

CAPITOLO X

Il nastro di Möbius

X.1. Definizione del nastro di Möbius

Prendiamo una striscia di carta e incolliamo tra loro le due estremità come illustrato nella sequenza di Fig. 1, la superficie ottenuta si chiama *nastro di Möbius*.

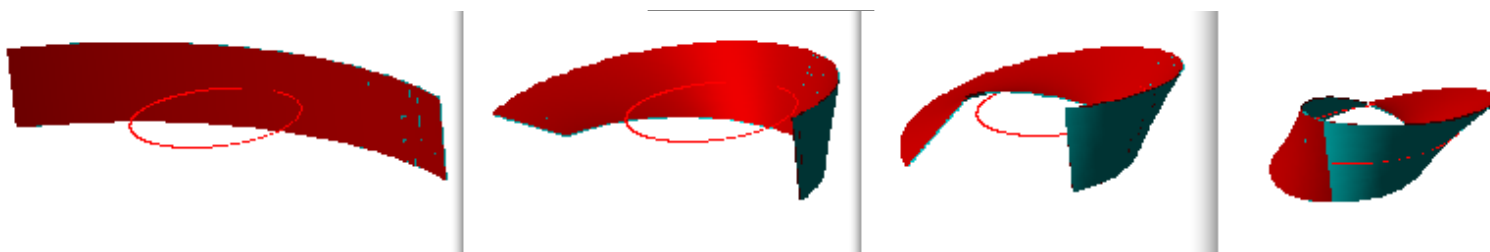


FIGURA 1. Apri il file per vedere il filmato

Possiamo descrivere in altro modo la costruzione. Prendiamo una circonferenza di raggio R e un segmento, di lunghezza R , il cui punto medio è vincolato a stare sulla circonferenza mentre il segmento è libero di ruotare sul piano normale alla circonferenza. Come si vede in Fig. 2, il segmento, che passa per il punto P della circonferenza, giace sul piano ν_P , normale alla circonferenza in P . La velocità di rotazione di P attorno al centro C della circonferenza è doppia della velocità con cui ruota il segmento attorno al suo punto medio (si notino gli angoli θ e 2θ in figura). Così avviene che, quando P ha compiuto un giro, il segmento è

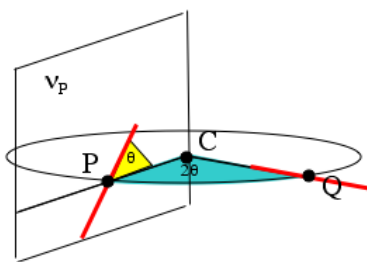


FIGURA 2

ruotato di un angolo piatto e dunque si ritrova nella posizione precedente, ma con gli estremi scambiati. Nella sequenza di Fig. 3 si vede il moto del segmento, le traiettorie compiute dagli estremi (che alla fine formano un'unica curva) e, nell'ultima immagine, la superficie descritta dal segmento.

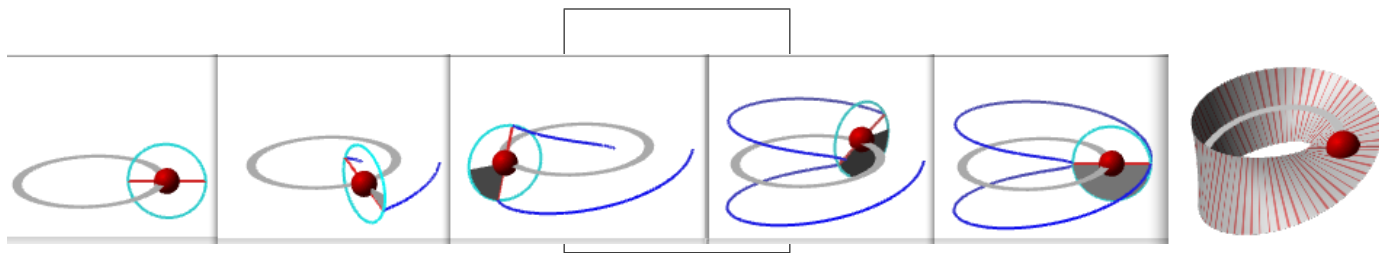


FIGURA 3. Apri il file per vedere il filmato

X.2. Orientazione di una superficie

Sia \mathcal{S} una superficie priva di punti singolari; dunque in tutti i punti esiste il piano tangente. In ogni punto della superficie questa ha due facce e ci sono due possibili scelte del vettore normale: dalla parte di una o dell'altra faccia.

La superficie \mathcal{S} si dice *orientabile* se è possibile scegliere, in ciascun punto P di \mathcal{S} , il vettore normale \vec{n}_P in modo che l'applicazione

$$\mathcal{S} \ni P \mapsto \vec{n}_P \in \mathbb{R}^3$$

sia continua. Una siffatta scelta del vettore normale in ogni punto di \mathcal{S} , si chiama *orientazione*. La continuità dell'applicazione significa che, se P e Q sono due punti di \mathcal{S} vicini, anche i vettori \vec{n}_P e \vec{n}_Q saranno vicini; la vicinanza tra i due vettori si misura applicandoli in un medesimo punto e controllando che l'angolo da essi formato sia piccolo. Fissare un'orientazione su \mathcal{S} significa stabilire in ciascun punto un vettore normale; possiamo immaginare questo come se la superficie fosse ricoperta da un campo di grano, in ogni punto una spiga; possiamo allora individuare una faccia A in cui c'è il campo di grano e una faccia B in cui la superficie è rasata.

D'altro canto immaginiamo di percorrere questa superficie tenendoci ritti su di essa; il nostro corpo individua in ciascun punto $P(t)$ che incontriamo un vettore normale $\vec{n}_{P(t)}$.

Vediamo il legame che esiste tra orientazione di una superficie e percorsi su una superficie. L'osservazione apparentemente banale, ma che si rileverà cruciale, è questa: se sulla superficie è fissata un'orientazione, allora nel nostro cammino attraversiamo sempre il campo di grano, oppure stiamo sempre dalla parte rasata. La scelta la compiamo nel punto iniziale, scegliendo da che parte metterci.

La cosa forse sorprendente è che esistono superfici non orientabili, ad esempio:

TEOREMA X.2.1. *Il nastro di Möbius non è orientabile.*

Dimostrazione. Percorriamo la traiettoria illustrata in Fig. 4, partendo dal punto P , ritti sulla superficie dalla parte di \vec{n}_0 , e proseguiamo il nostro cammino fino a ritornare in P . L'insieme dei vettori normali nei punti del percorso, forma una specie di nastro, evidenziato in figura. Alla fine del percorso ci ritroviamo in P , ma sull'altra faccia, cioè con vettore normale \vec{n}_1 , opposto a \vec{n}_0 .

Fatta questa osservazione, dimostriamo il teorema ragionando per assurdo; vale a dire assumiamo che sia possibile fissare un'orientazione sul nastro di Möbius.

Sia \vec{n}_P , il vettore normale in P prescelto dall'orientazione; se $\vec{n}_0 = \vec{n}_P$ iniziamo il cammino in mezzo al grano e lo finiamo dalla parte rasa; se $\vec{n}_1 = \vec{n}_P$ iniziamo dalla parte rasa e lo finiamo nel campo di grano. Assurdo. \square

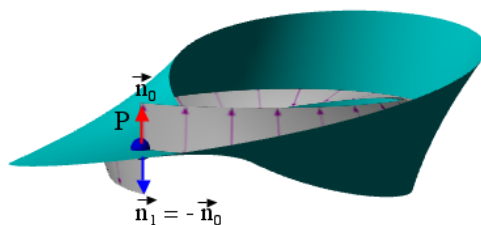


FIGURA 4. Apri il file per muovere a tuo piacere la superficie e vedere meglio il percorso

La Fig. 5a mostra in altro modo che il nastro di Möbius è una superficie non



FIGURA 5. a - b. Apri i files per muovere a tuo piacere le superfici

orientabile. Come si intuisce dalla figura e si può anche constatare, aprendo il file e controllando il disegno di una mano dalle due parti, il nastro è trasparente: se traccio una mano sinistra, dall'altra parte della superficie sembrerà una mano destra. Immaginiamo di percorrere il nastro di Möbius, il punto di partenza e il verso sono indicati in figura, tracciando delle mani sinistre lungo il nostro cammino; il fatto che alla fine del percorso compaia una mano destra (evidenziata in figura) significa che siamo finiti dall'altra parte!

ESERCIZIO X.2.2. *Perché il nastro di Möbius non è orientabile?*

Soluzione. Si tratta di riportare la dimostrazione del Teorema X.2.1. \square

Se una superficie \mathcal{S} è orientabile anche ogni regione \mathcal{S}' di \mathcal{S} è orientabile, infatti l'orientazione di \mathcal{S} fornisce subito un'orientazione di \mathcal{S}' . Al contrario se \mathcal{S} è una superficie non orientabile, essa tuttavia contiene regioni orientabili; ad es. un piccolo pezzo del nastro di Möbius, oppure il nastro di Möbius meno uno dei segmenti che lo compongono (cioè il nastro tagliato) sono orientabili.

ESERCIZIO X.2.3. *Quale significato ha la Fig. 5b ?*

Soluzione. Come appare dalla disposizione delle mani, la porzione gialla di superficie, che è un unico nastro e non due come potrebbe sembrare, è orientabile. Questo non deve stupire, la non-orientabilità è una proprietà globale di una superficie, ci possono essere regioni orientabili, anche molto grandi, su una superficie non-orientabile. \square

Chiamiamo \mathcal{M}_4 il nastro giallo di Fig. 5b. Per realizzarlo costruiamo il nastro di Möbius e poi ritagliamo \mathcal{M}_4 . In pratica conviene prendere due fogli di carta

formato $A4$, ritagliarne una striscia (la parte tratteggiata in Fig. 6), giuntare i due

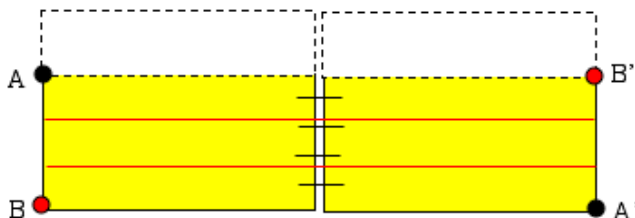


FIGURA 6

fogli al centro e incollare tra loro i lati estremi, facendo coincidere A con A' e B con B' . Così otteniamo un nastro di Möbius; poi pratichiamo un taglio lungo le righe rosse (si tratta di un unico taglio); troviamo un nastro di Möbius, più sottile, e il nastro \mathcal{M}_4 , tra di loro intrecciati.

Esiste un modo più diretto per costruire \mathcal{M}_4 ? Si potrebbe pensare che per costruire \mathcal{M}_4 sia sufficiente incollare le estremità di un nastro dandogli una doppia torsione, vale a dire ruotando una delle due estremità due volte: due angoli piatti, pari ad un angolo giro. Esaminiamo questa possibilità.

Chiamiamo \mathcal{M}_2 la superficie costruita con questa doppia torsione e confrontiamola \mathcal{M}_4 . La sequenza iniziale di Fig. 7 illustra la costruzione di \mathcal{M}_2 . Purtroppo

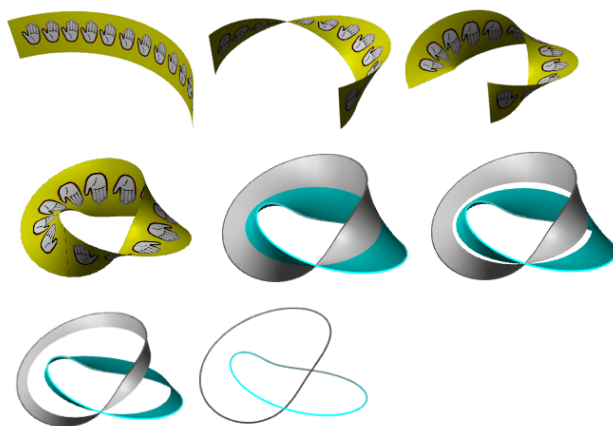


FIGURA 7. Apri i files per vedere i filmati

un confronto delle immagini delle due superfici non credo sia di molto aiuto per decidere se sono uguali o diverse, conviene ragionare diversamente. Nella seconda parte di Fig. 7 vediamo il bordo $B\mathcal{M}_2$ di \mathcal{M}_2 : esso è formato da due anelli semplicemente intrecciati.

Come si vede in Fig. 8 il bordo $B\mathcal{M}_4$ di \mathcal{M}_4 che è costituito anch'esso di due curve, ciascuna delle quali può essere trasformata in una circonferenza, ma sono intrecciate in modo più complesso: nell'ultima immagine di Fig. 8 si vede come la curva blu passi dentro quella rossa, che però è allacciata due volte intorno ad essa. La teoria matematica dei nodi permette di dimostrare che i due bordi, $B\mathcal{M}_2$ e $B\mathcal{M}_4$, non sono deformabili uno nell'altro. Alla stessa conclusione si arriva in

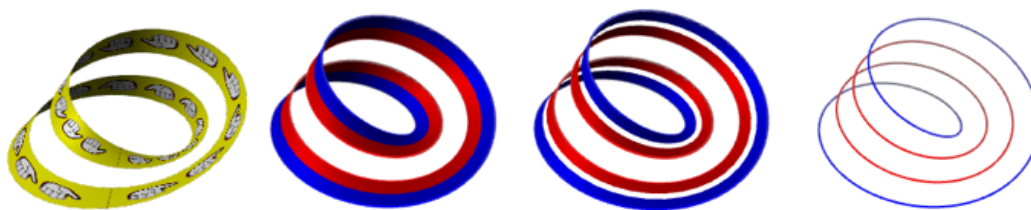


FIGURA 8. Apri il file per vedere il filmato

modo empirico realizzando i due bordi con dei pezzetti di corda. Questo significa che le due superfici, \mathcal{M}_2 e \mathcal{M}_4 , non sono deformabili una nell'altra (altrimenti se così fosse, la stessa deformazione porterebbe il bordo dell'una sul bordo dell'altra). Dunque la nostra ipotesi che le due superfici fossero sostanzialmente uguali è falsa.

La soluzione del problema possiamo trovarla empiricamente: realizziamo un modello in carta di \mathcal{M}_4 seguendo le istruzioni date sopra. Non è difficile constatare, per confronto, che lo stesso modello lo si ottiene saldando le estremità di un nastro dopo aver impresso ad uno dei due estremi una quadrupla torsione (4 angoli piatti, cioè due angoli giro).

X.3. Autointersezione

Per costruzione il nastro di Möbius è descritto dal moto di un segmento; prolungando il segmento a una retta, otteniamo una superficie rigata che possiamo pensare come estensione naturale del nastro di Möbius; possiamo chiamarla nastro di Möbius esteso. Nella sequenza di Fig. 9 è rappresentata l'allungamento del

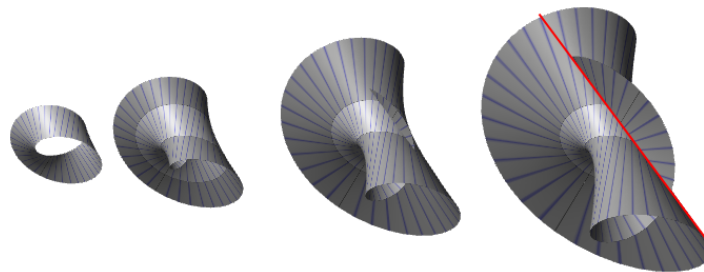


FIGURA 9. Apri il file per vedere il filmato

segmento. Come si vede la superficie si autointerseca e, cosa sorprendente, la linea di autointersezione sembra essere una retta. Cerchiamo di capire come vanno le cose. Intanto i punti di autointersezione sono i punti in cui si incontrano due generatrici, ma - in generale - due generatrici non si incontrano, infatti vale la seguente:

PROPOSIZIONE X.3.1. *Le generatrici del nastro di Möbius sono due a due sghembe, tranne le coppie di generatrici relative a punti diametralmente opposti.*

Dimostrazione. La generatrice r_P , che passa per il punto P della circonferenza, giace sul piano ν_P , normale alla circonferenza in P .

Siano P e Q due punti della circonferenza, diametralmente opposti. I piani ν_P e ν_Q coincidono e dunque le relative generatrici r_P e r_Q sono complanari.

Se invece i punti P e Q non sono diametralmente opposti, allora i piani ν_P e ν_Q si tagliano lungo la perpendicolare n al piano della circonferenza condotta per il centro (vedi Fig. 10).

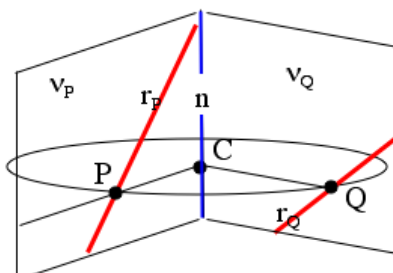


FIGURA 10

Due rette parallele che giacciono su piani incidenti sono necessariamente parallele allo spigolo comune ai due piani (è l'unica direzione comune ai due piani). Quindi, se le due generatrici r_P e r_Q fossero parallele, sarebbero parallele a n . Ma questo significa che andando da P a Q (o viceversa poco importa quale sia il verso di rotazione) la generatrice ha girato di un multiplo di un angolo piatto, cosa impossibile perché la generatrice gira di un angolo piatto mentre il punto compie un intero giro della circonferenza. Dunque le due generatrici non sono parallele.

Supponiamo allora che siano incidenti. Il punto A di incidenza deve stare su entrambi i piani, dunque sta sulla retta n e saremmo nella situazione rappresentata in Fig. 11. Ci sono due casi: in Fig. 11a la generatrice ha ruotato di un angolo

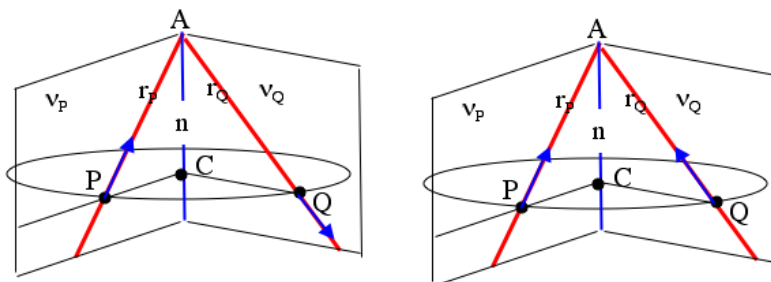


FIGURA 11. a - b

piatto, in Fig. 11b ha ruotato di un angolo giro. L'argomento usato sopra mostra che entrambi i casi sono impossibili. Dunque le due generatrici non sono incidenti.

Non resta che concludere che sono sghembe. \square

Si tratta ora di vedere il comportamento delle coppie di generatrici che passano per due punti diametralmente opposti della circonferenza.

PROPOSIZIONE X.3.2. *Siano P e Q due punti della circonferenza, diametralmente opposti, le relative generatrici sono incidenti.*

Esiste un punto A della circonferenza in cui la relativa generatrice r_A è perpendicolare al piano della circonferenza; sia t la tangente alla circonferenza nel punto A (vedi Fig. 12). Sulla retta t alziamo il piano perpendicolare al piano della circonferenza; su questo piano tracciamo la retta a , per A , che forma con t un angolo di 45° . La retta a è il luogo di autointersezione, vale a dire il luogo dei punti in cui

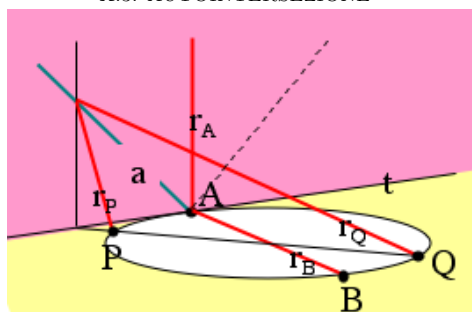


FIGURA 12

le coppie generatrici, tranne una, che passano per punti diametralmente opposti si incontrano. L'eccezione è costituita dalla coppia di generatrici che passano per i punti C e D (vedi Fig. 13) che sono parallele alla retta a.

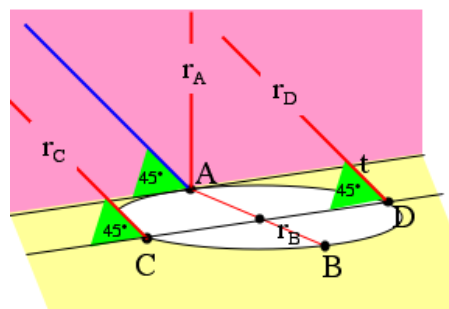


FIGURA 13

N.B. (i) In Fig. 12 le rette in rosso sono generatrici, la retta a è in blu. (ii) Osserviamo che se r_A è verticale, allora la generatrice r_B che passa per il punto B , diametralmente opposto ad A , deve essere orizzontale, perché mentre il punto fa mezzo giro sulla circonferenza, il segmento ruota di un quarto di giro, cioè di un angolo retto. Le due generatrici r_A e r_B sono incidenti in A , quindi A appartiene al luogo di autointersezione. (iii) L'enunciato è leggermente impreciso, perché non individua univocamente la retta a . Infatti la retta tratteggiata andrebbe altrettanto bene. La scelta fra le due va fatta tenendo presente il verso in cui ruotano le generatrici. (iv) In figura compaiono anche le generatrici r_P e r_Q che passano per i punti P e Q diametralmente opposti.

Dimostrazione. La dimostrazione è del tutto elementare, ma un po' complessa. Il caso eccezionale rappresentato in Fig. 13 è chiaro: da A a C si compie un quarto di giro e la generatrice contemporaneamente ruota di $1/8$ di giro, pari a 45° .

Si consideri la Fig. 14a; dobbiamo provare che il punto R in cui si incontrano le generatrici r_P e r_Q sta sulla retta tratteggiata (la retta a) che giace sul piano verticale ed è inclinata di 45° rispetto a t . Basta mostrare (i) che R sulla verticale di S e (ii) che i segmenti \overline{SR} e \overline{SA} hanno la stessa lunghezza.

Immaginiamo di ruotare la circonferenza di Fig. 14a intorno al diametro PQ fino a metterla sul piano verticale (vedi Fig. 14b). Ovviamente i punti P, Q, C, S, R che già si trovano su questo piano non si sono mossi. La generatrice r_Q taglia questa nuova circonferenza in un punto A' .

Sia $2\theta = \widehat{ACP}$ l'angolo di cui è ruotato P rispetto ad A . Allora la generatrice r_P è ruotata di θ rispetto alla verticale, dunque $\theta = \widehat{RPT}$. D'altra parte la generatrice r_Q ha ruotato di un ulteriore angolo retto rispetto alla posizione di r_P , quindi $\widehat{PQR} = \theta$. Ma allora l'angolo $\widehat{PCA'}$,

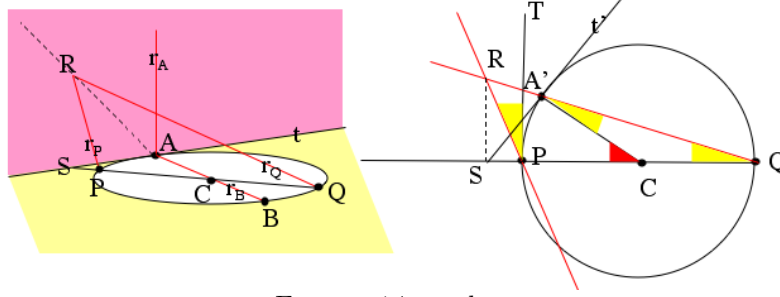


FIGURA 14. a - b

che è l'angolo al centro che insiste sull'arco PA' è il doppio di $P\hat{Q}R$ che insiste sullo stesso arco; pertanto $P\hat{C}A' = 2\theta$. Cioè

$$2\theta = A\hat{C}P = P\hat{C}A'.$$

Dunque il segmento $\overline{CA'}$ si ottiene ruotando, solidalmente alla circonferenza, il segmento \overline{CA} . Pertanto anche il segmento $\overline{SA'}$ è ottenuto ruotando il segmento \overline{SA} . Questo dice che la retta t' , che congiunge S e A' è tangente in A' alla circonferenza.

Allora l'angolo $S\hat{A}'C$ è retto, mentre, poiché il triangolo $A'CQ$ è isoscele, $\theta = C\hat{A}'Q$. Dunque

$$S\hat{A}'Q = \frac{\pi}{2} + \theta.$$

Abbiamo detto che $\theta = R\hat{P}T$ e anche $T\hat{P}Q$ è retto, dunque

$$R\hat{P}Q = \frac{\pi}{2} + \theta.$$

Le ultime due formule dicono che i triangoli PQR e $A'QS$ hanno due angoli uguali, quello comune in Q e quelli rispettivamente in P e in A' ; dunque sono simili. Allora il rapporto tra i lati maggiori $\overline{QR} : \overline{QS}$ è uguale al rapporto tra i lati medi $\overline{QP} : \overline{QA'}$. Ne segue che i triangoli PQA' e RQS sono simili. Il primo è rettangolo in A' , quindi l'angolo $Q\hat{S}R$ è retto. Questo prova che R è sulla verticale di S .

Resta da provare che \overline{RA} e \overline{SA} sono uguali. Cioè che il triangolo $SA'R$ è isoscele. Il triangolo $SA'C$ è rettangolo e l'angolo in C vale 2θ , quindi l'angolo $A'\hat{S}C = \frac{\pi}{2} - 2\theta$. Dunque

$$R\hat{S}A' = R\hat{S}Q - A'\hat{S}C = 2\theta.$$

Il triangolo RSQ è rettangolo e l'angolo in Q vale θ , quindi

$$S\hat{R}Q = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Le ultime due formule dicono che il terzo angolo del triangolo $SA'R$ è

$$R\hat{A}S = \pi - R\hat{S}A' - S\hat{R}Q = \frac{\pi}{2} - \theta = S\hat{R}Q.$$

Dunque due angoli sono uguali e il triangolo $SA'R$ è isoscele. □

In Fig. 15 si vedono due generatrici in punti diametralmente opposti che si tagliano

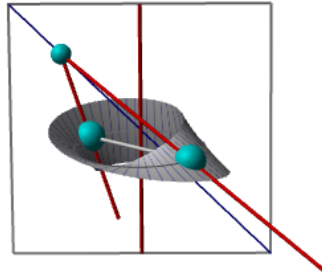


FIGURA 15. Apri il file per vedere il filmato

sulla retta a di autointersezione.

ESERCIZIO X.3.3. *Descrivere la retta a di autointersezione del nastro di Möbius esteso.*

Soluzione. Riportare la Fig. 16 e dare le seguenti indicazioni. Il nastro di Möbius

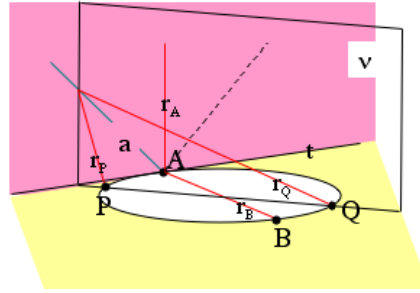


FIGURA 16

esteso è la superficie rigata che ha per direttrice la circonferenza in figura e le cui generatrici sono disposte come segue: la generatrice r_P che passa per il punto P della circonferenza giace sul piano ν normale alla circonferenza in P . In particolare i punti P e Q in figura sono diametralmente opposti e dunque il piano normale alla circonferenza nei due punti è il medesimo e, su di esso, giacciono entrambe le generatrici r_P e r_Q .

Le due generatrici, r_P, r_Q , si incontrano in un punto della retta a . La retta a è così individuata. Si prende il punto A della circonferenza la cui generatrice r_A è perpendicolare al piano della circonferenza; si considera il piano (rosa in figura) individuato da r_A e dalla tangente t , in A , alla circonferenza. La retta di autointersezione a giace su questo piano, passa per A e forma con il piano della circonferenza un angolo di 45° .

Si noti che se chiamiamo B il punto diametralmente opposto ad A , allora (vedi figura) le generatrici r_A, r_B si incontrano in A , dunque A appartiene effettivamente alla retta di autointersezione. \square

X.4. Un'altra retta sul nastro di Möbius

È abbastanza sorprendente che la linea di autointersezione sia una retta a che giace sul nastro di Möbius esteso. Ma in verità esiste un'ulteriore retta n che sta su questa superficie rigata.

PROPOSIZIONE X.4.1. *Sia n la perpendicolare al piano della circonferenza condotta per il centro. Per ciascun punto di n passa una ed una sola generatrice e tutte le generatrici, tranne quella verticale, sono incidenti ad n .*

Dimostrazione. Sia P un punto della circonferenza; la generatrice r_P che passa per P giace sul piano ν_P , normale alla circonferenza in P . Tale piano è verticale (cioè perpendicolare al piano della circonferenza) e passa per il centro, dunque contiene la retta n . Pertanto r_P e n sono complanari e, salvo il caso in cui r_P è verticale, le due rette sono incidenti. Questo prova la seconda parte dell'enunciato.

Al variare di P sulla circonferenza, il versore direzione della generatrice r_P forma con il versore direzione di n un angolo che varia tra 0 e π , quindi il punto

d'intersezione R tra le due rette si muove sulla retta n da un estremo all'altro. Questo prova che ogni punto R della retta n sta su una generatrice. \square

In Fig. 17 si vede la generatrice del nastro di Möbius al variare del punto di

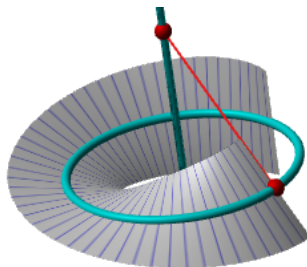


FIGURA 17. Apri il file per vedere il filmato

incidenza con la retta n .

Vediamo alcune conseguenze:

PROPOSIZIONE X.4.2. *Sul nastro di Möbius esteso giacciono i lati di infiniti triangoli, con un lato sulla retta n e il vertice sulla retta a .*

Dimostrazione. Si consideri una coppia P, Q di punti diametralmente opposti sulla circonferenza. Le due generatrici, r_P e r_Q , passanti per essi sono incidenti alla retta a , luogo di autointersezione, in un punto R e ciascuna di esse è incidente alla retta n rispettivamente nei punti P' e Q' . Quindi le rette che formano il lati del trinagolo $P'Q'R$ sono le due generatrici e la retta n e stanno sulla superfice. \square

N.B. Evidentemente i lati di questi triangoli stanno sulla superfice, non il loro interno!

In Fig. 18 si vede uno di questi triangoli.

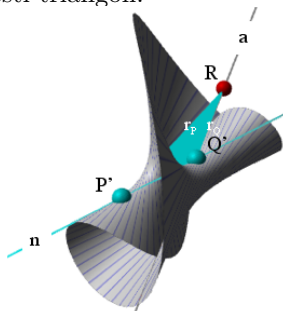


FIGURA 18. Apri per vedere il filmato

Ora siamo in grado di descrivere le autointersezioni.

PROPOSIZIONE X.4.3. *Sia R un punto della retta a di autointersezione. Per R passano esattamente due fogli della superfice, S' e S'' , ciascuno dei quali è privo di punti singolari. Inoltre esistono due punti, P e Q , della circonferenza, diametralmente opposti, e le relative generatrici r_P, r_Q sono incidenti in R e giacciono rispettivamente sui fogli S' e S'' . Il piano tangente a S' in R è individuato dalle*

rette r_P ed a ; il piano tangente a S'' in R è individuato dalle rette r_Q ed a ; i due piani sono distinti e si tagliano lungo la retta a .

In Fig. 19 è rappresentata schematicamente la situazione; è anche messo in evidenza

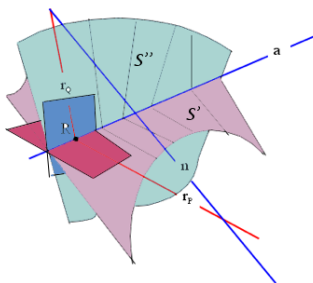


FIGURA 19

il triangolo $P'Q'R$ formato dalle due generatrici e dalla retta n .

Dimostrazione. Per ogni punto R della retta a passano due generatrici relative a due punti, P e Q , della circonferenza, diametralmente opposti. Sia C' un piccolo arco di circonferenza che contiene P . Le generatrici che passano per i punti di C' formano una superficie rigata S' che è una porzione del nastro di Möbius esteso. Si noti che in C' non ci sono coppie di punti diametralmente opposti e quindi S' non possiede autointersezioni, dunque è una superficie priva di punti singolari. Allo stesso modo, considerando un piccolo arco di circonferenza C'' che contiene Q , costruiamo S'' . Le due superfici si tagliano lungo un segmento della retta a e in particolare si tagliano in R .

Poiché R è un punto regolare di S' e su S' stanno la retta r_P e un segmento di a , incidenti in R , questi individuano il piano tangente ad S' nel punto R . Analogamente la retta r_Q e la retta a individuano il piano tangente ad S'' nel punto R .

I due piani tangenti sono distinti. Infatti, in caso contrario il piano conterrebbe le rette r_P , r_Q e a . Ma se contiene r_P e r_Q , deve contenere anche la retta n , incidente ad entrambe in punti distinti. Dunque a ed n sarebbero complanari, contro il fatto evidente (si pensi a come sono definite) che sono sghembe.

Resta solo da vedere che per R non passa un terzo foglio. Questo ulteriore foglio, contenuto comunque nel nastro di Möbius esteso, sarebbe fatto di generatrici, diverse da quelle che compongono S' e S'' , perché gli unici punti di autointersezione sono su a . Dunque su questo fantomatico foglio ci sarebbe una generatrice che passa per R , mentre noi sappiamo che r_P e r_Q sono le uniche generatrici che passano per R . \square

X.5. Esistono altre rette sul nastro di Möbius?

A questo punto è abbastanza naturale chiedersi se il nastro di Möbius, o meglio la sua estensione a superficie rigata contiene altre rette. La risposta è data dalla seguente

PROPOSIZIONE X.5.1. *Oltre alle generatrici e alle rette a ed n il nastro di Möbius esteso non contiene altre rette.*

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo assumendo che esista una retta r che giace sul nastro di Möbius esteso, diversa da quelle che già conosciamo.

Passo 1. *La retta r non è complanare nè ad n , nè ad a .*

Infatti per ogni punto di r passa una generatrice e tutte le generatrici, tranne una (quella perpendicolare al piano della circonferenza), incontrano la retta n . Dunque, se le rette r ed n fossero complanari, ci sarebbero infinite generatrici incidenti ad entrambe le rette e dunque giacenti sul medesimo piano. Assurdo perché sappiamo che al massimo ci sono due generatrici complanari (generatrici che passano per punti della circonferenza diametralmente opposti).

Lo stesso argomento permette di concludere che r ed a non sono complanari, infatti tutte le generatrici, tranne due (quelle che formano un angolo di 45° con il piano della circonferenza), incontrano a .

Passo 2. Poiché r ed a sono sghembe, esiste una coppia, α e ρ , di piani paralleli, il primo che contiene a e il secondo che contiene r (la Fig. 20 può essere utile per seguire la dimostrazione).

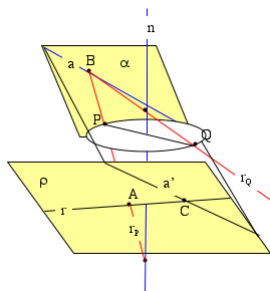


FIGURA 20

Sia A un punto di r . Per A passa una generatrice r_P , che passa anche per un punto P della circonferenza. Questa generatrice incontrerà la retta a in un punto B . Questa affermazione non è esatta, in effetti esistono due generatrici che non incontrano la retta a , tuttavia - considerato che per punti di r diversi passano generatrici diverse - sostituendo ad A un altro punto di r , possiamo assumere che r_P non sia una di queste due e dunque sia incidente ad a . Sia Q il punto della circonferenza diametralmente opposto a P , la generatrice r_Q , che passa per Q , passa anche per B . Se sfortunatamente r_Q giacesse sul piano α , tuttavia essa sarebbe l'unica generatrice su questo piano (due generatrici sono complanari se e solo se sono relative a punti diametralmente opposti); quindi - sostituendo ad A un altro punto di r possiamo assumere che r_Q non stia su α . Sia β il piano individuato dalle rette a e r_Q . Tale piano taglia su α la retta a e sul piano ρ una sua parallela a' . Dunque a' e r sono complanari (stanno entrambe su ρ) e non sono parallele (altrimenti r sarebbe parallela anche ad a), dunque sono incidenti in un punto C . Per C passa una generatrice r_S . Ogni generatrice è incidente ad a oppure è ad essa parallela, dunque ogni generatrice è complanare ad a . Il piano che contiene a ed r_S è evidentemente β (che contiene a e C). Allora r_S e r_Q sono complanari. Restano due possibilità: $r_S = r_C$ oppure $r_S = r_P$. La prima è esclusa, perché in tal caso, r_P in A e r_Q in C , sarebbero entrambe incidenti ad r ; allora r starebbe sul piano comune a r_P e r_Q (il piano per P e Q perpendicolare al piano della circonferenza) che contiene n ; assurdo perché r ed n non sono complanari. Anche il secondo caso è escluso, perché allora β conterrebbe r_P , r_Q e a , ma anche n (perché questa è incidente a r_P e r_Q); contro il fatto che a ed n sono sghembe. \square