cui la curvatura si annulla. Il problema non è tanto il fatto che la normale non sia definita nei punti di flesso, quanto piuttosto che il verso della normale, vicino ad un punto di flesso cambia bruscamente. Per ovviare a questa difficoltà basta utilizzare l'altra definizione di versore normale, possibile nel caso delle curve piane, che consiste nel dire che il versore normale $\vec{N}(s)$ è, per definizione, ottenuto ruotando di un angolo retto il versore tangente in direzione antioraria (oppure oraria, ma sempre la stessa). (Aperto il file si vede il filmato del moto ed è possibile modificare il punto di cui si disegna la traiettoria. A questo proposito si noti che se si sceglie un punto di flesso, la traiettoria non presenta più, nei punti di tangenza alla retta, le caratteristiche cuspidi; tutavia in quei punti - sempre per la condizione (*) la velocità è nulla).

xi.23 ESERCIZIO 1.3. *Spiegare perché è ragionevole dire che se una circonferenza rotola in modo corretto su una retta, allora i punti della circonferenza hanno, nell'istante in cui toccano la retta, velocità nulla.*

1.7. Rotolamento di una curva piana.