PARABOLOIDE IPERBOLICO

1. Rette sghembe

34 **Definizione 1.1.** *Due rette nello spazio si dicono sghembe se non sono complanari.*

35 **Osservazione 1.2.** *Due rette sono incidenti, parallele oppure sghembe.*

<u>Dimostrazione</u>. Due rette complanari, se hanno un punto in comune, sono incidenti; se non hanno punti in comune, sono parallele. Se invece le due rette non sono complanari allora sono, per definizione, sghembe. □

La seguente proposizione chiarisce meglio il concetto di rette sghembe.

36 **Proposizione 1.3.** *Date due rette r ed s sghembe, esiste un'unica coppia di piani ρ e σ paralleli che contengono rispettivamente r ed s.*

<u>Dimostrazione</u>. Scelto a piacere un punto R della retta r, conduciamo per esso la parallela s' alla retta s (vedi fig. f27.1 1) . Le rette r ed s', incidenti in R, individuano

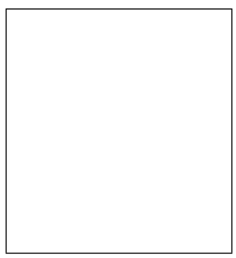

Figure 1 f27.1

un piano ρ.

Analogamente, scelto a piacere un punto S della retta s, conduciamo per esso la parallela r' alla retta r. Le rette s ed r', incidenti in S, individuano un piano σ.

Per costruzione r giace su ρ e s su σ. Resta da vedere che i due piani sono paralleli.

Sia $\vec{v}_r$ un vettore direzione delle rette r ed r' (che, essendo parallele, hanno la stessa direzione) e $\vec{v}_s$ un vettore direzione delle rette s ed s'. Allora il prodotto vettoriale $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$ ha la direzione della perpendicolare ad r ed s', cioè è perpendicolare a ρ, ma ha anche la direzione della perpendicolare ad r' ed s, quindi è perpendicolare a σ. Pertanto i due piani, avendo la medesima direzione normale, sono paralleli.

Resta da provare che i due piani sono unici. Supponiamo che ρ e σ siano due piani che soddisfano l'enunciato. Possiamo immaginarli come i piani del pavimento e del soffitto (vedi Fig. f27.2 2). Sia t la proiezione ortogonale di s sul piano ρ (basta costruire un muro che segua sul soffitto la retta s, la base del muro sarà la retta t). Le rette r e t, che giacciono su ρ (pavimento) non sono parallele, altrimenti r

Date: 8 agosto 2007.

FIGURE 2 f27.2

sarebbe parallela ad s, dunque sono incidenti. Se conduciamo per un punto di r la parallela a t (cioè ad s), restiamo sul piano ρ (pavimento) e dunque il piano ρ è individuato univocamente come il piano descritto dalle parallele ad s condotte per un punto di r. □

37 **Esercizio 1.4.** *Dimostrare la Proposizione 1.3.*

38 **Esercizio 1.5.** *Date le rette r ed s in Fig. 3, diagonali delle facce di un cubo,*

FIGURE 3 f27.3

disegnare la coppia di piani paralleli che le contengono.

Soluzione. È sufficiente, seguendo le indicazioni della dimostrazione della Proposizione 1.3, scegliere un punto R su r e per questo condurre la parallela s' ad s e, analogamente, scegliere un punto S su s e per questo condurre la parallela r' ad s. La scelta dei punti proposta in Fig. 4 rende più facile il disegno. A titolo di

FIGURE 4 f27.4

ulteriore esercizio si consiglia di provare altre scelte.

Una facile conseguenza della Proposizione 1.3 è il seguente

39 **Corollario 1.6.** *Date due rette sghembe, esiste un'unica retta incidente e poerpendicolare ad entrambe.*

Dimostrazione. La Fig. 5 illustra con sufficiente chiarezza come trovare tale per-

Figure 5 f27.5

pendicolare: assegnate le rette sghembe r ed s, si individuano i piani paralleli ρ e σ che le contengono. Si considerano le proiezioni ortogonali r' ed s' di ciascuna retta sull'altro piano. Così si determinano due punti di incidenza per i quali passa la perpendicolare t. □

40 **Esercizio 1.7.** *Assegnate le rette r ed s come in Fig. 3, disegnare la retta t perpendicolare ed incidente ad entrambe.*

Soluzione. Ricordo che il piano di un triangolo equilatero che ha per lati diagonali delle facce di un cubo è perpendicolare ad una diagonale del cubo. Considerata la Fig. 4 è allora evidente che una diagonale del cubo è perependicolare alla coppia di piani paralleli che contengono le rette r ed s. Collocato un cubetto, di lato 1/3 del lato del cubo originario, come in Fig. 6, in modo che il suo spigolo sia al centro

Figure 6 f27.6

dello spigolo RS è chiaro che la diagonale t di tale cubetto è la retta cercata.

40.1 **Osservazione 1.8.** *Assegnate tre rette r, s e t, due a due sghembe, ci sono due possibilità:*

(i) esse giacciano su tre piani paralleli (vedi Fig. 7a).

(ii) Per ciascuna coppia di rette: r ed s, r e t, s e t esiste una distinta coppia di piani paralleli (vedi Fig. 7b).

FIGURE 7. a - b f27.7

40.2 **Esercizio 1.9.** *Si considerino le rette in Fig. 7b. Per ciascuna delle tre coppie di rette r ed s, r e t, s e t indicare le corrispondenti coppie di piani paralleli.*

Soluzione. La faccia anteriore del cubo contiene[1] la retta r e quella posteriore contiene la retta s. La faccia di sinistra contiene la retta r e quela di destra contiene la retta t. La faccia inferiore del cubo contiene la retta s e quella superiore contiene la retta t.

2. Costruzione del parabolide iperbolico

Due rette, r_0 e s_0, incidenti individuano un piano α; su di esso consideriamo due famiglie di rette: il fascio $\mathcal{R}$ di tutte le rette r parallele ad r_0 e il fascio $\mathcal{S}$ di tutte le rette s parallele a s_0 (vedi Fig. 8a).

FIGURE 8. a-b f27

Tenute fisse le rette r_0 e s_0, muoviamo le restanti rette: una retta $r \in \mathcal{R}$ taglierà s_0 in un punto A (vedi Fig. 8b), la retta r è libera di muoversi nel piano verticale che passa per r ma è vincolata a passare per A. In Fig. 8b sono visibili, in verde, diverse posizioni che la retta r così può assumere. Una retta $s \in \mathcal{S}$, parallela ad s_0, può compiere - mutatis mutandis - lo stesso tipo di movimento. Possiamo immaginare le rette r_0 e s_0 come due assi (rispettivamente rosso e blu in Fig. 9); le rette r (rosse) sono libere di muoversi come in Fig. 9a e analogamente le rette s (blu) sono libere di muoversi come in Fig. 9b. (In figura i due assi r_0 e s_0 sono perpendicolari, ma questo non è vero in generale).

Introduciamo poi un ulteriore vincolo che obbliga le rette a muoversi coerentemente. Per spiegarlo, immaginiamo che le assi rosse siano sotto le assi blu. Il piano α è suddiviso dalle rette r_0 e s_0 in quattro regioni, numerate da 1 a 4 in Fig. 10a.

[1]Ovviamente qui, si deve intendere: *il piano che contiene la faccia anteriore contiene anche la retta r.*

FIGURE 9. a - b f28

Se si muove una retta rossa r, come in Fig. [29]**??**b, allora - dalla parte in cui si

FIGURE 10. a - b f29

solleva, cioè nella regione 1 - essa solleva anche le assi blu che le sono sovrapposte; dunque in regione 1 tutte le rette si sollevano. Ma allora in regione 2 le rette blu si abbassano e schiacciano giù anche le rette rosse; di conseguenza quest'ultime in regione 3 si alzano e spingono verso l'alto anche le rette blu; perciò queste altre in regione 4 si abbassano e spingono in giù le rette rosse. Allora, a ben guardare, il movimento di tutte le rette è determinato dal movimento di una sola.

41 **Definizione 2.1.** *In tal modo si genera una superficie* $\mathcal{Q}$ *detta* paraboloide iperbolico*.*

42 **Osservazione 2.2.** La superfice $\mathcal{Q}$ non è piana, infatti i punti A, B, C, D di Fig. [f30]11, che appartengono a $\mathcal{Q}$, non sono complanari, in quanto i punti A, B, C stanno sul piano orizzontale su cui non sta D.

FIGURE 11 f30

42 **Esercizio 2.3.** *Spiegare, aiutandosi con un disegno, perchè un paraboloide iperbolico non è una superfice piana.*

In Fig. 12 vediamo un esempio di paraboloide iperbolico in cui le rette r_0 e

FIGURE 12 f31

s_0 sono perpendicolari. Aprendo il file è possibile vedere muoversi la superficie, al variare dell'inclinazione delle rette.

3. Il paraboloide iperbolico come superfice rigata

Una superfice descritta dal moto di una retta si dice *superfice rigata*. Ad esempio la superfice di rotazione generata dalla rotazione di una retta attorno ad un asse è un cilindro (circolare retto), se invece la retta è incidente all'asse otteniamo un cono (cfr. Fig. 13).

FIGURE 13 f31.1

Per costruzione il parabolide iperbolico $\mathcal{Q}$ contiene due famiglie di rette: le rette r' ottenute spostando le rette r parallele ad r_0 e le rette s' ottenute spostando le rette s parallele ad s_0. Dunque il *parabolide iperbolico ùna superfice doppiamente rigata*. (Le due famiglie di rette sono ben visibili in Fig. ??). Questo significa che per ogni punto del parabolide iperbolico passa una retta di ciascuna delle due famiglie.

In Fig. 14a vediamo il fascio di piani ρ paralleli tra loro e perpendicolari al piano α che tagliano sul piano α il fascio di rette $\mathcal{R}$ parallele a r_0. In Fig. 14b vediamo lo stesso fascio di piani che taglia sul paraboloide iperbolico le rette r'. Analogamente avremo un fascio di piani σ, paralleli tra loro e perpendicolari ad α che tagliano sul paraboloide la famiglia di rette s'. Risulta allora evidente che le

Figure 14. a - b f31.2

rette r', giacendo su piani paralleli non sono tra loro incidenti e anzi sono due a due sghembe. Possiamo pertanto concludere che:

43 **Osservazione 3.1.** *Il paraboloide iperbolico è descritto da due famiglie di rette, ciascuna delle quali è costituita da rette due a due sghembe che giacciono su un fascio di piani paralleli. Inoltre per ogni punto del paraboloide passa una ed una* **sola** *retta di ciascuna famiglia.*

44 **Esercizio 3.2.** *Come si costruisce un paraboloide iperbolico?*

4. Equazioni cartesiane

45 **Teorema 4.1.** *L'equazione cartesiana di un paraboloide iperbolico è un'equazione di secondo grado.*

Dimostrazione. Per comprendere la dimostrazione la si segua guardando la Fig. f32 15.

Figure 15 f32

Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali in modo che l'asse delle x coincida con la retta r_0, l'asse delle y coincida con la retta s_0 (che, ben inteso, non sono necessariamente perpendicolari) e l'asse delle z sia perpendicolare al piano α (su cui, ricordo, giacciono r_0 e s_0).

Consideriamo il punto A di coordinate $(1, 1, 0)$ del piano xy. Per generare $\mathcal{Q}$ la retta s, parallela ad s_0 passante per A, si sposta nella retta s' e, sulla verticale di A, troviamo il punto $A' \in s' \cap \mathcal{Q}$.

Come abbiamo visto lo spostamento della retta s determina lo spostamento di tutte le altre e dunque il paraboloide iperbolico $\mathcal{Q}$.

Supponiamo che h sia l'ordinata di $A' = (1, 1, h)$ e proviamo che l'equazione di $\mathcal{Q}$ è

$$z = hxy.$$

A questo scopo consideriamo un qualunque punto P di coordinate $(x, y, 0)$ sul piano xy. La retta r, parallela ad r_0 per P, taglia s in un certo punto B. Sulla verticale di B c'è il punto $B' \in s' \cap \mathcal{Q}$. Per un argomento di similitudine (triangolo giallo in Fig. ??)

$$||\overline{BB'}|| : ||\overline{AA'}|| = y : 1;$$

vale a dire:

$$||\overline{BB'}|| = ||\overline{AA'}|||y = hy.$$

La retta r dunque deve spostarsi in r', che passa per B', e sulla verticale di P c'è il punto $P' \in r' \cap \mathcal{Q}$. Sempre per un argomento di similitudine (triangolo rosa in Fig. ??)

$$||\overline{PP'}|| : ||\overline{BB'}|| = x : 1;$$

vale a dire

$$||\overline{PP'}|| = ||\overline{BB'}||x = hyx.$$

Dunque concludiamo che sulla verticale di $P = (x, y, 0)$ sta il punto P' di $\mathcal{Q}$, le cui coordinate sono x, y e $z = hxy$. $\square$

5. Piano tangente

Per ogni punto P di un paraboloide iperbolico $\mathcal{Q}$ passa una ed una sola retta di ciascuna delle due famiglie, una retta r' ed una retta s' (vedi Fig. 16). Queste rette

Figure 16 f33

stanno su $\mathcal{Q}$ dunque i loro vettori tangenti applicati in P (vedi figura) individuano il piano tangente τ_P (in celeste in figura) alla superficie $\mathcal{Q}$ nel punto P; dunque τ_P coincide con il piano che contiene le due rette r' ed s'.

Consideriamo i piani ρ e σ, perpendicolari ad α, che contengono rispettivamente le rette r' ed s'; essi dividono lo spazio in quattro angoli diedri (numerati da 1 a 4 in figura), ciascuno dei quali è suddiviso in due dal piano tangente τ_P.

Si consideri una retta s'_1 della famiglia che descrive il parabolide ed s che, in figura, sta dalla nostra parte rispetto a σ. Essa poggia su r_0 ed r' (perché ogni retta di una delle due famiglie incontra tutte le rette dell'altra famiglia) e perciò è più inclinata di s'. Dunque nella regione 1 sta s'_1 è sotto il piano tangente τ_P e nella regione 2 è sopra. Questo significa che il paraboloide $\mathcal{Q}$ nella regione 1 è sotto il piano tangente e nella regione 2 è sopra.

Analogamente si vede che il parabolide nella regione 4 è sopra il piano tangente e nella regione 3 è sotto.

Possiamo così concludere che:

46 **Osservazione 5.1.** *Il piano tangente in un punto del paraboloide iperbolico taglia il paraboloide lungo una coppia di rette incidenti nel punto e suddivide la superfice in 4 parti due delle quali stanno da una parte del piano tangente, le altre due dall'altra.*

In Fig. f34 **??** vediamo il piano tangente in un punto del paraboloide. Si distinguono

FIGURE 17. Aprendo il file è possibile cambiare il punto di tangenza f24

chiaramente che le due rette che il piano tangente taglia sulla superfice (la cui quadrettatura è determinata dalle due famiglie di rette che la rigano) e le 4 regioni in cui resta suddivisa dal piano tangente.

47 **Esercizio 5.2.** *Come si comporta il piano tangente in un punto di un paraboloide iperbolico rispetto alla superfice?*

6. Sezioni piane di un paraboloide iperbolico

Poiché il paraboloide iperbolico è una quadrica (Teorema 45 4.1) le sue sezioni piane sono coniche. Ad esempio, come abbiamo appena visto, la sezione piana con il piano tangente in un punto del paraboloide è una coppia di rette incidenti (che è una conica degenere).

Il seguente risultato descrive le sezioni piane.

48 **Teorema 6.1.** *Siano dati un paraboloide iperbolico $\mathcal{Q}$ ed un piano β.*
Se il piano β è perpendicolare al piano α (che contiene le rette r_0 e s_0) ci sono due casi:

(i) se β è un piano che appartiene ad uno dei due fasci di piani paralleli che contengono le rette che rigano il paraboloide, allora la sezione è una retta;

(ii) altrimenti la sezione è una parabola il cui asse è perpendicolare al piano α.
Se il piano β non è perpendicolare al piano α ci sono due casi:

(iii) se β è il piano tangente al parabolide in un suo punto, allora la sezione è una coppia di rette incidenti;

(iv) altrimenti la sezione è un'iperbole.

Per dimostrare il teorema ci servono due lemmi, che sono di per sè interessanti.

49 **Lemma 6.2.** *Non esistono altre rette che sono contenute nel paraboloide oltre a quelle delle due famiglie che lo rigano.*

<u>Dimostrazione</u>. Supponiamo per assurdo che, oltre alle famiglie di rette r' ed s' che rigano il parabolide, ci sia una retta t, diversa da tutte queste, che sta sul paraboloide.

Prendiamo un punto $P \in t$ (vedi Fig. 18). Poiché P sta sul paraboloide, per P

FIGURE 18 f35

passa una certa retta r'_1 della prima famiglia. E le due rette t ed r'_1 individuano un piano γ.

Per ogni punto Q di t, $Q \neq P$, poiché Q sta sul paraboloide, passa una retta s' della seconda famiglia. Questa retta s' incontra le retta r'_1 in un punto R (diverso da Q, altrimenti t ed r'_1 avrebbero P e Q in comune e sarebbero uguali). Pertanto s' ha due punti (Q ed R) che stanno su γ e quindi s' sta su γ.

Al variare di Q su t troviamo tante rette s' che stanno su γ, contro il fatto che le rette s' sono due a due sghembe. Assurdo. $\square$

50 **Esercizio 6.3.** *Dimostrare il Lemma 6.2.*

51 **Lemma 6.4.** *Possiamo immaginare la famiglia di rette r' come le posizioni successive di una retta che, vincolata a toccare la retta s_0, si muov*

Prima di dare la dimostrazione illustriamo il risultato. Come sappiamo (cfr. Osservazione 4.1) esistono due fasci di piani paralleli, i piani ρ e i piani σ, che contengono rispettivamente la famiglia delle rette r' e la famiglia delle rette s' che rigano il paraboloide. Tutti questi piani sono perpendicolari al piano α. Evidentemente (cfr. Fig. 14b) ciascun piano ρ taglia il paraboloide lungo la corrispondente retta r' e ciascun piano σ taglia il parabolide lungo la corrispondente retta s' (si veda anche Fig. 16). Questo spiega il caso (i).

Per fissare le idee converràCominciamo considerando un piano β perpendicolare al piano α su cui giacciono le rette r_0 e s_0. Consideriamo i due fasci di piani paralleli che contengono le due famiglie di rette (cfr. Osservazione 3.1). Se il piano β appartiene ad uno dei due fasci, allora taglia evidentemente il paraboloide lungo una retta. Ad es. il piano ρ in Fig. 16 taglia il paraboloide lungo la retta r' e il piano σ lungo la retta s'. In caso contrario teniamo comunque presente che per costruzione sulla verticale

è illustrata schematicamente la situazione vicino ad un punto P di $\mathcal{Q}$. La situazione è simile a quella di un passo di montagna (vedi Fig. 17b e in Fig. 17c sono disegnate le curve di livello).

Figure 19. a - b - c f25

Le curve di livello si ottengono semplicemente tagliando la superficie con piani orizzontali come illustrato dalla Fig. f25 19a - b (aprendo il filmato si vede il piano muoversi).

Ritorniamo al paraboloide iperbolico e sezioniamolo con un piano τ' parallelo al piano tangente τ_P. Poiché il parabolide iperbolico è una quadrica, la sezione $\mathcal{C} = \tau' \cap \mathcal{Q}$ è una conica. Il piano τ' taglia sui piani ρ e σ due rette che non toccano $\mathcal{C}$, perché sul piano ρ sta la retta r e nessuna altra retta della stessa famiglia può toccare quel piano, dunque il paraboloide