CHAPTER 1

Le quadriche

1. Iperboloide ellittico o iperboloide a due falde

1.1. Generalità.

9.1 Definizione 1.1. *La superfice generata dalla rotazione di un'iperbole $\mathcal{I}$ attorno al proprio asse focale è una superfice a due falde detta* iperboloide ellittico o a due falde, di rotazione. *Presa una retta r perpendicolare all'asse di rotazione procediamo ad una dilatazione di un fattore* a *nella dirazione di r. La superfice che così si ottiene si chiama* iperboloide ellittico *o* iperboloide a due falde*.*

In Fig. f9.1 1a si vede la costruzione per rotazione dell'iperboloide ellittico di ro-

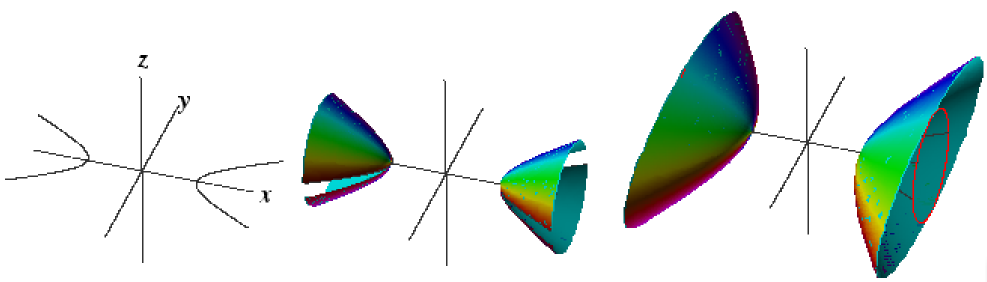

Figure 1. Apri il file f9.1

tazione, in Fig. f9.1 1b si vede l'iperboloide ellittico più generale. Aprendo il filmato si vede prima la costruzione per rotazione, poi la dilatazione. Per fissare le idee si sono prese coordinate in modo che l'iperbole $\mathcal{I}$ giaccia sul piano xy e gli assi coordinati siano gli assi di simmetria dell'iperbole; in particolare l'asse delle x è l'asse focale attorno cui ruota la curva. La dilatazione è fatta in direzione dell'asse delle y.

L'iperboloide ellittico possiede tre piani di simmetria che si tagliano lungo tre assi di simmetria, questi ultimi si incontrano nel centro di simmetria. (vedi Fig. f9.2 2).

1.2. L'equazione dell'iperboloide ellittico.

9.2 Proposizione 1.2. *Assegnato un iperboloide ellittico $\mathcal{I}$ è sempre possibile scegliere un sistema di coordinate cartesiane ortogonali tale che l'equazione cartesiana sia della forma*

e9.1
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1 \tag{1.1}$$

dove $a, b, c > 0$ e $a \geq b$.

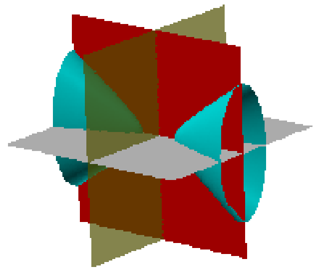

FIGURE 2 f9.2

Dimostrazione. Consideriamo la superfice $\mathcal{S}$ di equazione

e9.2 (1.2)
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2}-1.$$

La sezione con il piano orizzontale $z=k$ ha equazione

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{k^2}{c^2}-1 \\ z=k \end{cases}$$

che rappresenta una circonferenza con centro sull'asse della z se $|k|>1$, un punto dell'asse delle z se $k=\pm 1$, l'insieme vuoto se $|k|<1$. Dunque $\mathcal{S}$ è una superfice di rotazione attorno all'asse delle z.

La sezione con il piano $y=0$ ha equazione

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$$

e rappresenta un'iperbole che ha l'asse delle z come asse focale.

Dunque è la superfice ottenuta ruotando un'iperbole attrono al proprio asse focale.

Contriamo di un fattore B, $0<B<1$ nella direzione dell'asse delle y, otteniamo

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=By \\ z'=z \end{cases}$$

e l'equazione (1.2) diventa

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{a^2B^2}=\frac{z'^2}{c^2}-1.$$

Quest'ultima è della forma di (1.1) come voluto: basta porre $b:=aB$. □

9.3 COROLLARIO 1.3. *L'iperboloide ellittico è una quadrica.*

1.3. Sezioni piane di un iperboloide ellittico. Per studiare le sezioni piane di un iperboloide ellittico cominciamo con l'osservare

9.4 LEMMA 1.4. *Un iperbolide ellittico non contiene rette e le sue sezioni piane sono coniche non degeneri.*

Dimostrazione. Uno dei tre piani di simmetria di un iperboloide ellittico $\mathcal{I}$ non tocca l'iperboloide e le due falde si trovano, rispetto ad esso, in due semispazi diversi (cfr. il piano giallo in Fig. 2). Se in particolare l'iperboloide è di rotazione, una retta r che fosse contenuta in $\mathcal{I}$ non toccherebbe questo piano e dunque giacerebbe su di un piano parallelo all'asse di rotazione. Il che è assurdo perché i piani paralleli all'asse di rotazione tagliano sull'iperboloide un parallelo (una circonferenza), un punto oppure la sezione è vuota.

Abbiamo così dimostrato la prima parte dell'enunciato nel caso di un iperboloide ellittico di rotazione. Questo si estende subito al caso generale, infatti, per definizione un iperboloide ellittico si ottiene, mediante una trasformazione affine, da un iperboloide di rotazione e le trasformazioni affini mandano rette in rette.

Per concludere osserviamo che un iperboloide ellittico è una quadrica, le sezioni piane di una quadrica sono coniche, le coniche degeneri contengono rette. □

Cominciamo col considerare il caso particolare di un iperboloide ellittico di rotazione $\mathcal{I}$. Sia α un piano qualsiasi, vogliamo sapere come è fatta la sezione $\alpha \cap \mathcal{I}$.

Sia β un piano perpendicolare ad α che contiene l'asse di rotazione[1]; se disegniamo la sezione con il piano β (cfr. Fig. 3a) vediamo l'iperbole che genera

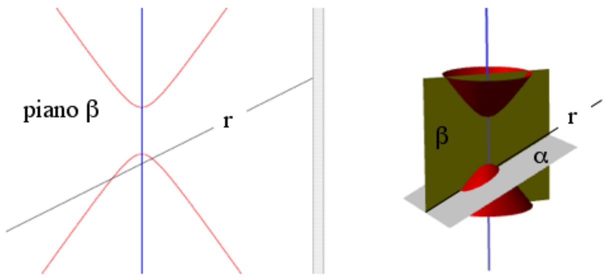

FIGURE 3. a - b f9.3

l'iperboloide, la retta r intersezione dei due piani e dobbiamo immaginare che il piano α esca perpendicolarmente dal foglio lungo la retta r (cfr. Fig. 3b).

Ora studiamo la conica $\mathcal{Q}$ intersezione tra l'iperboloide $\mathcal{I}$ e il piano α in relazione all'inclinazione della retta r rispetto agli asintoti dell'iperbole.

Si osservi che la conica $\mathcal{Q}$ (che in Fig. 3) è un'ellisse, ha r come asse di simmetria. Distinguiamo tre casi

(1) *la retta r è più inclinata degli asintoti*. In questo caso la retta r taglia l'iperbole in due punti P e Q, uno su ciascuno dei due archi che la compongono (cfr. Fig. 5a dove sono rappresentate alcune di queste rette, tra loro parallele).

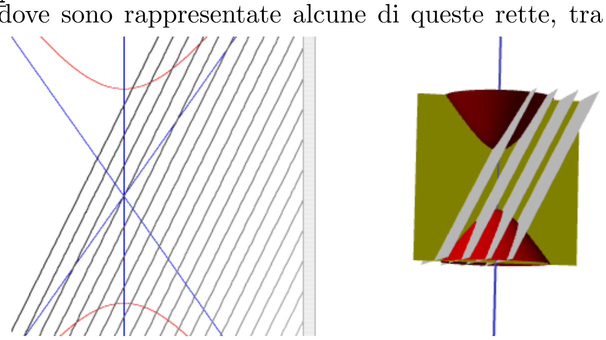

FIGURE 4. a - b f9.4

Quindi la conica $\mathcal{Q}$ passa per P e Q ed è composta da due distinti archi uno sulla

[1] Ricordo che assegnato un piano α ed una retta r esiste sempre un piano β ortogonale ad α che contiene r. Infatti se r è a sua volta perpendicolare ad α, allora come piano β posso scegliere un qualunque piano del fascio di asse r. Altrimenti mando per un punto P di r la perpendicolare n ad α; il piano β individuato dalle rette r ed n è il piano cercato (fare uno schizzo per capire).

falda che contiene P, l'altro sulla falda che contiene Q. Dunque $\mathcal{Q}$ non può che essere un'iperbole.

(2) *la retta r è meno inclinata che gli asintoti.* In questo caso la retta r taglia l'iperbole in due punti P e Q che stanno sulla medesima falda, oppure è tangente in un punto ovvero non tocca l'iperbole(cfr. Fig. ??a dove sono rappresentate alcune

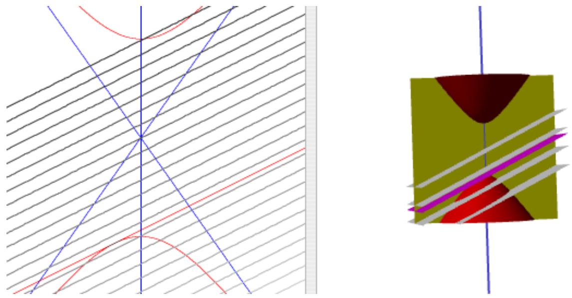

Figure 5. a - b f9.5

di queste rette, tra loro parallele). Nel primo caso la conica $\mathcal{Q}$ è un'ellisse, nel secondo il piano è tangente e la conica di riduce ad un punto, nel terzo caso $\mathcal{Q}$ è vuota.

(3) *la retta r è parallela agli asintoti.* In questo caso la retta r taglia l'iperbole in un punto P oppure non tocca l'iperbole(cfr. Fig. ??a dove sono rappresentate

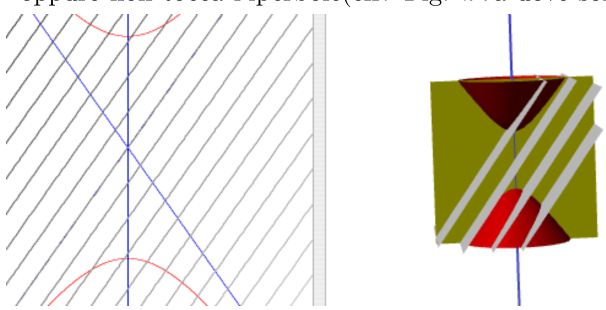

Figure 6. a - b f9.6

alcune di queste rette, tra loro parallele). Nel primo caso la conica $\mathcal{Q}$ è una parabola (unica conica degenere in cui l'asse di simmetria tocca la conica in un sol punto), nel secondo caso $\mathcal{Q}$ è vuota.

Per trarre una conclusione osserviamo che se $\mathcal{I}'$ è un iperboloide ellittico esso è ottenuto da un iperboloide ellittico di rotazione mediante una trasformazione affine che manda piani in piani e coniche non degeneri in coniche non degeneri dello stesso tipo (parabole, ellissi e iperboli).

La seconda osservazione da fare è che il caso (1) corrisponde al fatto che il piano α taglia sul cono circolare retto generato dalla rotazione degli asintoti un iperbole o una coppia di rette incidenti; il caso (2) corrisponde al fatto che il piano α taglia sul cono un ellisse oppure il vertice; infine il caso (3) corrisponde al fatto che il piano α taglia una parabola oppure una retta.

La terza osservazione da fare è che la trasformazione affine che muta $\mathcal{I}$ in $\mathcal{I}'$ manda il cono degli asintoti di $\mathcal{I}$ nel cono degli asintoti di $\mathcal{I}'$ (cono generato dagli asintoti delle iperboli che si ottengono sezionando $\mathcal{I}'$ con piani che passano per l'asse).

Possiamo così concludere

9.5 Teorema 1.5. *Sia $\mathcal{I}$ un iperboloide ellittico e sia α un piano.*

- *Se α taglia sul cono degli asintoti un'iperbole o una coppia di rette incidenti, allora taglia sull'iperboloide $\mathcal{I}$ un'iperbole.*
- *Se α taglia sul cono degli asintoti un'ellisse, allora taglia sull'iperboloide $\mathcal{I}$ un'ellisse oppure è tangente ad $\mathcal{I}$ in un punto (unico punto di intersezione tra piano e iperboloide) oppure non taglia nulla.*
- *Se α taglia sul cono degli asintoti una parabola, allora taglia sull'iperboloide $\mathcal{I}$ una parabola*
- *Se α taglia sul cono degli asintoti un punto o una retta, allora non taglia nulla sull'iperboloide $\mathcal{I}$.*

9.6 Corollario 1.6. *Tutti i punti di un'iperboloide ellittico sono ellittici (da cui il nome della superfice).*

Dimostrazione. Tutte le sezioni, e dunque in particolare quelle normali, sono coniche non degeneri; pertanto le sezioni normali hanno sempre curvatura non nulla. Gli unici punti per cui tutte le sezioni normali sono non nulle sono i punti ellittici. □

9.5

9.6

---

2. Iperboloide iperbolico o iperboloide ad una falda

2.1. Definizione e simmetrie. Ricordo che in un'iperbole possiede due assi di simmetria, uno che passa per i fuochi e i vertici, l'altro ad esso perpendicolare.

9.7 DEFINIZIONE 2.1. *La superfice di rotazione* (vedi Fig. 7) *che si ottiene ruotando*

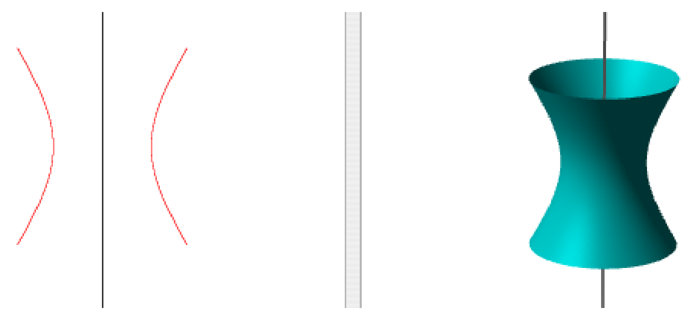

FIGURE 7 f9.7

un'iperbole attorno all'asse a *perpendicolare a quello focale si chiama* iperboloide iperbolico di rotazione. *I due rami dell'iperbole sono simmetrici rispetto all'asse* a *e dunque ciascuno di essi - contrariamente al caso dell'iperboloide ellittico - genera la stessa superfice, che perciò è composta di un'unica falda.*

Dilatando o contraendo di un fattore k la superfice in direzione di una retta perpendicolare all'asse di rotazione si trova un iperboloide iperbolico.

In Fig. 8 sono illustrate la contrazione e la dilatazione, secondo la direzione indicata dalle frecce, di un iperboloide iperbolico di rotazione (in celeste) che generano un iperboloide iperbolico di tipo generale (in rosso).

Dalla costruzione dovrebbe essere evidente che

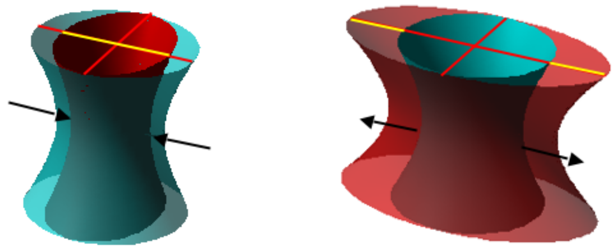

FIGURE 8. Apri il file per vedere cambiare il coefficiente di dilatazione /contrazione. f9.8

per un iperboloide iperbolico di rotazione il piano α perpendicolare all'asse a *di rotazione e passante per il centro dell'iperbole e tutti i piani passanti per l'asse* a *sono piani di simmetria.* (Cfr. Fig. f9.9 9a).

Mentre

per un iperboloide iperbolico di tipo generale ci sono tre piani di simmetria (vedi Fig. f9.9 9b). *Sono i piani individuati da tre rette per il centro dell'iperbole e due a due ortogonali: l'asse di rotazione, la retta che passa per il centro dell'iperbole e ha la stessa direzione della dilatazione o contrazione e la retta, sempre per il centro, ortogonale ad entrambe.*

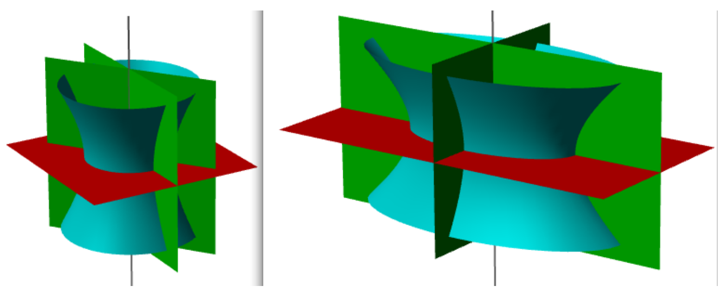

FIGURE 9. a - b In Fig.a in verde due piani di simmetria dell'iperboloide di rotazione (tutti i piani per l'asse sono di simmetria); in Fig.b i tre piani si simmetria dell'iperboloide di tipo generale. f9.9

2.2. Equazione cartesiana dell'iperboloide iperbolico.

9.8 PROPOSIZIONE 2.2. *In un opportuno sistema di coordinate l'equazione cartesiana dell'iperboloide iperbolico è della forma*

e9.3 (2.1)
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

dove $a \geq b > 0$ *e* $c > 0$.

Dimostrazione. Vediamo che la superfice $\mathcal{S}$ di equazione

e9.4 (2.2)
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

è un iperboloide iperbolico di rotazione. Le sezioni con piani $z = k$ hanno equazione

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2(\frac{k^2}{c^2} + 1) \\ z = k \end{cases}$$

e dunque sono circonferenze con centro nel punto $(0, 0, k)$. Pertanto $\mathcal{S}$ è una superfice di rotazione attorno all'asse delle z. Tagliando con il piano $y = 0$ troviamo la generatrice:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

che è, come si voleva, un'iperbole di cui l'asse delle z è asse di simmetria ortogonale all'asse focale.

Se introduciamo una dilatazione/contrazione di un fattore k in direzione dell'asse delle y, dobbiamo sostituire in (e9.4 2.2) y/k al posto di y e troviamo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2k^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

che - posto $b = ak$ - ci restituisce (e9.3 2.1). □

Conseguenza interessante è che

9.9 Corollario 2.3. *L'iperboloide iperbolico è una quadrica.*

2.3. L'iperboloide iperbolico come superfice rigata. Cominciamo con la seguente

9.10 Proposizione 2.4. *Tutti i punti di un iperboloide iperbolico sono iperbolici* (da cui il secondo termine del nome della superfice).

Dimostrazione. Si tratta di una superfice di rotazione il cui meridiano è un ramo di iperbole, quindi la curvatura del meridiano non è mai nulla. La tangente al meridiano non è mai perpendicolare all'asse di rotazione (che è l'asse dell'iperbole perpendicolare all'asse polare), quindi anche la curvatura normale del parallelo non è mai nulla. Le due curvature normali (curvature principali) hanno segno discorde perché la normale al parallelo è rivolta verso l'asse di rotazione e la normale al meridiano è rivolta dalla parte opposta. Pertanto tutti i punti sono iperbolici.

In altri termini siamo esattamente nella situazione degli archi $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ dell'Esercizio 8.21 ??. □

9.11 Esercizio 2.5. *Mostrare che tutti i punti di un iperboloide iperbolico sono iperbolici.*

Soluzione. Vedi la dimostrazione della Proposizione precedente. □

Ne segue questo sorprendente

9.12 Corollario 2.6. *L'iperboloide iperbolico di rotazione è la superfice generata dalla rotazione di una retta sghemba rispetto all'asse di rotazione.*

Dimostrazione. Sia P un punto di un iperboloide iperbolico $\mathcal{I}$. Poiché P è un punto iperbolico, il piano τ_P, tangente all'iperboloide in P, taglia sull'iperboloide una curva che possiede, in P, due tangenti distinte. Tale curva, poiché $\mathcal{I}$ è una quadrica, deve essere una conica e l'unica conica che presenta un punto con due tangenti distinte è la conica degenere formata da due rette incidenti in P. In conclusione

> *il piano tangente taglia l'iperboloide iperbolico lungo due rette incidenti nel punto.*

Questo già ci dice che per ogni punto di un iperboloide passano due rette. Supponiamo ora che $\mathcal{I}$ sia un iperboloide di rotazione e sia r una delle due rette di $\mathcal{I}$ che passano per il punto P. Se ruotiamo la retta r attorno all'asse dell'iperboloide otteniamo una superfice $\mathcal{S}$; per concludere basta vedere che $\mathcal{S} = \mathcal{I}$.

La superfice $\mathcal{S}$ è formata dai paralleli che passano per punti di r, dunque - poiché $r \subset \mathcal{I}$ - da paralleli di $\mathcal{I}$. D'altra parte poiché r non è perpendicolare all'asse (infatti i piani perpendicolari all'asse tagliano $\mathcal{I}$ lungo un parallelo, non lungo una retta!) essa incontra tutti i piani perpendicolari all'asse e dunque tutti i paralleli di $\mathcal{I}$, dunque tutti i paralleli di $\mathcal{I}$ stanno su $\mathcal{S}$.

Resta solo da vedere che r e l'asse di rotazione sono rette sghembe. Ma se fossero incidenti $\mathcal{S}$ sarebbe un cono e se fossero parallele sarebbe un cilindro. □

9.13 Esercizio 2.7. *Mostrare che l'iperboloide iperbolico di rotazione è la superfice generata dalla rotazione di una retta sghemba rispetto all'asse.*

Soluzione. Vedi la dimostrazione del Corollario precedente. □

In Fig. 10 si vede un iperboloide iperbolico di rotazione generato dalla rotazione

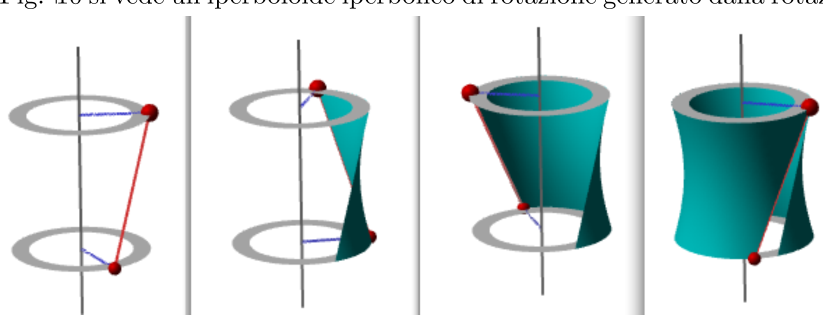

Figure 10 f9.10

di una retta attorno ad un asse. Aprendo il file è possibile modificare la retta e vedere il cilindro e il cono come casi limite di un iperboloide.

9.14 Proposizione 2.8. *Un iperboloide iperbolico è una superfice doppiamente rigata. Vale a dire che esistono due famiglie di rette $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ contenute nell'iperboloide e che per ciascun punto dell'iperboloide passa una ed una sola retta di ciascuna famiglia.*

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che l'iperboloide sia di rotazione. Preso un qualunque punto P dell'iperboloide, il piano tangente in P taglia sull'iperboloide due rette r ed s e sappiamo che l'iperboloide è la superfice generata dalla rotazione di r (o anche di s) attorno all'asse a. Indichiamo con r_θ la posizione assunta dalla retta r quando ha ruotato di un angolo θ attorno all'asse (dunque $r_0 = r$). La famiglia $\mathcal{F}$ è costituita dalle rette r_θ, con $0 \le \theta < 2\pi$. L'iperboloide è l'unione di queste rette che sono due a due disgiunte, dunque per ciascun punto dell'iperboloide passa una ed una sola retta della famiglia $\mathcal{F}$. Allo stesso modo, considerando il moto della retta s si definisce una famiglia $\mathcal{G}$ di rette e per ciascun punto dell'iperboloide passa una ed una sola retta della famiglia $\mathcal{G}$.

Ora si tratta di estendere questo risultato ad un qualsiasi iperboloide (non di rotazione). Sia dunque $\mathcal{I}$ un iperboloide iperbolico. Per definzione esso è ottenuto a partire da un iperboloide iperbolico di rotazione $\mathcal{J}$ mediante una dilatazione /contrazione in un a certa direzione, cioè mediante una trasformazione affine. Le trasformazioni affini mandano rette in rette e dunque le famiglie $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ di rette che descrivono $\mathcal{J}$ vengono trasformate in due famiglie di rette $\mathcal{F}'$ e $\mathcal{G}'$ che descrivono $\mathcal{I}$. Infine preso un punto $P \in \mathcal{I}$ esiste un corrispondente (secondo la trasformazione affine) punto $Q \in \mathcal{J}$. Per Q passa una ed una sola retta di ciascuna delle due famiglie $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$; dunque a queste rette r ed s corrisponderanno due rette r' ed s', in $\mathcal{F}'$ e $\mathcal{G}'$ rispettivamente, che passano perciò per P. □

9.15 Esercizio 2.9. *Mostrare che un iperboloide iperbolico è una superfice doppiamente rigata. Vale a dire che esistono due famiglie di rette $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ contenute nell'iperboloide e che per ciascun punto dell'iperboloide passa una ed una sola retta di ciascuna famiglia.*

Soluzione. Vedi la dimostrazione della Proposizione precedente. □

In Fig. 11 si vede un'iperboloide iperbolico (non di rotazione) generato dal

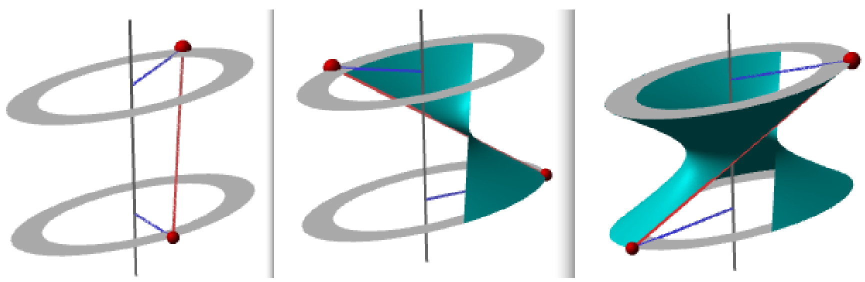

Figure 11 f9.11

moto di una retta. Aprendo il file è possibile modificare l'iperboloide.

In Fig. 12 vediamo altre immagini di iperboloide che evidenziano la doppia

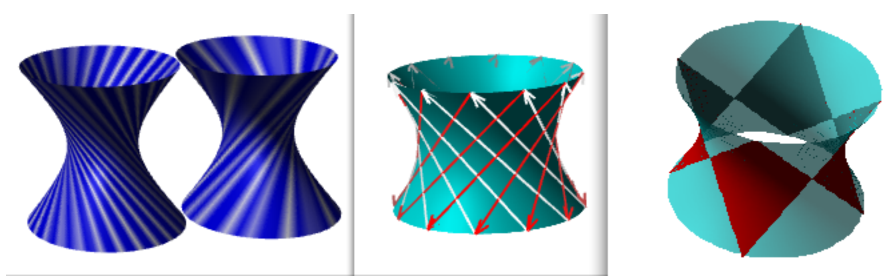

Figure 12 f9.12

rigatura.

C'è un fatto interessante che non vogliamo approfondire, ma di cui è opportuno dare cenno.

9.16 OSSERVAZIONE 2.10. *Le uniche superfici doppiamente rigate sono: il piano, i paraboloidi iperbolici (o a sella) e gli iperboloidi iperbolici (o a una falda).*

9.16.1 ESERCIZIO 2.11. *Mostrare che un iperboloide non contiene altre rette oltre quelle delle due famiglie di rette che lo rigano doppiamente.*

Soluzione. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che esista una retta t, contenuta nell'iperboloide, che non appartiene a nessuna delle due famiglie $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ di rette che rigano la superfice.

Sia P un punto di t. Poiché P è un punto dell'iperboloide, per P passa una retta r della famiglia $\mathcal{F}$ e una retta s della famiglia $\mathcal{G}$. Complessivamente per P passano tre rette distinte r, s e t. Dunque ci sono 3 direzioni tangenti in P con curvatura normale nulla. Allora P è planare, perché solo negli ombelichi ci possono essere più di due direzioni con la stessa curvatura normale. Assurdo, perché i punti di un iperboloide iperbolico sono tutti iperbolici. □

2.4. Moto del piano tangente lungo una retta di un iperboloide iperbolico.

9.17 PROPOSIZIONE 2.12. *Sia r una retta dell'iperboloide iperbolico $\mathcal{I}$. I piani del fascio di asse r sono tutti, tranne uno, tangenti all'iperboloide e lo tagliano lungo due rette incidenti; il restante piano taglia sull'iperboloide due rette parallele.*

Dimostrazione. [2] Assumiamo dapprima che l'iperboloide sia di rotazione.

Sia r una retta di $\mathcal{I}$, diciamo della famiglia $\mathcal{F}$. Per ogni punto P di r passa una ed una sola retta s dell'altra famiglia $\mathcal{G}$ che riga l'iperboloide. Le rette r ed s individuano un piano che contiene le due direzioni tangenti r ed s all'iperboloide in P. Dunque tale piano coincide con il piano τ_P, tangente all'iperboloide in P. Fissato un punto P_0 sulla retta r, conduciamo per esso la parallela alla retta s, ovvero applichiamo in P_0 il versore $\vec{v}_s$ direzione della retta s (vedi Fig. 13). Tale

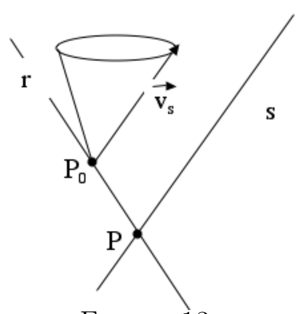

FIGURE 13 f9.15

versore giace sul piano τ_P, questo significa che per descrivere i piani tangenti τ_P, al

[2] Ci sembra troppo pretendere dallo studente la conoscenza di questa lunga dimostrazione, che tuttavia si fonda su argomenti del tutto elemetari. Però, negli Esercizi 2.14 e 3.2 è necessaria una buona conoscenza dell'enunciato.

variare di P su r, invece di utilizzare la retta r e le varie rette s, posso considerare la retta r e via via i versori $\vec{v}_s$ applicati nel punto P_0.

Al variare del punto P la retta s ruota attorno all'asse dell'iperboloide (che infatti può essere descritto come la superfice generata da questa rotazione) e il suo versore direzione $\vec{v}_s$ descriverà un cono (cfr. Fig. 13). Dunque ogni generatrice di questo cono individua, assieme alla retta r, un piano tangente τ_P.

Si consideri che la retta r e l'asse a dell'iperboloide sono tra loro sghembe, dunque esiste un'unica coppia di piani α e β, paralleli, tali che r sta su α e a sta su β. Sia α' il piano simmetrico di α rispetto a β e sia r' la retta di α' simmetrica ad r rispetto a β (vedi Fig. 14). Ricordiamoci che il piano β, contenendo l'asse

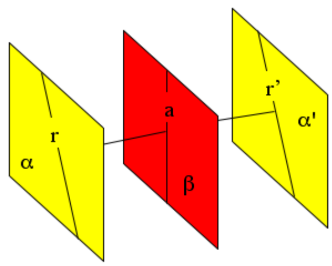

FIGURE 14 f9.16

di rotazione, è un piano di simmetria per l'iperboloide e dunque, poiché r sta sull'iperboloide, anche r' ci sta. Tuttavia è eivdente che ruotando la retta r attorno all'asse non potremo mai ottenere la retta r', che pertanto appartiene alla famiglia $\mathcal{G}$. Ma r ed r' hanno lo stesso versore direzione, dunque esiste una retta (è la retta r') della famiglia $\mathcal{G}$ il cui versore direzione coincide con $\vec{v}_r$ e pertanto la Fig. 13 è sbagliata: il cono è tangente alla retta r (vedi Fig. 15).

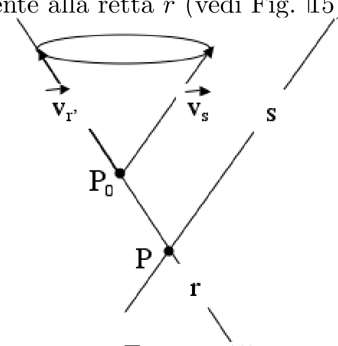

FIGURE 15 f9.17

Sia γ un piano del fascio di asse r. Se γ non è tangente al cono, allora taglia sul cono la generatirice r ed un versore $\vec{v}_s$, pertanto è il piano tangente individuato dalle rette r ed s.

Il piano γ_0 che contiene le rette r ed r' in Fig. 14 appartiene al fascio di asse r, non è tangente all'iperboloide (altrimenti lo taglierebbe lungo due rette incidenti) dunque è il piano mancante.

Resta da esendere il risultato al caso di un iperboloide iperbolico di tipo generale. Dunque abbiamo un iperboloide iperbolico di tipo generale $\mathcal{J}$ che è ottneuto, mediante un a trasformazione affine, da un iperboloide iperbolico $\mathcal{I}$ di rotazione.

Prendiamo una retta r' di $\mathcal{J}$, questa corrisponde ad una retta r di $\mathcal{I}$. I fasci di piani di asse r ed r' si corrispondono nella trasformazione affine, e sed il piano γ passante per r taglia su $\mathcal{I}$ due rette incidenti o due rette parallele, lo stesso farà su $\mathcal{J}$ il corrispondente piano γ'. □

Questo risultato presenta diversi motivi di interesse.

9.18 Corollario 2.13. *Se ci muoviamo lungo una retta r di un iperboloide iperbolico, mantenendoci sempre ritti sul piano tangente (cioè diretti come il versore normale) allora, percorrendo tutta la retta da $-\infty$ a $+\infty$ siamo costretti a compiere mezzo giro intorno alla retta r.*

Il significato è rappresentato in Fig. 16 dove si vedono 3 fotogrammi del moto di

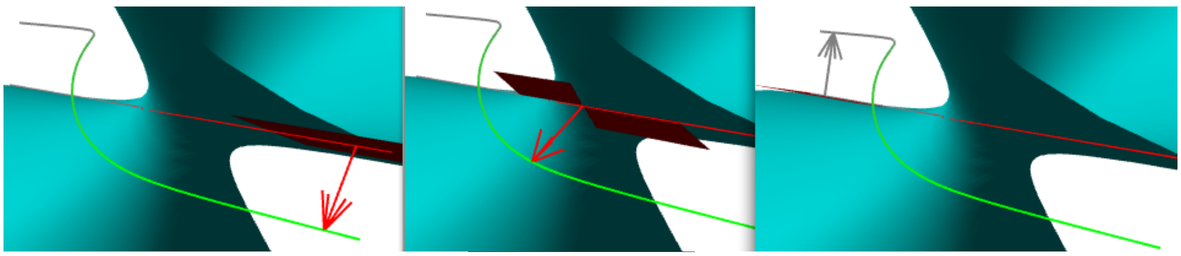

Figure 16. Apri il filamto per vedere il moto f9.18

un punto lungo una retta di un enorme iperboloide iperbolico (enorme per poter vedere un significativo tratto della retta). Come si osserva il versore normale al piano durante il moto ruota attorno alla retta di quasi mezzo giro (quasi perché per quanto lungo il tratto di retta rappresentato in figura, è solo un segmento).

9.19 Esercizio 2.14. *Giustificare l'enunciato del Corollario 2.13.*

Soluzione. Sappiamo (dalla Proposizione 2.12) che, data una retta r su un iperboloide, i piani del fascio di asse r sono tutti, tranne uno, tangenti all'iperboloide. Questo significa che percorrendo la retta ritto sul piano tangente, il piano varierà tra tutti i piani del fascio, tranne uno, e quindi il piano (e il versore normale con lui) dovrà ruotare di 180° con lui. Evidentemente il piano escluso corrsiponde alla posizione limite del piano tangente, quanodo il punto di tangenza va all'infinito (ad un'estremità o l'altra della retta r). □

Ritroveremo questo risultato in un contesto più generale quando tratteremo delle superfici rigate.

3. Sezioni piane di un iperboloide iperbolico

Un'altra conseguenza importantissima della Proposizione 2.12 è il seguente corollario. Teniamo presente che poiché un iperboloide iperbolico è una quadrica, tutte le sue sezioni piane sono coniche e, a priori, potrebbero essere: ellissi, parabole, iperboli o, se degeneri, coppie di rette incidenti, coppie di rette parallele, rette (doppie).

9.20 Corollario 3.1. *Se una sezione piana di un iperboloide iperbolico è una conica degenere, allora*
- *si tratta di una coppia di rette incidenti in un punto P e, in tal caso, il piano sezionante è il piano τ_P, tangente all'iperboloide in P.*

oppure
- *si tratta di una coppia di rette parallele*

9.21 Esercizio 3.2. *Giustificare il Corollario 3.1.*

Soluzione. Sia α un piano che taglia l'iperboloide iperbolico $\mathcal{I}$ lungo una conica degenere. Questa contiene almeno una retta r e il piano α appartiene al fascio $\mathcal{H}$ dei piani di asse r.

Sappiamo (Proposizione 2.12) che tutti i piani del fascio $\mathcal{H}$ sono tangenti all'iperboloide, tranne uno che taglia su di esso due rette parallele. Invece, quelli tangenti tagliano sull'iperboloide due rette incidenti, perché un piano tangente in un punto iperbolico (e i punti di $\mathcal{I}$ sono iperbolici) taglia sulla superfice una curva $\mathcal{C}$ che, nel punto di tangenza, possiede due rette tangenti (le direzioni di curvaura normale nulla). Ma questa curva $\mathcal{C}$ deve essere una conica, perché l'iperboloide è una quadrica, e l'unica conica che presenta in un punto due tangenti è una coppia di rette incidenti.

In conclusione il piano α che sta in $\mathcal{H}$ o taglia sull'iperboloide due rette incidenti oppure due rette parallele. $\square$

Si tratta di specificare un po' meglio la natura di questi misteriosi piani che tagliano sull'iperboloide coppie di rette parallele.

9.22 Proposizione 3.3. *Un piano taglia su un iperboloide iperbolico una coppia di rette parallele se e solo se è tangente al cono degli asintoti.*

Prima di occuparci della dimostrazione osserviamo che se, nel costruire un iperboloide iperbolico di rotazione, facciamo ruotare anche gli asintoti dell'iperbole (vedi Fig. 17) ci procuriamo, oltre all'iperboloide il cono (circolare retto) degli

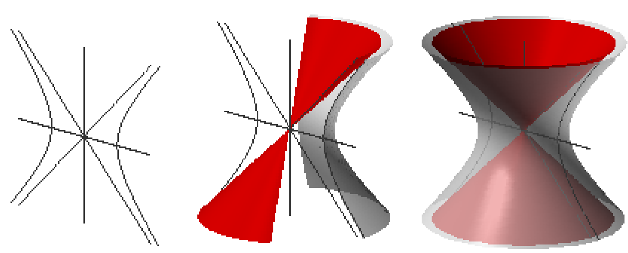

Figure 17 f9.19

asintoti. Se poi deformiamo l'iperboloide di rotazione dilatando/contraendo in una certa direzione, possiamo deformare allo stesso modo il cono degli asintoti e otteniamo un cono ellittico (cfr. Fig. ??)

Dimostrazione della Proposizione 3.3. Sia $\mathcal{I}$ un iperboloide di rotazione e sia α un piano qualsiasi. Esiste un piano β che contiene l'asse a ed è ortogonale ad α. Possiamo allora immaginare che β sia il piano della lavagna; tale piano su $\mathcal{I}$ taglia un iperbole che genera l'iperboloide, sul cono degli asintoti taglia una coppia di rette che sono gli asintoti dell'iperbole, sul piano α taglia una retta r. Il piano α fuoriesce dal piano β della lavagna perpendicolarmente (vedi Fig. 9.21 3.2).

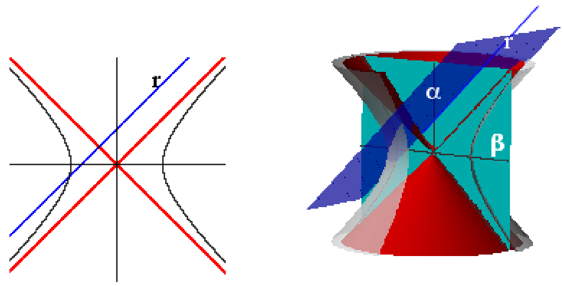

FIGURE 18 f9.21

Ora supponiamo che la retta r sia tangente all'iperbole in un punto P e che tale punto si allontani lungo il ramo d'iperbole all'infinito. Come si vede dalla sequenza di immagini di Fig. f9.22 19) la posizione limite della retta r, per $P \to \infty$, è un asintoto

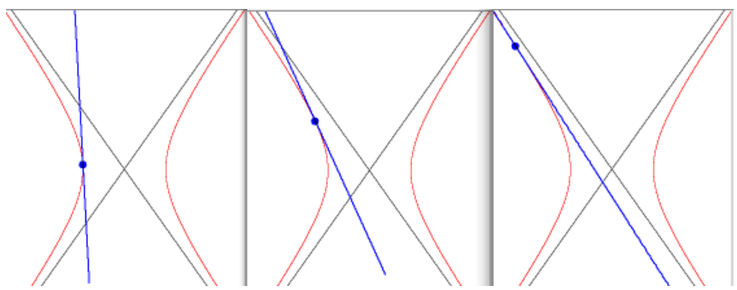

FIGURE 19 f9.22

e dunque la posizione limite del piano α è di essere tangente al cono degli asintoti.

Il piano α contiene la tangente r al meridiano nel punto P e, poiché α fuoriesce ortogonalmente dal piano β, contiene anche la retta tangente in P al parallelo. Dunque $\alpha = \tau_P$ è il piano tangente all'iperboloide nel punto P. Pertanto α taglia sull'iperboloide due rette r ed s incidenti in P, cioè

$$\alpha \cap \mathcal{I} = r \cup s.$$

Inoltre, come si vede in Fig. f9.23 20, il piano α taglia sulla circonferenza $\mathcal{C}$ (sezione

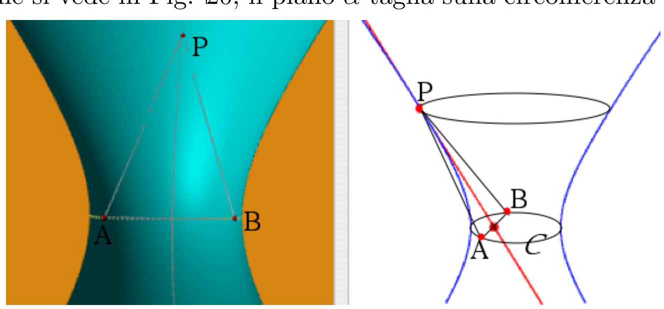

FIGURE 20 f9.23

orizzontale dell'iperboloide) una corda AB.

Ora i punti A e B stanno su $\alpha \cap \mathcal{I}$, quindi sono sulle due rette incidenti in P; pertanto queste due rette sono necessariamente le rette AP e BP. Insomma il triangolo isoscele ABP giace sul piano α. All'allontanarsi di P lungo il ramo dell'iperbole, la base AB del triangolo tende al diametro della circonferenza $\mathcal{C}$, quindi ha lunghezza limitata; al contrario l'altezza h del triangolo, mentre P va all'infinito, diventa enorme. Pertanto i due lati AP e BP tendono a diventare paralleli.

In conclusione *se la retta r coincide con uno degli asintoti, il corrispondente piano α è tangente al cono degli asintoti e taglia sull'iperboloide due rette parallele.*

Il solito argomento con le trasformazioni affini permette di concludere che anche se $\mathcal{I}$ non è di rotazione, ma è un iperboloide iperbolico di tipo generale, i piani tangenti al cono degli asintoti tagliano su $\mathcal{I}$ una coppia di rette parallele. □

Possiamo ora trattare il caso generale.

9.23 TEOREMA 3.4. *Sia $\mathcal{I}$ un iperboloide iperbolico e α un piano.*
- *Se α taglia sul cono degli asintoti un'ellisse o solo il vertice del cono, allora α taglia sull'iperboloide un'ellisse.*
- *Se α taglia sul cono degli asintoti una parabola, allora α taglia sull'iperboloide una parabola.*
- *Se α taglia sul cono degli asintoti una retta (cioè α è tangente al cono degli asintoti), allora α taglia sull'iperboloide una coppia di rette parallele.*
- *Se α taglia sul cono degli asintoti un'iperbole o una coppia di rette incidenti, allora α taglia sull'iperboloide un'iperbole o una retta di coppie incidenti (nel qual caso α è tangente all'iperboloide nel punto comune alle due rette).*

N.B. Nell'ultima affermazione i due casi possibili non sono correlati, vale a dire è possibile che α tagli un'iperbole sul cono degli asintoti e due rette incidenti sull'iperboloide e viceversa che tagli due rette incidenti sull'iperboloide e un'iperbole sul cono degli asintoti.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare il risultato nel caso che l'iperboloide $\mathcal{I}$ sia di rotazione; poi con il solito argomento di trasformazioni affini si estende il risultato al caso di iperboloidi iperbolici di tipo generale.

Procediamo come nella dimostrazione precedente: sia β un piano che passa per l'asse a ed è ortogoanle ad α. Sia r la retta che α taglia su β.

In Fig. 21a vediamo il piano β, l'iperbole che esso taglia sull'iperboloide e gli

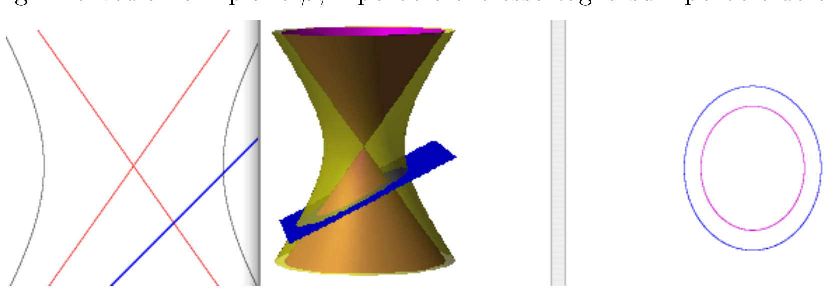

FIGURE 21. a - b - c f9.24

asintoti. In Fig. 21b vediamo la figura tridimensionale e in Fig. ??c le sezioni che il piano α taglia sull'iperboloide e sul cono degli asintoti. A parte quello che mostra la figura osserviamo che: se la retta r è meno inclinata degli asintoti, per quello che sappiamo delle sezioni di un cono, il piano α taglia sul cono degli asintoti un'ellisse o il solo vertice. Inoltre la retta r taglia l'iperbole in due punti, uno su ciascun ramo e dovrebbe essere evidente che il piano α taglia sull'iperboloide un'ellisse.

Supponiamo ora che la retta r sia parallela o coincidente con uno degli asintoti. È la situazione rappresentata in Fig. 22. Se la retta r è parallela ad un asintoto,

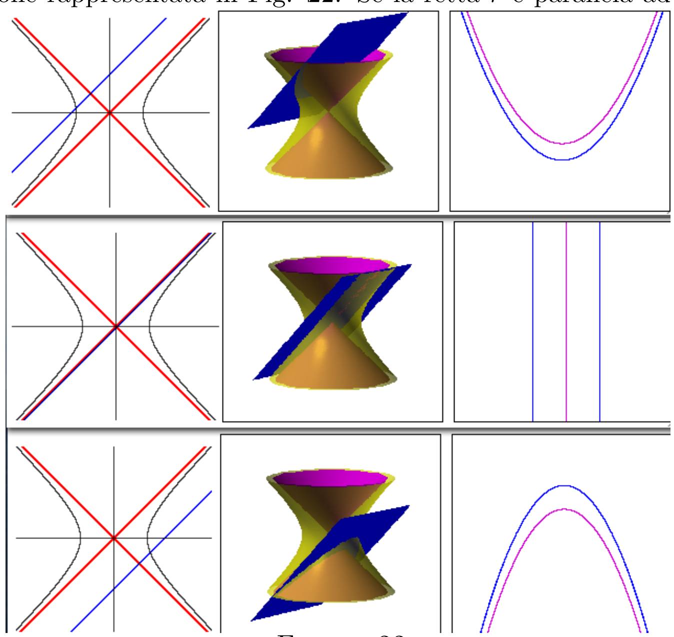

FIGURE 22 f9.25

allora (per quello che sappiamo delle sezioni di un cono circolare retto, vedi Corso di Geometria), il piano α taglia sul cono degli asintoti una parabola. Sia $\mathcal{C}$ la conica che il piano α taglia sull'iperboloide; poiché α non è tangente all'iperboloide (infatti non è tangente al meridiano) e non è tangente al cono degli asintoti, tale conica è non degenere (cfr. Corollario 3.1 e Proposizione 3.3). Per ragioni di simmetria la retta r è asse di simmetria di $\mathcal{C}$, che dunque incontra un proprio asse di simmetria in un sol punto. Ciò esclude che $\mathcal{C}$ sia un'ellisse o un'iperbole, dunque è una parabola.

Se la retta r coincide con un asintoto, allora (per quello che sappiamo delle sezioni di un cono circolare retto) il piano α è tangente al cono degli asintoti e dunque (Proposizione 3.3) taglia sull'iperboloide una coppia di rette parallele.

Infine supponiamo che la retta r sia più inclinata degli asintoti. È la situazione rappresentata in Fig. 23. Per quello che sappiamo delle sezioni di un cono circolare retto il piano α taglia sul cono degli asintoti un'iperbole o (se passa per il vertice) una coppia di rette incidenti. Invece la retta r può tagliare un ramo dell'iperbole in due punti (e non toccare l'altro ramo) oppure essere tangente all'iperbole, oppure infine non toccare per nulla l'iperbole (sono i casi considerati nelle 3 righe di Fig. 23). Nel secondo caso il piano α è tangente all'iperboloide e la taglia su di esso una coppia di rette incidenti. Nel primo e nel terzo caso la conica $\mathcal{C}$ che α taglia sull'iperboloide è non degenere e ben si comprende che deve essere un iperbole. $\square$

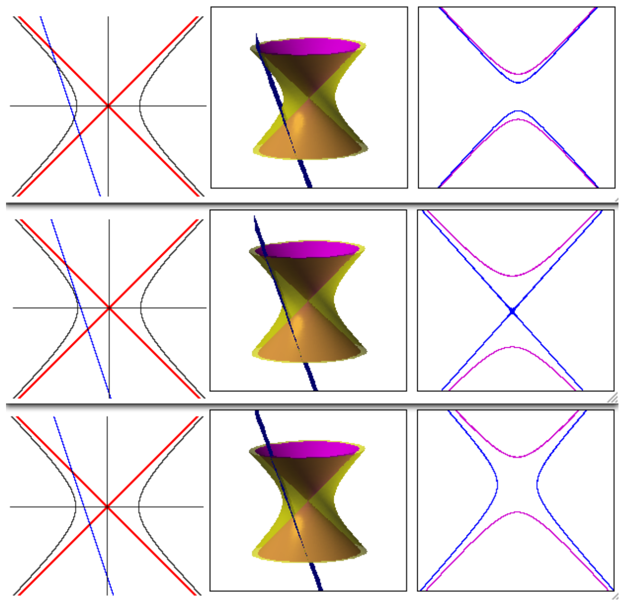

FIGURE 23 f9.26

9.24 ESERCIZIO 3.5. *Una sezione piana di un'iperboloide iperbolico come è fatta. Si enuncino i diversi casi a seconda della posizione del piano secante rispetto al cono degli asintoti dell'iperboloide.*

4. Le quadriche degeneri

Le quadriche sono le superfici la cui equazione cartesiana è di secondo grado (cfr. Definizione 27.1 ??). Di queste abbiamo già trattato
• i paraboloidi ellittici e iperbolici (o a sella),
• gli ellissoidi,
• gli iperboloidi ellittici (o a due falde) e iperbolici (o a una falda).

Queste superfici sono dette *quadriche non degeneri*; restano da trattare le quadriche semplicemente degeneri e quelle doppiamente degeneri.

4.1. Cilindri e coni ellittici. Le quadriche semplicemente degeneri sono i cilindri e i coni quadratici. Cominciamo dai cilindri.

9.25 DEFINIZIONE 4.1. *In generale un* cilindro *è la superfice formata da tutte le rette, parallele ad una retta data, che passano per una curva assegnata. Le rette si chiamano* generatrici *del cilindro e la curva è detta* direttrice *del cilindro. In particolare, se la direttrice è un ellisse, una parabola o un'iperbole, si parla di* cilindro quadratico *ovvero di cilindro rispettivamente ellittico, parabolico o iperbolico.*

In Fig. f9.27 24 vediamo un esempio di ciascuna di queste tre ultime superfici.

La direttrice di un cilindro non è unica: è una qualunque curva che incontra tutte le generatrici. In particolare ogni sezione piana, non parallela alle generatrici, di un cilindro è una direttrice. Dunque possiamo sempre assumere che la direttrice

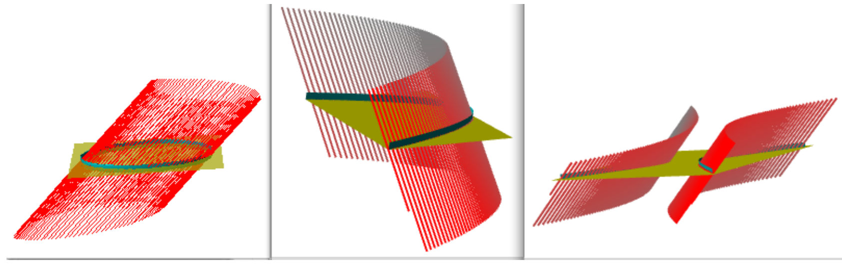

FIGURE 24 f9.27

sia una curva piana che incontra una ed una sola volta ciascuna generatrice. Possiamo anche assumere che il cilindro sia un *cilindro retto*, vale a dire che il piano su cui giace la direttrice sia ortogonale alle generatrici. Dunque per individuare un qualunque cilindro basta assegnare una curva piana e considerare la superfice delle rette perpendicolari a questa curva.

Quest'ultima affermazione permette agevolmente di provare la

9.25.1 PROPOSIZIONE 4.2. *I cilindri quadratici sono quadriche.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{K}$ un cilindro quadratico, prendiamo l'asse delle z parallelo alle generatrici del cilindro. Allora il piano x, y taglia sul cilindro una conica non degenere. Tale conica avrà nelle coordinate x, y un'equazione di secondo grado. Ma questa conica è una direttrice del cilindro e tutte le generatrici sono dirette come l'asse delle z; dunque la stessa equazione della conica, interpretata come equazione nelle variabili x, y, z è l'equazione del cilindro, che dunque ha un'equazione di secondo grado. □

Per meglio comprendere consideriamo l'esempio elementare in Fig. f9.29 25.

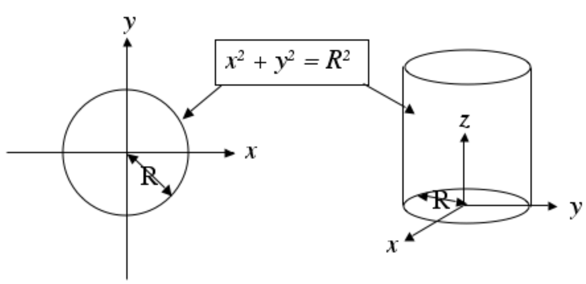

FIGURE 25 f9.29

Dovrebbe essere abbastanza evidente che tutte le sezioni piane, non parallele alle generatrici, di un cilindro ellittico sono ellissi. Risultato analogo vale per i cilindri parabolici e iperbolici per i quali queste sezioni saranno tutte parabole e, rispettivamente, iperboli.

Le sezioni piane di un cilindro quadratico (cioè ellittico, parbolico o iperbolico) parallele alle generatici sono vuote, oppure una retta oppure una coppia di rette parallele, a seconda che il piano secante tagli la direttrice rispettivamente in nessun, uno o due punti (queste sono le possibilità, poiché la direttrice è una conica).

9.26 Esercizio 4.3. *Mostrare che tutti i punti di un cilindro quadratico sono parabolici.*

<u>Soluzione</u>. Sia P un punto di un cilindro quadratico $\mathcal{K}$. La generatrice che passa per P è una sezione normale di curvatura nulla; tutte le altre sezioni normali sono ellissi (oppure parabole oppure iperboli, a seconda del tipo di cilindro) con la concavità rivolta dalla stessa parte e curvatura non nulla. Quindi le curvature normali in P sono tutte dello stesso segno, tranne una che è nulla. Dunque il punto P è parabolico. In particolare ne segue che

> *le direzioni principali in un punto P di un cilindro quadratico sono quella della generatrice che passa per P e quella della direttrice ottenuta sezionando il cilindro con il piano per P, normale alle generatrici* (vedi Fig. f9.28 26). □

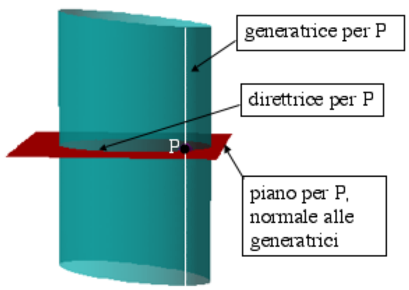

Figure 26 f9.28

Passiamo ai coni.

9.27 Definizione 4.4. *In generale un* cono *è la superfice formata dalle rette che passano per un punto V dato e per una curva assegnata (che non passa per V). Il punto V si chiama* vertice*, la curva* direttrice *e le rette* generatrici*.*

Come per i cilindri, la direttrice di un cono non è unica, ma è una qualunque curva, che non passa per il vertice, ed incontra tutte le generatrici.

9.28 Definizione 4.5. *Un cono quadratico è un cono che ha per direttrice un'ellisse.*

Sia dato un cono circolare retto $\mathcal{K}$ di vertice V. Come sappiamo un piano, che non passa per V, può tagliare il cono lungo un'ellisse $\mathcal{E}$, una parabola $\mathcal{P}$ o un'iperbole $\mathcal{I}$. L'ellisse $\mathcal{E}$ tocca tutte le generatrici e dunque è una direttrice del cono $\mathcal{K}$. La parabola $\mathcal{P}$ tocca tutte le generatrici tranne la generatrice r parallela al proprio asse; dunque il cono di vertice V e direttrice $\mathcal{P}$ è il cono $\mathcal{K}'$ ottenuto privando $\mathcal{K}$ della generatrice r. L'iperbole $\mathcal{I}$ tocca tutte le generatrici tranne le generatrici r ed s parallele ai propri asintoti; dunque il cono di vertice V e direttrice $\mathcal{I}$ è il cono $\mathcal{K}''$ ottenuto privando $\mathcal{K}$ delle generatrici r ed s.

Questa osservazione si può estendere ad un qualunque cono $\hat{\mathcal{K}}$ quadratico (si tratta di deformare con una trasformazione affine un cono circolare retto $\mathcal{K}$ nel nostro cono $\hat{\mathcal{K}}$). Pertanto sarebbe insensato parlare, come nel caso dei cilindri quadratici, di coni ellittici, parabolici e iperbolici. I coni quadratici sono tutti dello stesso tipo. Tuttavia come mostra la Fig. f9.30 27 poiché in un'immagine non si

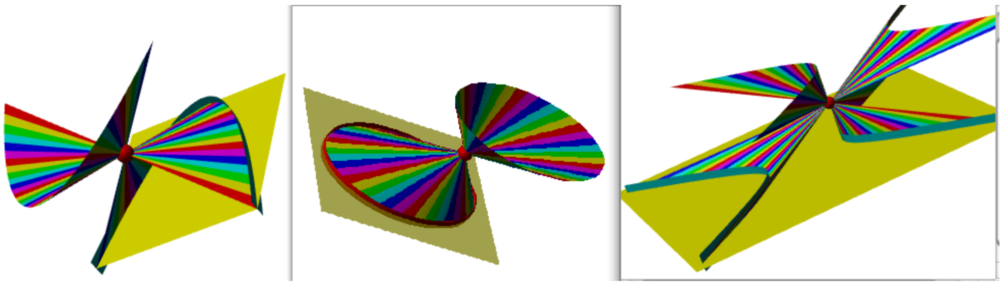

FIGURE 27 f9.30

rappresentano le rette generatrici, ma dei segmenti di queste, il fatto di scegliere come direttrice un aparabola, un'ellisse o un'iperbole cambia di parecchio le cose.

9.29 ESERCIZIO 4.6. *Mostrare che i punti di un cono (escluso il vertice) quadratico sono tutti parabolici.*

Soluzione. Il vertice va escluso perché è un punto singolare. Per il resto l'argomentazione è identica a quella dell'Esercizio [9.26] 4.3; l'unica differenza è che le sezioni normali in un punto P del cono sono, generatrice a parte, coniche non degeneri anche di tipo diverso. □

A proposito delle sezioni normali di un cono, propongo questo esercizio che nella semplicità dei dati mostra tuttavia che qualche difficoltà esiste.

9.30 ESERCIZIO 4.7. *Si studino in un punto P di un cono circolare retto le sezioni normali nelle direzioni principali.*

Soluzione. Un cono circolare retto è una superfice di rotazione, dunque in P avremo il meridiano $\mathcal{M}$ che è una generatrice del cono che è una direzione principale. L'altra direzione principale è quella del parallelo $\mathcal{P}$ che passa per P; tuttavia il parallelo non è una sezione normale, perché il piano α che contiene il parallelo non contiene la normale al cono (vedi Fig. [f9.31] 28).

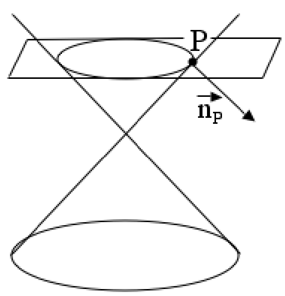

FIGURE 28 f9.31

In effetti come illustra la Fig. [f9.32] 29 si danno 3 casi. A seconda che l'angolo θ di apertura del cono (l'angolo su due generatrici complanari all'asse) sia acuto, retto od ottuso la sezione normale nella direzione del parallelo è un'ellisse, una parabola o un'iperbole. □

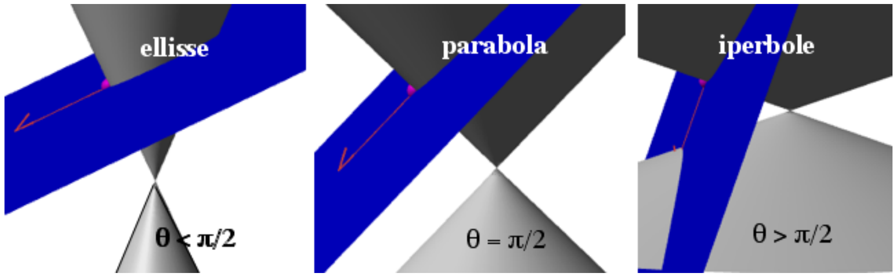

FIGURE 29

f9.32

4.2. Quadriche doppiamente degeneri. Oltre ai 5 tipi di quadriche non degeneri, ai tre tipi di cilindri quadratici e ai coni quadratici, le uniche superfici quadratiche sono quelle doppiamente degeneri che sono semplicemente le coppie di piani incidenti, le coppie di piani paralleli e i piani (doppi o contati due volte).