PARABOLOIDE IPERBOLICO

1. Rette sghembe

34 **Definizione 1.1.** *Due rette nello spazio si dicono sghembe se non sono complanari.*

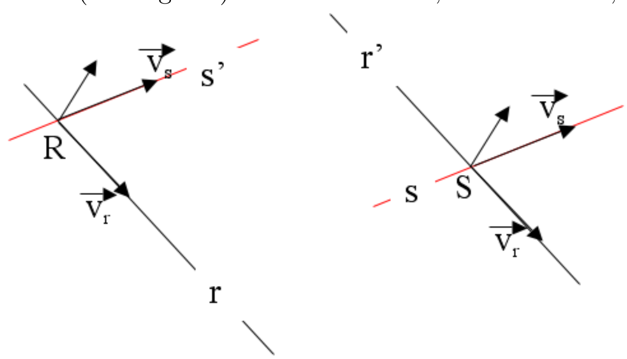
35 **Osservazione 1.2.** *Due rette sono incidenti, parallele oppure sghembe.*

Dimostrazione. Due rette complanari, se hanno un punto in comune, sono incidenti; se non hanno punti in comune, sono parallele. Se invece le due rette non sono complanari allora sono, per definizione, sghembe. □

La seguente proposizione chiarisce meglio il concetto di rette sghembe.

36 **Proposizione 1.3.** *Date due rette r ed s sghembe, esiste un'unica coppia di piani ρ e σ paralleli che contengono rispettivamente r ed s.*

Dimostrazione. Scelto a piacere un punto R della retta r, conduciamo per esso la parallela s' alla retta s (vedi fig. f27.1 ??) . Le rette r ed s', incidenti in R, individuano



f27.1

un piano ρ.

Analogamente, scelto a piacere un punto S della retta s, conduciamo per esso la parallela r' alla retta r. Le rette s ed r', incidenti in S, individuano un piano σ.

Per costruzione r giace su ρ e s su σ. Resta da vedere che i due piani sono paralleli.

Sia $\vec{v}_r$ un vettore direzione delle rette r ed r' (che, essendo parallele, hanno la stessa direzione) e $\vec{v}_s$ un vettore direzione delle rette s ed s'. Allora il prodotto vettoriale $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$ ha la direzione della perpendicolare ad r ed s', cioè è perpendicolare a ρ, ma ha anche la direzione della perpendicolare ad r' ed s, quindi è perpendicolare a σ. Pertanto i due piani, avendo la medesima direzione normale, sono paralleli.

Resta da provare che i due piani sono unici. Supponiamo che ρ e σ siano due piani che soddisfano l'enunciato. Possiamo immaginarli come i piani del pavimento e del soffitto (vedi Fig. f27.2 ??). Sia t la proiezione ortogonale di s sul piano ρ (basta costruire un muro che segua sul soffitto la retta s, la base del muro sarà la retta t). Le rette r e t, che giacciono su ρ (pavimento) non sono parallele, altrimenti r

Date: 8 agosto 2007.

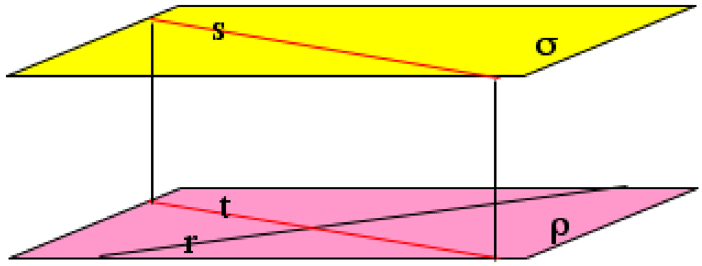
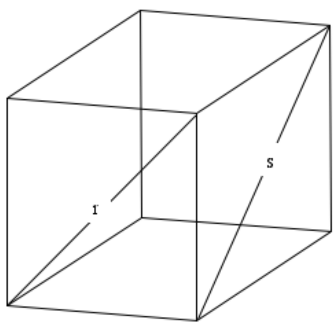


FIGURE 2 f27.2

sarebbe parallela ad s, dunque sono incidenti. Se conduciamo per un punto di r la parallela a t (cioè ad s), restiamo sul piano ρ (pavimento) e dunque il piano ρ è individuato univocamente come il piano descritto dalle parallele ad s condotte per un punto di r. □

37 **Esercizio 1.4.** *Dimostrare la Proposizione* [36] ??.

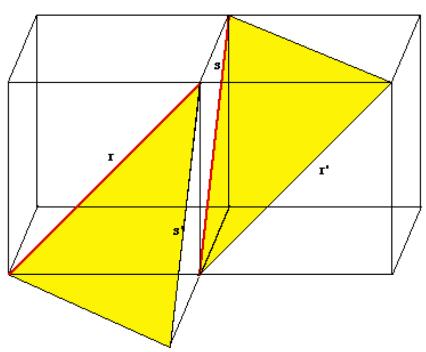
38 **Esercizio 1.5.** *Date le rette r ed s in Fig.* [f27.3] ??, *diagonali delle facce di un cubo,*



f27.3

disegnare la coppia di piani paralleli che le contengono.

Soluzione. È sufficiente, seguendo le indicazioni della dimostrazione della Proposizione [36] ??, scegliere un punto R su r e per questo condurre la parallela s' ad s e, analogamente, scegliere un punto S su s e per questo condurre la parallela r' ad s. La scelta dei punti proposta in Fig. [f27.4] ?? rende più facile il disegno. A titolo di



f27.4

ulteriore esercizio si consiglia di provare altre scelte.

Una facile conseguenza della Proposizione [36] ?? è il seguente

39 **Corollario 1.6.** *Date due rette sghembe, esiste un'unica retta incidente e poerpendicolare ad entrambe.*

Dimostrazione. La Fig. [f27.5] ?? illustra con sufficiente chiarezza come trovare tale

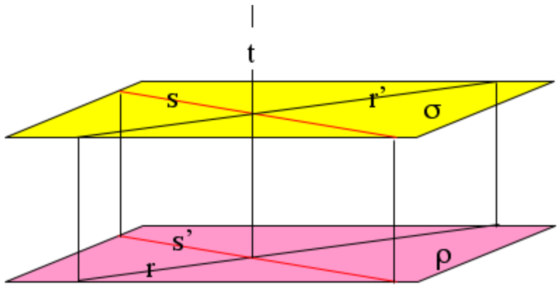
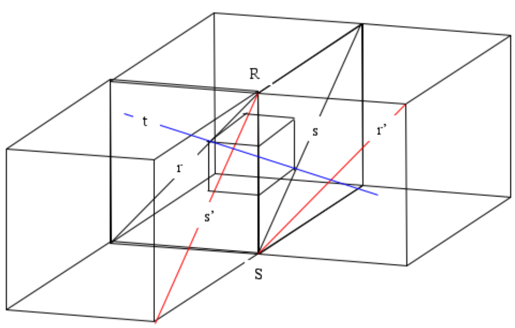


FIGURE 5 f27.5

perpendicolare: assegnate le rette sghembe r ed s, si individuano i piani paralleli ρ e σ che le contengono. Si considerano le proiezioni ortogonali r' ed s' di ciascuna retta sull'altro piano. Così si determinano due punti di incidenza per i quali passa la perpendicolare t. □

40 **Esercizio 1.7.** *Assegnate le rette r ed s come in Fig. [f27.3] ??, disegnare la retta t perpendicolare ed incidente ad entrambe.*

Soluzione. Ricordo che il piano di un triangolo equilatero che ha per lati diagonali delle facce di un cubo è perpendicolare ad una diagonale del cubo. Considerata la Fig. [f27.4] ?? è allora evidente che una diagonale del cubo è perependicolare alla coppia di piani paralleli che contengono le rette r ed s. Collocato un cubetto, di lato $1/3$ del lato del cubo originario, come in Fig. [f27.6] ??, in modo che il suo spigolo sia al centro



f27.6

dello spigolo RS è chiaro che la diagonale t di tale cubetto è la retta cercata.

40.1 **Osservazione 1.8.** *Assegnate tre rette r, s e t, due a due sghembe, ci sono due possibilità:*

(i) esse giacciano su tre piani paralleli (vedi Fig. [f27.7] ??a).

(ii) Per ciascuna coppia di rette: r ed s, r e t, s e t esiste una distinta coppia di piani paralleli (vedi Fig. [f27.7] ??b).

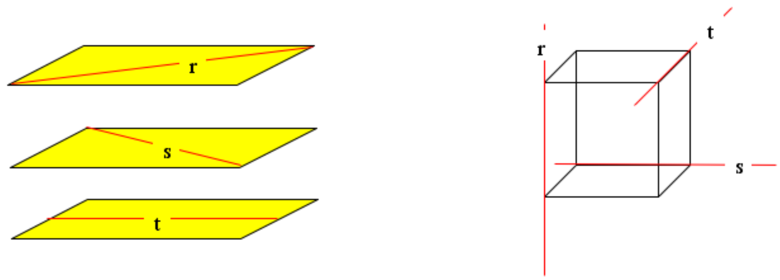


FIGURE 7. a - b f27.7

40.2 **Esercizio 1.9.** *Si considerino le rette in Fig.* f27.7 ??*b. Per ciascuna delle tre coppie di rette r ed s, r e t, s e t indicare le corrispondenti coppie di piani paralleli.*

<u>Soluzione</u>. La faccia anteriore del cubo contiene[1] la retta r e quella posteriore contiene la retta s. La faccia di sinistra contiene la retta r e quela di destra contiene la retta t. La faccia inferiore del cubo contiene la retta s e quella superiore contiene la retta t.

2. Costruzione del parabolide iperbolico

Due rette, r_0 e s_0, incidenti individuano un piano α; su di esso consideriamo due famiglie di rette: il fascio $\mathcal{R}$ di tutte le rette r parallele ad r_0 e il fascio $\mathcal{S}$ di tutte le rette s parallele a s_0 (vedi Fig. f27 ??a).

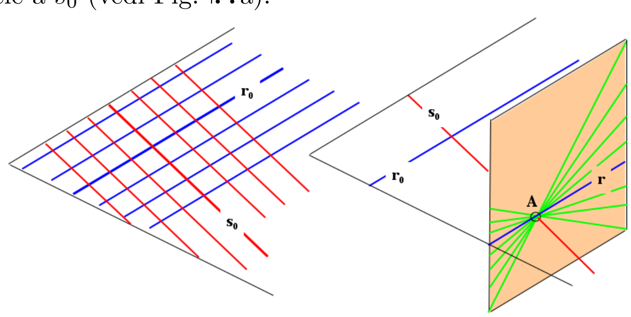


FIGURE 8. a-b f27

Tenute fisse le rette r_0 e s_0, muoviamo le restanti rette: una retta $r \in \mathcal{R}$ taglierà s_0 in un punto A (vedi Fig. f27 ??b), la retta r è libera di muoversi nel piano verticale che passa per r ma è vincolata a passare per A. In Fig. f27 ??b sono visibili, in verde, diverse posizioni che la retta r così può assumere. Una retta $s \in \mathcal{S}$, parallela ad s_0, può compiere - mutatis mutandis - lo stesso tipo di movimento. Possiamo immaginare le rette r_0 e s_0 come due assi (rispettivamente rosso e blu in Fig. f28 ??); le rette r (rosse) sono libere di muoversi come in Fig. f28 ??a e analogamente le rette s (blu) sono libere di muoversi come in Fig. f28 ??b. (In figura i due assi r_0 e s_0 sono perpendicolari, ma questo non è vero in generale).

Introduciamo poi un ulteriore vincolo che obbliga le rette a muoversi coerentemente. Per spiegarlo, immaginiamo che le assi rosse siano sotto le assi blu. Il piano

[1]Ovviamente qui, si deve intendere: *il piano che contiene la faccia anteriore contiene anche la retta r.*

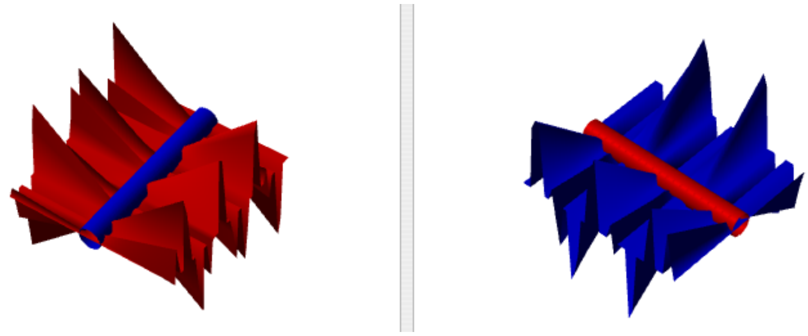


Figure 9. a - b f28

α è suddiviso dalle rette r_0 e s_0 in quattro regioni, numerate da 1 a 4 in Fig. f29 ??a. Se si muove una retta rossa r, come in Fig. f29 ??b, allora - dalla parte in cui si

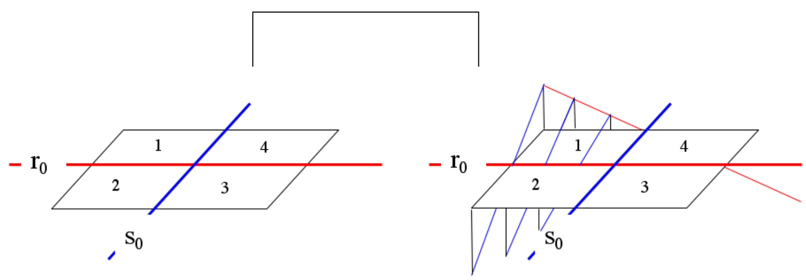
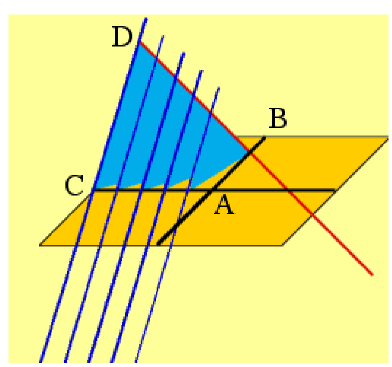


Figure 10. a - b f29

solleva, cioè nella regione 1 - essa solleva anche le assi blu che le sono sovrapposte; dunque in regione 1 tutte le rette si sollevano. Ma allora in regione 2 le rette blu si abbassano e schiacciano giù anche le rette rosse; di conseguenza quest'ultime in regione 3 si alzano e spingono verso l'alto anche le rette blu; perciò queste altre in regione 4 si abbassano e spingono in giù le rette rosse. Allora, a ben guardare, il movimento di tutte le rette è determinato dal movimento di una sola.

41 **Definizione 2.1.** *In tal modo si genera una superficie $\mathcal{Q}$ detta* paraboloide iperbolico*.*

42 **Osservazione 2.2.** La superfice $\mathcal{Q}$ non è piana, infatti i punti A, B, C, D di Fig. f30 ??, che appartengono a $\mathcal{Q}$, non sono complanari.



f30

42 **Esercizio 2.3.** *Spiegare, aiutandosi con un disegno, perchè un paraboloide iperbolico non è una superfice piana.*

In Fig. f31 ?? vediamo un esempio di paraboloide iperbolico in cui le rette r_0 e

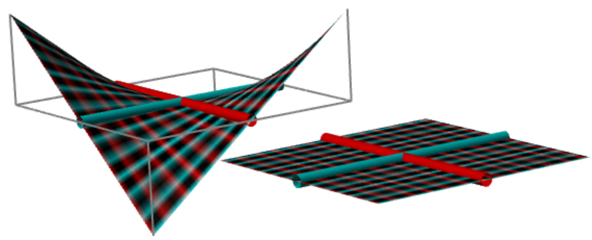


FIGURE 12 f31

s_0 sono perpendicolari. Aprendo il file è possibile vedere muoversi la superficie, al variare dell'inclinazione delle rette.

Osservazione 2.4. *(i) La superfice $\mathcal{Q}$ non è un piano, infatti i punti A, B, C, D di Fig.* f30 ?? *non sono complanari.*

FIGURE 13 f30

(ii) Per determinare un paraboloide iperbolico è necessario assegnare l'angolo tra le due rette r_0 e s_0 e l'inclinazione sul piano α di una qualsiasi delle altre rette.

(iii) Per costruzione il parabolide iperbolico $\mathcal{Q}$ contiene due famiglie di rette: le rette r' ottenute muovendo le rette r paralelle ad r_0 e le rette s' ottenute muovendo le rette s parallele ad s_0.

(iv) Le rette di ciascuna famiglia sono due a due sghembe e giacciono su una famiglia di piani paralleli e perpendicolari al piano α.

(v) Per ciascun punto del paraboloide iperbolico passa una ed una sola retta di ciascuna famiglia.

È forse superfluo giustificare quanto sopra, tuttavia facciamolo. Il punto (i) è chiaro. Per il punto (ii) basta ricordare che abbiamo sopra illustrato come il movimento (e dunque l'inclinazione) di una singola retta determini la posizione di tutte le altre. (iii): il parabolide iperbolico è, per definizione, la superficie costituita dalle rette r' ed s'. Anche (v) è evidente per costruzione. Vediamo di spiegare (iv): ciascuna retta r è libera di muoversi sul piano ρ che passa per r ed è perpendicolare ad α (vedi Fig. f27 ??b) e dunque su questo piano sta la retta r'. Ora, al variare di r tra le parallele ad r_0 i corrispondenti piani ρ sono evidentemente tra loro paralleli.

Resta solo da capire perché prese due rette r_1 e r_2, parallele a r_0, le corrispondenti rette r_1' e r_2' siano sghembe. Osserviamo che le due famiglie di rette, r' e s', che sono contenute nel parabolide sono fatte in modo che ogni retta r' tocca tutte le rette s' e viceversa. Ora supponiamo, per assurdo, che r_1' e r_2' non siano sghembe, allora sarebbero complanari, cioè giacerebbero su un piano β. Ogni retta s' del paraboloide tocca le rette r_1' e r_2' e dunque giace sul piano β, che dunque contiene tutte le rette della famiglia s' e cioè contiene tutto il parabolide. Assurdo perché il parabolide non è un piano.

27 **Esercizio 2.5.** *Come si costruisce un paraboloide iperbolico?*

3. Equazioni cartesiane

28 **Teorema 3.1.** *L'equazione cartesiana di un paraboloide iperbolico è un'equazione di secondo grado.*

Dimostrazione. Per comprendere la dimostrazione la si segua guardando la Fig. f32 ??.

Figure 14 f32

Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali in modo che l'asse delle x coincida con la retta r_0, l'asse delle y coincida con la retta s_0 (che, ben inteso, non sono necessariamente perpendicolari) e l'asse delle z sia perpendicolare al piano α (su cui, ricordo, giacciono r_0 e s_0).

Consideriamo il punto A di coordinate $(1, 1, 0)$ del piano xy. Per generare $\mathcal{Q}$ la retta s, parallela ad s_0 passante per A, si sposta nella retta s' e, sulla verticale di A, troviamo il punto $A' \in s' \cap \mathcal{Q}$.

Come abbiamo visto lo spostamento della retta s determina lo spostamento di tutte le altre e dunque il paraboloide iperbolico $\mathcal{Q}$.

Supponiamo che h sia l'ordinata di $A' = (1, 1, h)$ e proviamo che l'equazione di $\mathcal{Q}$ è

$$z = hxy.$$

A questo scopo consideriamo un qualunque punto P di coordinate $(x, y, 0)$ sul piano xy. La retta r, parallela ad r_0 per P, taglia s in un certo punto B. Sulla verticale di B c'è il punto $B' \in s' \cap \mathcal{Q}$. Per un argomento di similitudine (triangolo giallo in Fig. 22 ??)

$$||\overline{BB'}|| : ||\overline{AA'}|| = y : 1;$$

vale a dire:

$$||\overline{BB'}|| = ||\overline{AA'}|| |y = hy.$$

La retta r dunque deve spostarsi in r', che passa per B', e sulla verticale di P c'è il punto $P' \in r' \cap \mathcal{Q}$. Sempre per un argomento di similitudine (triangolo rosa in Fig. [22]??)

$$||\overline{PP'}|| : ||\overline{BB'}|| = x : 1;$$

vale a dire

$$||\overline{PP'}|| = ||\overline{BB'}||x = hyx.$$

Dunque concludiamo che sulla verticale di $P = (x, y, 0)$ sta il punto P' di $\mathcal{Q}$, le cui coordinate sono x, y e $z = hxy$. $\square$

4. Piano tangente

Per ogni punto P di un paraboloide iperbolico $\mathcal{Q}$ passa una ed una sola retta di ciascuna delle due famiglie, una retta r' ed una retta s' (vedi Fig. [f23]??). Queste rette

Figure 15 f23

stanno su $\mathcal{Q}$ dunque i loro vettori tangenti applicati in P (vedi figura) individuano il piano tangente τ_P (in celeste in figura) alla superficie $\mathcal{Q}$ nel punto P; dunque τ_P coincide con il piano che contiene le due rette r ed s.

Abbiamo così provato

29 **Proposizione 4.1.**

Ricordo che abbiamo scelto che il piano α su cui giacciono le rette r_0 e s_0 fosse orizzontale. I piani verticali ρ e σ, che contengono rispettivamente le rette r ed s, dividono lo spazio in quattro angoli diedri (numerati da 1 a 4 in figura).

Si consideri una retta s' della famiglia di s_0 ed s che, in figura, sta dalla nostra parte rispetto a σ. Essa poggia su r_0 ed r (perché ogni retta di una delle due famiglie incontra tutte le rette dell'altra famiglia) e perciò è più inclinata di s. Dunque nella regione 1 sta s' è sotto il piano tangente τ_P e nella regione 2 è sopra. Questo significa che $\mathcal{Q}$ nella regione 1 è sotto il piano tangente e nella regione 2 è sopra.

Si consideri invece una retta s' che si trova, in figura, dietro il piano σ, ad esempio la retta s_0. Essa è meno inclinata di s e pertanto nella regione 4 è sopra il piano tangente e nella regione 3 è sotto.

In Fig. [f24]??a è illustrata schematicamente la situazione vicino ad un punto P di $\mathcal{Q}$. La situazione è simile a quella di un passo di montagna (vedi Fig. [f24]??b e in Fig. [f24]??c sono disegnate le curve di livello).

Le curve di livello si ottengono semplicemente tagliando la superficie con piani orizzontali come illustrato dalla Fig. [f25]??a - b (aprendo il filmato si vede il piano muoversi).

FIGURE 16. a - b - c f24

FIGURE 17. a - b - c f25

Ritorniamo al paraboloide iperbolico e sezioniamolo con un piano τ' parallelo al piano tangente τ_P. Poiché il parabolide iperbolico è una quadrica, la sezione $\mathcal{C} = \tau' \cap \mathcal{Q}$ è una conica. Il piano τ' taglia sui piani ρ e σ due rette che non toccano $\mathcal{C}$, perché sul piano ρ sta la retta r e nessuna altra retta della stessa famiglia può toccare quel piano, dunque il paraboloide