

## CAPITOLO IX

# Superfici rigate

### IX.1. Superfici rigate: definizione ed esempi

DEFINIZIONE IX.1.1. *Una superficie si dice rigata se è descritta da una retta in movimento; le diverse posizioni (rette) che essa assume nel corso del suo moto si chiamano generatrici della rigata, mentre ogni curva della superficie che sia incidente a tutte le generatrici si dice direttrice della rigata.*

Sia  $\mathcal{D}$  una direttrice della rigata; per ogni punto  $P$  di  $\mathcal{D}$  passa una generatrice  $r$  che possiamo individuare mediante un suo vettore direzione  $\vec{v}$ . I punti della generatrice  $r$  saranno allora della forma (vedi Fig. 1)

$$P + u\vec{v}$$

al variare di  $u \in \mathbb{R}$ . Possiamo descrivere la direttrice  $\mathcal{D}$  come traiettoria del moto di

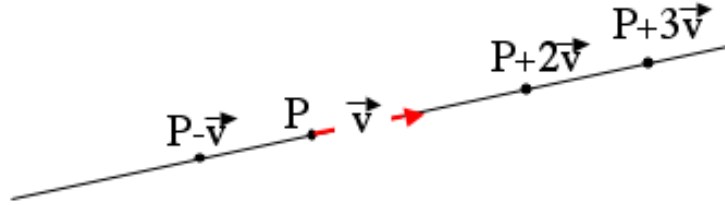


FIGURA 1

un punto  $P(t)$  e indicare con  $\vec{v}(t)$  il corrispondente vettore direzione; allora i punti della rigata saranno della forma

$$(IX.1.1) \quad X(u, t) = P(t) + u \vec{v}(t)$$

al variare di  $u \in \mathbb{R}$  e di  $t$  in un certo intervallo  $I$ .

ESEMPIO IX.1.2. *I cilindri sono le superfici rigate le cui generatrici sono parallele (cfr. Fig. 2 e Definizione VIII.5.1).*

ESEMPIO IX.1.3. *I coni sono le superfici rigate le cui generatrici concorrono tutte in un medesimo punto  $V$ , detto vertice. (cfr. Fig. 3) e Definizione VIII.5.4).*

ESEMPIO IX.1.4. *Ovviamente le superfici doppiamente rigate (piano, paraboloide iperbolico e iperboloide iperbolico) sono superfici rigate (vedi Fig. 4).*

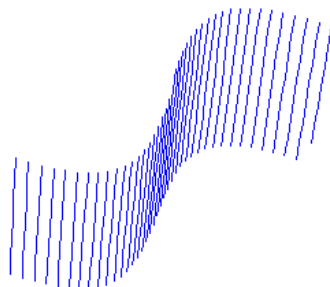


FIGURA 2. Apri il file per vedere la generatrice descrivere la superficie

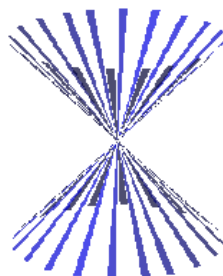


FIGURA 3. Apri il file per vedere la generatrice descrivere la superficie

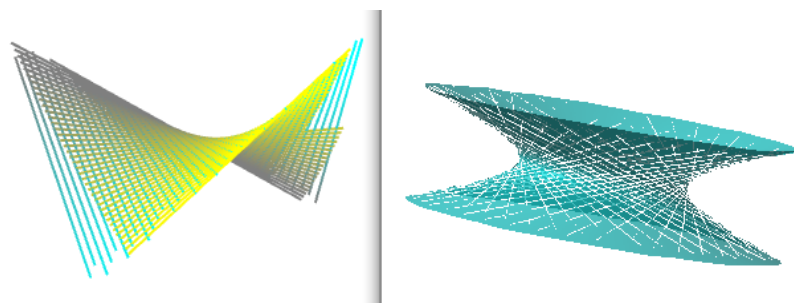


FIGURA 4. Apri i files per vedere meglio

È notevole il fatto che, in un paraboloide a sella, ogni retta è incidente a tutte le rette dell'altra famiglia e quindi può essere assunta come direttrice. Ciò non accade nell'iperboloide ad una falda, perché comunque fissata una sua retta  $r$ , esiste nell'altra famiglia una retta  $r'$  ad essa parallela (in Fig. 5 si vede che la retta bianca sul piano blu e la retta rossa sul piano verde sono parallele. Come sappiamo il piano che contiene le due rette è tangente al cono degli asintoti). In

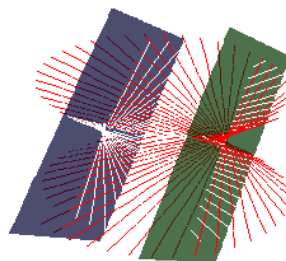


FIGURA 5. Apri il file per vedere muoversi i due piani

altri termini se cerchiamo di descrivere un iperboloide ad una falda prendendo come direttrice una sua retta  $r$ , riusciamo a descrivere tutto l'iperboloide meno una retta  $s$ , parallela ad  $r$ .

## IX.2. Superfici rigate non-cilindriche

Sia assegnata una superficie rigata  $\mathcal{S}$ ; la possiamo descrivere con l'equazione (IX.1.1). La superficie  $\mathcal{S}$  si dice non-cilindrica se il vettore  $\vec{v}(t)$ , vettore direzione della generatrice che passa per  $P(t)$ , ha direzione sempre non costante.

Cerchiamo una definizione più formale. Osserviamo che possiamo sempre scegliere il vettore direzione  $\vec{v}(t)$  di lunghezza 1, infatti basta sostituire  $\vec{v}(t)$  con il versore

$$w(t) := \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|},$$

(che è ben definito, perché un vettore direzione, per definizione, è sempre non nullo). Dunque ora  $\vec{v}(t)$  è un versore e l'unica variazione che può subire è un cambio di direzione; tale cambiamento si verifica se  $\frac{d\vec{v}}{dt} \neq 0$ . In conclusione diamo la seguente

**DEFINIZIONE IX.2.1.** *Una superficie rigata  $\mathcal{S}$  si dice non-cilindrica se è possibile descriverla con l'equazione*

$$X(u, t) = P(t) + u \vec{v}(t)$$

*con le ulteriori condizioni*

$$|\vec{v}(t)| = 1$$

*e, per ogni  $t$ ,*

$$\frac{d\vec{v}}{dt}(t) \neq 0.$$

**ESERCIZIO IX.2.2.** *L'iperbolide iperbolico è una superficie rigata non-cilindrica.*

**Soluzione.** Fissiamo una retta  $r$  dell'iperboloide come direttrice e sia  $P(t)$  un punto che la percorre. Per ogni istante  $t$  esiste una retta  $s_t$  (appartenente all'altra famiglia che riga l'iperboloide) che passa per  $P(t)$  (cfr. Fig. 6a). La retta  $s_t$  è una generatrice e il suo versore direzione lo indichiamo con  $\vec{v}(t)$ .

Per mostrare che l'iperbolide iperbolico è una superficie rigata non-cilindrica è necessario vedere che  $\frac{d\vec{v}}{dt}(t) \neq 0$ , per ogni istante  $t$ .

Se l'iperboloide iperbolico è di rotazione, allora la retta  $s_t$  ruota attorno all'asse e di conseguenza il versore  $\vec{v}(t)$ , applicato in un punto fissato, descrive (come in figura) un cono circolare retto e la sua estremità descrive una circonferenza. Mentre  $P(t)$  percorre la retta  $r$ , la generatrice  $s_t$  ruota sempre nello stesso verso e dunque anche la circonferenza viene percorsa da  $\vec{v}(t)$  percorre sempre nello stesso verso; quindi la sua velocità è  $\frac{d\vec{v}}{dt}(t) \neq 0$  per ogni  $t$ .

Per ottenere un iperboloide iperbolico di tipo generale, dobbiamo fare una contrazione/dilatazione in una direzione normale all'asse. Naturalmente il versore  $\vec{v}(t)$  cambierà di conseguenza, ma la sua velocità si manterrà sempre diversa da 0 e dunque è possibile concludere che anche l'iperboloide iperbolico di tipo generale è una superficie non-cilindrica.

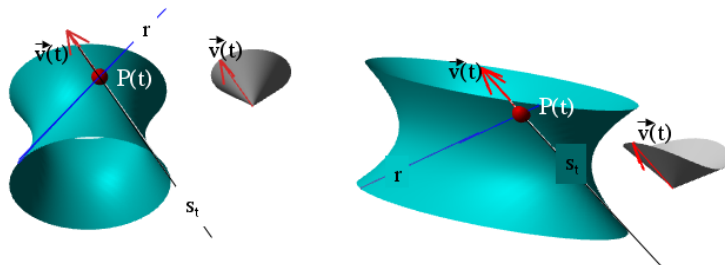


FIGURA 6. a - b Apri i files per vedere il moto

Vale tuttavia la pena di osservare che, nel caso generale, la curva descritta da  $\vec{v}(t)$ , applicato in un punto fisso, non è - come si potrebbe pensare - un'ellisse, ma una curva non piana. Come per altro si vede in Fig. 6b. La ragione è semplice, il vettore  $\vec{v}(t)$  deve percorrere un cono, il quale, deformato dalla stessa trasformazione affine che deforma l'iperboloide di rotazione in un iperboloide di tipo generale, non sarà più circolare, ma bensì ellittico. Tuttavia il vettore  $\vec{v}(t)$  ha sempre lunghezza 1.

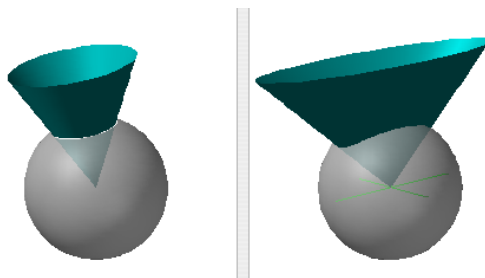


FIGURA 7. a - b

Dunque (cfr. Fig. 7) la curva descritta da  $\vec{v}(t)$  è l'intersezione di un cono ellittico con una sfera centrata nel vertice del cono e raggio 1; questa curva se il cono è circolare è una circonferenza (vedi Fig. 7a), se il cono non è circolare non è una curva piana (vedi Fig. 7b).  $\square$

**ESERCIZIO IX.2.3.** *Il paraboloide a sella è una superficie non-cilindrica.*

**Soluzione.** Nel caso del paraboloide a sella le rette, di ciascuna delle due famiglie che lo rigano, sono due a due sghembe e giacciono su un fascio di piani paralleli. Pertanto prendendo una di queste due famiglie come insieme delle generatrici, i loro versori direzione  $\vec{v}(t)$  sono tutti paralleli ad uno stesso piano e dunque  $\vec{v}(t)$ , applicato in un punto fisso, descrive un arco di circonferenza.

Se ripensiamo alla costruzione del paraboloide per mezzo di due sistemi di assi, l'angolo di rotazione di  $\vec{v}(t)$ , mentre percorre la circonferenza, corrisponde all'angolo di cui è ruotata ogni generatrice rispetto alla posizione iniziale.

Poiché, al variare di  $t$ , la corrispondente generatrice ruota sempre nella stessa direzione, il vettore  $\vec{v}(t)$  non inverte mai il proprio senso di marcia sulla circonferenza e dunque  $\frac{d\vec{v}}{dt}(t) \neq 0$ , per ogni  $t$ . Allora, per definizione, il paraboloide a sella è una superficie non-cilindrica.  $\square$

**ESERCIZIO IX.2.4.** *Un cono è una superficie non cilindrica.*

Soluzione. Sia  $V$  il vertice di un cono  $\mathcal{K}$ . Prendiamo l'intersezione tra la sfera di centro  $V$  e raggio 1 e il cono (cfr. Fig. 8); la curva che otteniamo è una direttrice

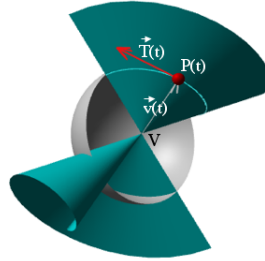


FIGURA 8. Apri il file per vedere il punto che si muove

$\mathcal{D}$ . Sia  $P(t)$  un punto che percorre  $\mathcal{D}$  a velocità unitaria. La generatrice che passa per  $P(t)$  è la retta  $\overline{VP(t)}$  e ha come versore direzione  $\vec{v}(t) = \frac{P(t) - V}{|P(t) - V|}$ . Dunque

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(P(t) - V) = \frac{dP}{dt},$$

e quest'ultimo è il versore tangente alla direttrice  $\mathcal{D}$  e dunque è non nullo. Pertanto la velocità del versore direzione è sempre non nulla e dunque la superficie è non-cilindrica.  $\square$

Se  $\mathcal{S}$  è un cilindro, allora il vettore  $\vec{v}(t)$  ha direzione costante, questo spiega perché abbiamo usato il termine non-cilindrica. Tuttavia notiamo che è falso che una superficie rigata possa essere soltanto o un cilindro oppure una superficie non cilindrica.

ESEMPIO IX.2.5. Si consideri la superficie in Fig. 9a. Si tratta di una superficie

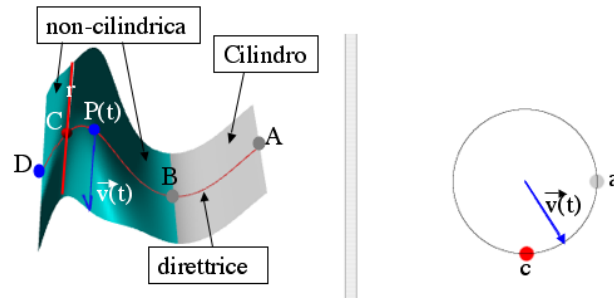


FIGURA 9

rigata; è evidenziato il versore  $\vec{v}(t)$  direzione della generatrice che passa per il punto  $P(t)$  della direttrice. In Fig. 9b vediamo lo stesso versore  $\vec{v}(t)$  applicato in un punto fisso. Mentre il punto  $P(t)$  si muove sulla direttrice a destra il versore  $\vec{v}(t)$  percorre l'arco di circonferenza  $\widehat{ac}$  (apri il file per vedere il movimento).

(1) Mentre  $P(t)$  va da  $A$  a  $B$  il versore  $\vec{v}(t)$  è fermo in  $a$ . Dunque la porzione di superficie compresa tra le generatrici che passano per  $A$  e per  $B$  (la parte in grigio) è un cilindro!

(2) Mentre  $P(t)$  va da  $B$  a  $C$  il versore  $\vec{v}(t)$  percorre tutto l'arco di circonferenza  $\widehat{ac}$  e dunque la sua velocità  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  è non nulla. Dunque la striscia di superficie tra  $B$  e  $C$  è non cilindrica.

(3) Quando  $P(t)$  arriva in  $C$  il versore  $\vec{v}(t)$  inverte il senso di marcia, quindi, all'istante  $t_0$  in cui  $P(t_0) = C$ , la velocità  $\frac{d\vec{v}}{dt}(t_0)$  si annulla.

(4) Mentre  $P(t)$  va da  $C$  a  $D$  il versore  $\vec{v}(t)$  si muove e lungo l'arco di circonferenza da  $c$  verso  $a$  e dunque la sua velocità  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  è non nulla. Dunque la striscia di superficie tra  $C$  e  $D$  è non cilindrica.

In conclusione la striscia tra le generatrici che passano per  $A$  e  $B$  è un cilindro; la striscia tra le generatrici che passano per  $B$  e  $D$  è non-cilindrica se togliamo la generatrice che passa per  $C$ .  $\square$

L'Esempio IX.2.5 illustra abbastanza chiaramente il caso generale. Esaminiamo meglio la questione: la funzione  $|\frac{d\vec{v}}{dt}(t)|$  è definita in un certo intervallo temporale  $I$  durante il quale il punto  $P(t)$  percorre una direttrice. Ad ogni istante  $t$  corrispondono un certo punto  $P(t)$  e la generatrice che passa per  $P(t)$ . Ad un intervallo  $J$ , contenuto in  $I$ , corrisponde un certo arco sulla direttrice e le generatrici che passano per i punti di questo arco formano una striscia  $\mathcal{S}_J$  sulla superficie. Se la funzione  $|\frac{d\vec{v}}{dt}(t)|$  è nulla in  $J$ , allora la superficie  $\mathcal{S}_J$  è un cilindro. In effetti la funzione può essere nulla su certi intervalli  $J_1, \dots, J_m$  di  $I$  e poi può annullarsi anche in certi valori isolati  $t_1, \dots, t_n \in I$ , che corrispondono a certe generatrici  $r_1, \dots, r_n$ . In tal caso possiamo concludere che togliendo da  $\mathcal{S}$  i pezzi di cilindro  $\mathcal{S}_{J_1}, \dots, \mathcal{S}_{J_m}$  e le generatrici  $r_1, \dots, r_n$  resta una superficie non-cilindrica. Ma la situazione può essere anche molto complicata, perché le strisce che sono cilindri e le generatrici su cui  $|\frac{d\vec{v}}{dt}(t)|$  è nulla possono essere infinite; e quel che è peggio, questo può accadere anche in una striscia di superficie limitata (possiamo pensare ad infinite strisciole cilindriche di larghezza sempre più piccola). Non è nostro obbiettivo dare una descrizione accurata di questi casi patologici, ma volevamo solo segnalare il problema.

### IX.3. Punti centrali e curva di stringimento

**IX.3.1. Introduzione.** Immaginiamo di percorrere una generatrice di una superficie rigata  $\mathcal{S}$  restando ritti sul piano tangente, vale a dire il nostro corpo ha la direzione del versore normale. Se il piano tangente cambia lungo la generatrice, ci troveremo come ritti su una zattera in mezzo al mare; zattera che ora si inclina da una parte, ora dall'altra. Meglio ancora, siccome le oscillazioni possono essere solo da una parte o dall'altra della generatrice, possiamo immaginare di essere in equilibrio instabile su un altalena, con un piede da una parte e un piede dall'altra del perno.

Il fatto è che le superfici rigate presentano un comportamento estremamente regolare e le cose, come poi vedremo in dettaglio, stanno grosso modo così. Se la superficie è un cilindro, non c'è problema: il piano tangente resta fisso. Se invece la superficie è non-cilindrica, allora, percorrendo tutta la generatrice da  $-\infty$  a  $+\infty$ , il piano tangente ruota di  $180^\circ$ , esattamente come nel caso che conosciamo dell'iperboloide iperbolico. Inoltre questo movimento rotatorio è determinato in modo molto preciso; innanzi tutto c'è un punto (che chiameremo punto centrale) rispetto al quale il movimento è simmetrico. Questo significa che se due duellanti si allontanano, a partire dal punto centrale, lungo la generatrice in direzioni opposte e alla stessa velocità, essi ruotano entrambi, ciascuno verso la propria destra (o ciascuno verso la propria sinistra) e con la stessa velocità. Per di più la velocità

di rotazione è completamente determinata da un unico numero (che chiameremo parametro di stringimento) che dipende dal punto centrale (cioè dalla generatrice prescelta).

**IX.3.2. Il caso dei cilindri.** Si tratta del caso più facile, perché percorrendo una generatrice il piano tangente non oscilla, ma resta fermo, infatti:

**ESERCIZIO IX.3.1.** *Nei punti della generatrice di un cilindro il piano tangente è sempre il medesimo.*

Soluzione. Tagliamo un cilindro con un fascio di piani paralleli tra loro e perpendicolari alle generatrici. Così facendo tagliamo sul cilindro delle direttrici tutte identiche tra loro e nei punti che stanno su una medesima generatrice (i punti  $A$  e  $B$  di Fig. 10) i vettori tangenti alle direttrici sono uguali; uguale è ovviamente

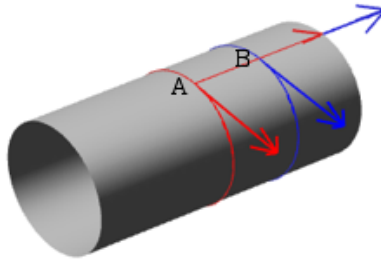


FIGURA 10

anche il vettore  $\vec{v}$  tangente alla generatrice; questi due vettori determinano il piano tangente, che pertanto è il medesimo.  $\square$

**IX.3.3. Superfici rigate non cilindriche: i punti centrali.** Consideriamo ora una superficie non-cilindrica e osserviamo che

**LEMMA IX.3.2.** *Fissata una generatrice  $r$  di una superficie rigata non-cilindrica  $\mathcal{S}$ , se  $s$  è un'altra generatrice sufficientemente vicina ad  $r$ , allora non può esserle parallela.*

Dimostrazione. Se  $P(t)$  è un punto in moto, allora

$$\frac{dP}{dt}(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{P(t') - P(t)}{t' - t}.$$

Se esistono valori di  $t'$  molto vicini a  $t$ , per cui  $P(t') = P(t)$ , allora  $\frac{P(t') - P(t)}{t' - t} = \frac{0}{t' - t} = 0$  e quindi  $\lim_{t' \rightarrow t} \frac{P(t') - P(t)}{t' - t} = 0$ . Dunque viceversa

$$\text{se } \frac{dP}{dt}(t) \neq 0, \text{ allora per } t' \text{ sufficientemente vicino a } t, \\ \text{vale } P(t') \neq P(t).$$

È sufficiente applicare questo risultato al versore direzione  $\vec{v}(t)$  della generatrici. La superficie è non-cilindrica, quindi  $\frac{d\vec{v}}{dt}(t) \neq 0$ , ne segue che per  $t'$  sufficientemente vicino a  $t$ ,  $\vec{v}(t') \neq \vec{v}(t)$ , vale a dire i due versori hanno direzioni diverse e dunque le corrispondenti generatrici non sono parallele.  $\square$

**ESERCIZIO IX.3.3.** *Date due rette che non sono parallele, esiste una ed una sola retta perpendicolare ed incidente ad entrambe.*

Soluzione. Se le due rette sono sghembe questa è una conseguenza del Corollario V.1.6. Altrimenti le due rette sono incidenti e giacciono entrambe su un piano  $\alpha$ : la perpendicolare ad  $\alpha$  condotta per il punto comune alle due rette è l'unica retta perpendicolare e incidente ad entrambe. **N.B.** è opportuno riportare anche una prova del Corollario V.1.6.  $\square$

Per il Lemma IX.3.2 e l'Esercizio IX.3.3,

*assegnate due generatrici di una superfice rigata, se la superfice è non-cilindrica e le due generatrici sono sufficientemente vicine, allora esiste un'unica retta perpendicolare ed incidente ad entrambe.*

Il teorema seguente introduce la nozione di punto centrale di una generatrice. Questa nozione richiede che valga, per due generatrici della superfice rigata, l'affermazione precedente; pertanto siamo costretti ad assumere come ipotesi che la superfice rigata sia non-cilindrica. Dunque la nozione di punto centrale ha senso solo sulle superfici rigate non-cilindriche.

**TEOREMA IX.3.4.** *Sia  $\mathcal{S}$  una superfice rigata non-cilindrica. Fissata una generatrice  $r$ , se la generatrice  $s$  è sufficientemente vicina ad  $r$ , allora esiste un'unica retta perpendicolare ed incidente ad entrambe le generatrici. Quest'ultima retta incontra  $r$  in un certo punto  $P_s$  che dipende dalla generatrice  $s$ . Al tendere di  $s$  ad  $r$  esiste una posizione limite per  $P_s$  che indichiamo con  $P$ ; cioè poniamo*

$$P := \lim_{s \rightarrow r} P_s$$

*Questo punto  $P$  della generatrice  $r$  si chiama punto centrale di  $r$ .*

Un esempio per illustrare il Teorema. In Fig. 11 vediamo un iperboloide iperbolico e due generatrici,  $r$  ed  $s$ . Esse sono sghembe ed esiste un'unica retta perpendicolare

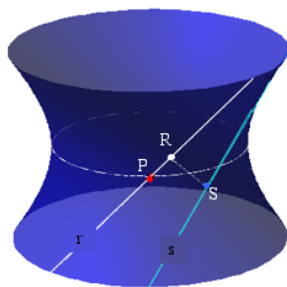


FIGURA 11. Apri il file per vedere muoversi la retta  $s$

ed incidente ad entrambe, la retta  $RS$ . All'avvicinarsi di  $s$  ad  $r$ , il punto  $R$  tende al punto  $P$  che è il punto centrale della retta  $r$ .

**ESERCIZIO IX.3.5.** *Il punto centrale di ogni generatrice di un cono coincide con il vertice del cono.*

Soluzione. Come sappiamo un cono è una superfice rigata non-cilindrica. Fissiamo una generatrice  $r$  del cono e consideriamo una qualsiasi altra generatrice  $s$ . Le due rette,  $r$  ed  $s$ , sono incidenti nel vertice  $V$  del cono. Pertanto la retta perpendicolare ed incidente ad entrambe è la normale al piano  $\alpha$ , individuato da  $r$  ed  $s$ , condotta



per  $V$ . Dunque tale normale interseca  $r$  in  $V$ . Questo punto  $V$  non dipende dalla scelta di  $s$  e dunque, in base alla definizione,  $V$  stesso è il punto centrale di  $r$ .  $\square$

#### IX.3.4. Superfici non-cilindriche. La curva di stringimento.

DEFINIZIONE IX.3.6. *Su una superficie rigata non-cilindrica, l'insieme dei punti centrali (uno per ciascuna generatrice) forma una curva, detta curva di stringimento.*

In un cono la curva di stringimento si riduce al solo vertice.

ESERCIZIO IX.3.7. *Curva di stringimento del paraboloide iperbolico (caso ortogonale).* Un paraboloide iperbolico si costruisce a partire da due rette  $r_0$  e  $s_0$  (vedi Cap. V §2). Mostrare che se queste due rette sono ortogonali, allora la curva di stringimento del paraboloide è  $r_0$  oppure  $s_0$ , a seconda di quale delle due famiglie di rette scegliamo come generatrici.

Soluzione. In Fig. 12 si vede una porzione di paraboloide iperbolico in cui le rette

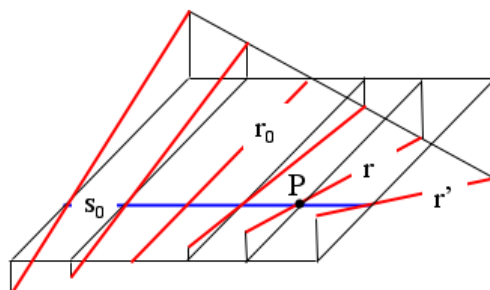


FIGURA 12

$r_0$  e  $s_0$  sono ortogonali. Prendiamo  $s_0$  come direttrice. In figura vediamo in rosso le generatrici. È evidente che la retta  $s_0$  è perpendicolare a tutte le generatrici, perché è perpendicolare a  $r_0$ .

Utilizziamo la definizione di punto centrale. Fissata una generatrice  $r$  e presa un'altra generatrice  $r'$ , la retta  $s_0$  è perpendicolare ed incidente ad entrambe e taglia la generatrice  $r$  in  $P$ . All'avvicinarsi di  $r'$  ad  $r$ , il punto  $P$  non cambia e dunque  $P$  è il punto centrale di  $r$ .

Dunque il punto centrale di una qualunque generatrice  $r$  sta su  $s_0$ . Pertanto  $s_0$  è la curva di stringimento.  $\square$

#### IX.3.5. Un metodo per trovare la curva di stringimento.

TEOREMA IX.3.8. *Sia  $S$  una superficie rigata non-cilindrica descritta dall'equazione*

$$X(u, t) = P(t) + u \vec{v}(t),$$

dove  $\vec{v}(t)$  è un versore. Il punto centrale della generatrice che passa per  $P(t)$  è quel punto  $Q$  per cui il piano  $\tau_Q$ , tangente ad  $S$  in  $Q$ , è perpendicolare al vettore  $\frac{d\vec{v}}{dt}(t)$ .

L'idea è che, muovendosi sulla generatrice che passa per  $P(t)$ , il piano tangente si muove; si tratta di trovare il punto  $Q$  della generatrice il cui il piano tangente è perpendicolare al vettore  $\frac{d\vec{v}}{dt}(t)$ .

Come applicazione del Teorema vediamo il seguente

**ESERCIZIO IX.3.9.** *Mostrare che in per un iperboloide iperbolico di rotazione la linea di stringimento è il parallelo più piccolo, vale a dire quello generato dai vertici dell'iperbole.*

**Soluzione.** Sia  $P$  un punto del parallelo  $\mathcal{P}$  generato dai vertice dell'iperbole (vedi Fig. 13); consideriamo come generatrice la retta  $r$ , una delle due rette che il piano

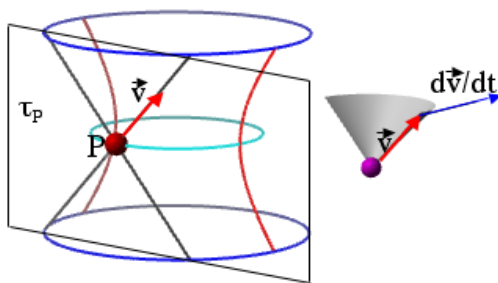


FIGURA 13

$\tau_P$ , tangente all'iperboloide in  $P$ , taglia sulla superficie. Se  $P$  si muove sul parallelo  $\mathcal{P}$ , in senso orario, il versore  $\vec{v}$ , applicato in un punto fisso, descriverà un cono e il suo estremo una circonferenza  $\mathcal{C}$ . La tangente  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  a  $\mathcal{C}$  in  $\vec{v}$  è ortogonale al piano tangente in  $P$ . Dunque  $P$  è punto centrale della generatrice.  $\square$

Il Teorema fornisce anche un metodo per calcolare la linea di stringimento con cui si vede ad

**ESEMPIO IX.3.10.** *Per un paraboloido iperbolico costruito a partire da due rette  $r_0$  e  $s_0$  non ortogonali, la linea di stringimento è una parabola (vedi Fig. 14).*

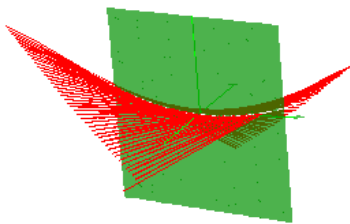


FIGURA 14

**ESEMPIO IX.3.11.** *Per un iperboloide iperbolico di tipo generale (dunque non di rotazione) la curva di stringimento è visibile in Fig. 15.*

Vediamo come funziona in pratica il metodo per trovare la linea di stringimento.

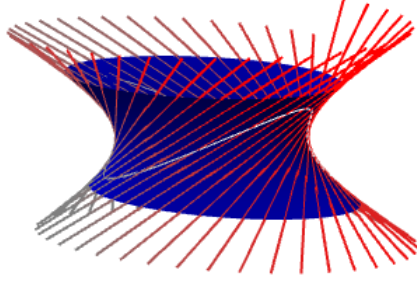


FIGURA 15. Apri il file per vedere l'iperboloide che si modifica e la curva di stringimento che cambia

PROPOSIZIONE IX.3.12. *Sia data la superficie  $\mathcal{S}$ , rigata non-cilindrica, descritta dall'equazione*

$$X(u, t) = P(t) + u \vec{v}(t),$$

con  $\vec{v}(t)$  versore.

*La linea di stringimento è descritta dall'equazione*

$$(IX.3.1) \quad Q(t) = P(t) + u(t) \vec{v}(t),$$

dove la funzione  $u(t)$  è data dalla formula

$$(IX.3.2) \quad u(t) = -\frac{\frac{dP}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|^2}.$$

Dimostrazione. I punti della generatrice che passa per  $P(t)$  sono della forma  $P(t) + u \text{ vecv}(t)$ , al variare di  $u \in \mathbb{R}$ ; quindi la formula (IX.3.1) dice che  $Q(t)$  è un punto della generatrice che passa per  $P(t)$ . Si tratta di determinare  $u(t)$  in modo che  $Q(t)$  sia punto centrale e vedere che il valore di  $u(t)$  che va bene è quello indicato dalla formula (IX.3.2).

Supponiamo che, per ogni  $t$ ,  $Q(t)$  sia punto centrale; esso descrive, al variare di  $t$ , una curva  $\mathcal{C}$  che è la linea di stringimento.

Il vettore tangente alla curva  $\mathcal{C}$  è

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dP}{dt} + \dot{u}(t) \vec{v}(t) + u(t) \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Il vettore tangente alla generatrice che passa per  $Q(t)$  è

$$\vec{v}(t)$$

Abbiamo così trovato due vettori tangenti in  $Q(t)$  e dunque essi individuano il piano tangente. Siccome  $Q(t)$  è punto centrale questi due vettori sono perpendicolari a  $\frac{d\vec{v}}{dt}$ .

Osserviamo che  $\vec{v}(t)$  e  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  sono ortogonali<sup>1</sup>.

Dal fatto che  $\frac{dQ}{dt}$  e  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  siano ortogonali segue

$$0 = \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dP}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + u(t) \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt};$$

vale a dire

$$u(t) = -\frac{\frac{dP}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|^2},$$

come si voleva. □

<sup>1</sup>Poiché  $\vec{v}(t)$  è un versore si può ragionare come in Ch. per mostrare che  $\vec{T}$  e la sua velocità sono ortogonali.

### IX.4. Il parametro di stringimento

#### IX.4.1. Definizione e primi esempi. Ricordo la seguente

DEFINIZIONE IX.4.1. Siano  $\vec{u}, \vec{v}$  due vettori nello spazio. Il loro prodotto vettoriale, che si indica con  $\vec{u} \times \vec{v}$ , è un vettore, definito come segue.

(1) Se uno dei due vettori è nullo, oppure sono paralleli, poniamo

$$\vec{u} \times \vec{v} = 0.$$

(2) Altrimenti definiamo  $\vec{u} \times \vec{v}$  specificandone direzione, verso e lunghezza: la direzione è quella perpendicolare ad entrambi i vettori  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , il verso è determinato dalla regola della mano destra e la lunghezza è pari a  $|\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$ , dove  $\theta$  è l'angolo formato dai due vettori.

**N.B.** Si noti che  $\vec{u} \times \vec{v} = 0$  solo nel caso (1). Infatti la lunghezza  $L = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$  di  $\vec{u} \times \vec{v}$  si annulla solo se uno dei due vettori è nullo, oppure essi formano un angolo nullo oppure piatto, cioè se sono paralleli.

Una motivazione per questa definizione è presentata dal seguente

ESERCIZIO IX.4.2. Mostrare che il volume del parallelepipedo in Fig. 16 è

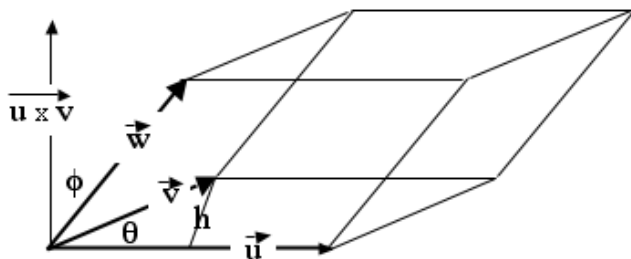


FIGURA 16

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Soluzione. L'area della base del parallelepipedo è

$$|\vec{u}|h = |\vec{u}|(|\vec{v}| \sin \theta).$$

L'altezza del parallelepipedo è

$$|\vec{w}| \cos \phi.$$

Dunque il volume  $V$  del parallelepipedo è base  $\times$  altezza:

$$V = (|\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta) (|\vec{w}| \cos \phi).$$

Il prodotto scalare tra  $\vec{u} \times \vec{v}$  e  $\vec{w}$  è

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = |\vec{u} \times \vec{v}| |\vec{w}| \cos \phi = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta |\vec{w}| \cos \phi = V.$$

□

Introduciamo il parametro di stringimento di una superficie rigata non-cilindrica.

DEFINIZIONE IX.4.3. Sia  $\mathcal{S}$  una superficie rigata non-cilindrica e sia  $P(t)$  un punto che descrive la linea di stringimento di  $\mathcal{S}$  e si  $\vec{v}(t)$  il versore direzione della generatrice che passa per  $P(t)$ .

Allora (cfr. Teorema IX.3.8) il piano  $\tau_{P(t)}$  tangente ad  $\mathcal{S}$  in  $P(t)$  è perpendicolare a  $\frac{d\vec{v}}{dt}(t)$ . In particolare i vettori  $\frac{dP}{dt}(t)$ , tangente alla linea di stringimento, e  $\vec{v}(t)$  tangente alla generatrice, sono perpendicolari a  $\frac{d\vec{v}}{dt}(t)$  (vedi Fig. 17).

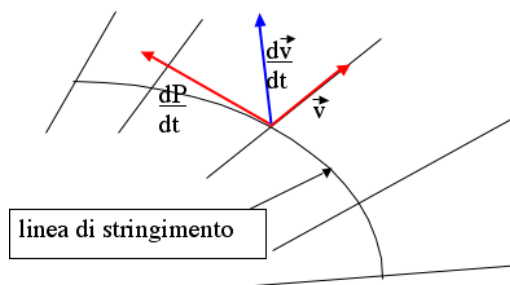


FIGURA 17

Ne segue che i vettori  $\frac{dP}{dt}(t) \times \vec{v}(t)$  e  $\frac{d\vec{v}}{dt}(t)$  hanno la stessa direzione, quindi esiste un numero  $p(t)$  tale che

$$(IX.4.1) \quad \frac{dP}{dt}(t) \times \vec{v}(t) = p(t) \frac{d\vec{v}}{dt}(t).$$

tale numero è detto *parametro di stringimento della generatrice che passa per  $P(t)$* .

Nel caso in figura, per la regola della mano destra,  $\frac{dP}{dt}(t) \times \vec{v}(t)$  e  $\frac{d\vec{v}}{dt}(t)$  hanno verso opposto e quindi  $p(t)$  è negativo.

**N.B.** Il versore direzione  $\vec{v}(t)$  è determinato dalla generatrice a meno del segno e interviene in (IX.4.1) che definisce il parametro di stringimento  $p(t)$ ; quindi potrebbe sembrare che il parametro di stringimento dipenda dalla scelta del verso del versore  $\vec{v}(t)$ . Così non è, infatti cambiando di segno a  $\vec{v}(t)$ , cambia il segno anche della sua derivata e in (IX.4.1) i due cambiamenti si elidono.

Vediamo subito un'interpretazione geometrica del parametro di stringimento.

PROPOSIZIONE IX.4.4. Siano  $\mathcal{S}$  una superficie rigata e  $r$  una sua generatrice. Sia poi  $r'$  un'altra generatrice; indichiamo con  $\phi$  l'angolo tra le due rette e con  $d$  la loro distanza. Allora, al tendere di  $r'$  ad  $r$  il limite del rapporto  $\frac{d}{\phi}$  il valore assoluto del parametro di stringimento di  $r$ . In formule

$$|p| = \lim_{r' \rightarrow r} \frac{d}{\phi}.$$

**N.B.** La distanza tra due rette è: (i) nulla se sono incidenti, (ii) ovviamente definita se sono parallele, infine (iii) se sono sghembe, è pari alla lunghezza del segmento, perpendicolare ad entrambe, che le unisce.

Vediamo un'applicazione.

ESERCIZIO IX.4.5. Il parametro di stringimento di un cono è nullo per tutte le generatrici.

Soluzione. Possiamo vederlo in due modi.

(1) Usiamo la formula

$$\frac{dP}{dt}(t) \times \vec{v}(t) = p(t) \frac{d\vec{v}}{dt}(t),$$

dove  $P(t)$  percorre la linea di stringimento. La linea di stringimento è il vertice  $V$  del cono, allora  $P(t) = V$ , per ogni  $t$ . Quindi, essendo  $P(t)$  costante,  $\frac{dP}{dt}(t) = 0$ . Dalla formula otteniamo

$$0 = p(t) \frac{d\vec{v}}{dt}(t),$$

e quindi  $p(t) = 0$ .

(2) Le generatrici passano tutte per il vertice e quindi hanno distanza nulla tra loro. Pertanto, nella formula

$$|p| = \lim_{r' \rightarrow r} \frac{d}{\phi},$$

$d = 0$ , qualunque siano le due generatrici, e perciò,  $p = 0$ . □

#### IX.4.2. Il moto del piano tangente e il parametro di stringimento.

Finalmente stabiliamo il risultato a cui miravamo (cfr. §IX.3.1) circa il movimento del piano tangente.

**TEOREMA IX.4.6.** *Sia  $\mathcal{S}$  una superficie rigata non-cilindrica. Sia  $P$  il punto centrale di una generatrice e sia  $p$  il parametro di stringimento di quella generatrice. Se punto  $Q$  si allontana da  $P$  lungo la generatrice, il piano  $\tau_Q$ , tangente ad  $\mathcal{S}$  in  $Q$ , ruota verso sinistra se  $p > 0$ , verso destra se  $p < 0$  e sta fermo se  $p = 0$ . Inoltre l'angolo  $\phi$  formato dai due piani è pari a*

$$\phi = |\arctan(\frac{\|Q - P\|}{p})|.$$

**N.B.** In Fig. 18 sono esemplificati i due casi. Invece dei piani tangenti si è preferito

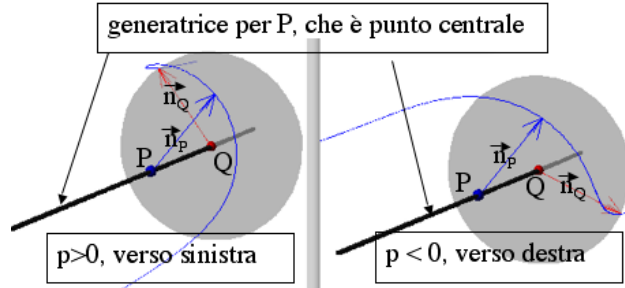


FIGURA 18

indicare i versori normali  $\vec{n}_P$  e  $\vec{n}_Q$  alla superficie (che sono perpendicolari ai rispettivi piani tangenti); si vede anche la traiettoria descritta dal versore  $\vec{n}_Q$  al muoversi di  $Q$ . Immaginiamo di essere in  $P$  e di guardare il moto di  $\vec{n}_Q$ , mentre  $Q$  si allontana da  $P$  lungo la generatrice, in un verso o nell'altro; utilizzando la traiettoria disegnata in figura ci possiamo rendere conto che: se  $p > 0$  vediamo il versore  $\vec{n}_Q$  ruotare verso sinistra (indipendentemente dal verso in cui si sta allontanando  $Q$ ), se  $p < 0$  vediamo il versore  $\vec{n}_Q$  ruotare verso destra (indipendentemente dal verso in cui si sta allontanando  $Q$ ). L'altra caratteristica che si nota è che la rotazione del versore  $\vec{n}_Q$

è molto più rapida quanto più è vicino al punto centrale  $P$ . Aprendo il file si vede il punto  $Q$  muoversi lungo la generatrice e inoltre è possibile mutare il parametro di stringimento  $p$ , variando così la traiettoria del versore  $\vec{n}_Q$ .

La forma della traiettoria di  $\vec{n}_Q$  è giustificata dal seguente grafico (Fig. 19) che

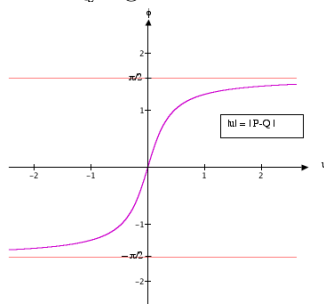


FIGURA 19

rappresenta l'angolo  $\phi$  tra  $\vec{n}_P$  e  $\vec{n}_Q$  in funzione della distanza di  $Q$  da  $P$  (aprendo il file si può mutare il parametro  $p(t)$ ).

Infine si osservi che, come mostra il grafico

$$\lim_{Q \rightarrow \pm\infty} \arctan\left(\frac{\|Q - P\|}{p}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$$

e dunque l'angolo che percorre  $\vec{n}_Q$  quando  $Q$  si muove lungo tutta la retta è tra  $-\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{\pi}{2}$ , quindi è un angolo piatto.

Dimostrazione. Esponiamo per completezza la dimostrazione.

In Fig. 20 sono rappresentati i due casi: in alto, allontanandosi da  $P$  il versore normale ruota

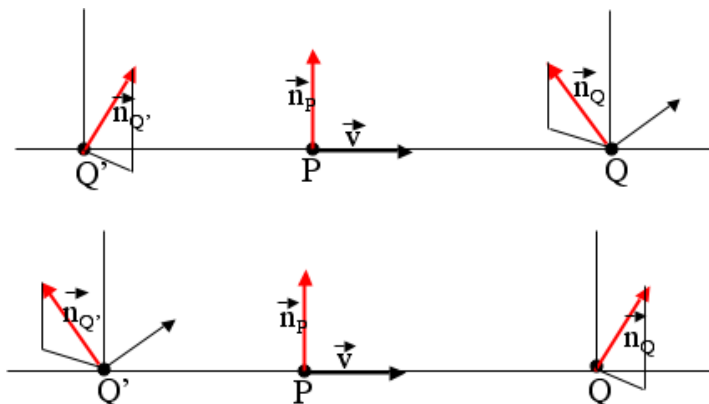


FIGURA 20

verso sinistra, in basso verso destra. Si osservi che, per la regola della mano destra, nel primo caso  $\vec{n}_P \times \vec{n}_Q$  e  $\vec{n}_P \times \vec{n}_{Q'}$  hanno verso opposto al moto di  $Q$  e di  $Q'$ ; nel secondo caso hanno lo stesso verso del moto.

Supponiamo che  $P(t)$  percorra la linea di stringimento e che  $Q = P(t) + u\vec{v}(t)$ . Nel punto  $P(t)$  i vettori  $\frac{dP}{dt}(t)$  e  $\vec{v}(t)$  sono tangenti alla superficie, quindi il loro prodotto scalare è perpendicolare alla superficie in  $P(t)$  e

$$\vec{n}_P = \frac{\frac{dP}{dt}(t) \times \vec{v}(t)}{\left| \frac{dP}{dt}(t) \times \vec{v}(t) \right|}.$$

Ma  $\frac{dP}{dt}(t) \times \vec{v}(t) = p(t) \frac{d\vec{v}}{dt}(t)$ , quindi

$$\vec{n}_P = \frac{p(t) \frac{d\vec{v}}{dt}(t)}{|p(t) \frac{d\vec{v}}{dt}(t)|}.$$

In  $Q$  i vettori  $\frac{dP}{dt}(t) + u \frac{d\vec{v}}{dt}(t)$  e  $\vec{v}(t)$  sono tangenti alla superficie e

$$\left( \frac{dP}{dt}(t) + u \frac{d\vec{v}}{dt}(t) \right) \times \vec{v}(t) = p(t) \frac{d\vec{v}}{dt}(t) + u \frac{d\vec{v}}{dt}(t) \times \vec{v}(t).$$

Ne segue che

$$\vec{n}_Q = \frac{p(t) \frac{d\vec{v}}{dt}(t) + u \frac{d\vec{v}}{dt}(t) \times \vec{v}(t)}{\sqrt{p^2(t) + u^2} \left| \frac{d\vec{v}}{dt}(t) \right|}.$$

Osservato che

$$\frac{d\vec{v}}{dt}(t) \times \left( \frac{d\vec{v}}{dt}(t) \times \vec{v}(t) \right) = - \left| \frac{d\vec{v}}{dt}(t) \right|^2 \vec{v}(t),$$

ne segue

$$\vec{n}_P \times \vec{n}_Q = - \frac{p(t)u \vec{v}(t)}{|p(t)| \sqrt{p^2(t) + u^2}}$$

In conclusione: se  $p(t) > 0$  e  $u > 0$  allora  $Q$  si allontana da  $P(t)$  nella direzione di  $\vec{v}(t)$  e il verso di  $\vec{n}_P \times \vec{n}_Q$  è quello opposto a  $\vec{v}(t)$  (perché  $-p(t)u < 0$ ). Se invece  $p(t) > 0$  e  $u < 0$ , allora  $Q$  si allontana nella direzione opposta a  $\vec{v}(t)$  e il verso di  $\vec{n}_P \times \vec{n}_Q$  è quello di  $\vec{v}(t)$  (perché  $-p(t)u > 0$ ). Dunque il verso di  $\vec{n}_P \times \vec{n}_Q$  è in direzione opposta al moto e dunque il versore normale ruota verso sinistra. Analogo argomento, se  $p(t) < 0$ , mostra che il versore normale ruota verso destra. Inoltre se  $p = 0$ , allora  $\vec{n}_P \times \vec{n}_Q = 0$  e dunque i due versori coincidono.

Infine

$$\cos \phi = \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = \frac{p^2(t)}{|p(t)| \sqrt{p^2(t) + u^2}} > 0$$

quindi  $0 \leq \phi < \pi/2$  e

$$\tan \phi = \frac{|u|}{|p(t)|}.$$

□

### IX.5. Rigata delle tangenti

DEFINIZIONE IX.5.1. *Data una curva gobba (cioè non piana)  $\mathcal{C}$ , la rigata delle tangenti di  $\mathcal{C}$  è la superficie formata da tutte le rette tangenti a  $\mathcal{C}$ .*

È possibile anche definire la rigata delle tangenti di una curva piana, tuttavia in tal caso si ottiene solo una porzione di piano. Ad es. in Fig. 21 vediamo la rigata

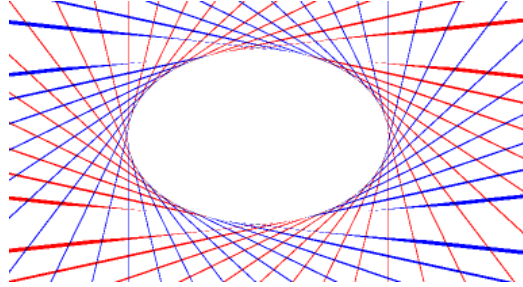


FIGURA 21

delle tangenti di un'ellisse, detta anche evoluta dell'ellisse, costituita dalla parte di piano esterna all'ellisse.



PROPOSIZIONE IX.5.2. *La superficie delle tangenti ad una curva  $\mathcal{C}$  è una superficie non-cilindrica se e solo se la curvatura di  $\mathcal{C}$  non si annulla mai; in tal caso la linea di stringimento è la curva  $\mathcal{C}$  stessa.*

Dimostrazione. La curva  $\mathcal{C}$  descritta dal moto di un punto  $P(t)$ . Prendiamo cura che la velocità sia unitaria:  $|\frac{dP}{dt}(t)| = 1$ , per ogni  $t$ . Allora  $\vec{T}(t) = \frac{dP}{dt}(t)$  è il versore tangente, cioè il versore direzione della generatrice che passa per  $P(t)$  è

$$\vec{v}(t) = \vec{T}(t).$$

Inoltre, come sappiamo,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{dt} = k \vec{N},$$

dove  $\vec{N}$  il versore normale alla curva e  $k$  la curvatura. Quindi  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  è non nullo per ogni  $t$ , cioè la superficie è non-cilindrica, se e solo se  $k$  è sempre non nulla.

Inoltre  $\frac{dP}{dt}(t) = \vec{T}$  è ortogonale a  $k\vec{N} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ , quindi (cfr. Teorema IX.3.8)  $P(t)$  è centrale e dunque  $\mathcal{C}$  è la linea di stringimento.  $\square$

Tuttavia la rigata delle tangenti è una superficie non-cilindrica molto particolare, infatti

PROPOSIZIONE IX.5.3. *Le uniche superfici rigate (non-cilindriche) che hanno parametro di stringimento identicamente nullo sono i coni e le rigate delle tangenti (ben inteso di una curva la cui curvatura non è mai nulla; altrimenti la superficie non sarebbe non-cilindrica e non avrebbe senso parlare di parametro di stringimento).*

Dimostrazione. Sia  $\mathcal{S}$  una superficie rigata non-cilindrica, con linea di stringimento descritta dal moto di  $P(t)$  e sia  $\vec{v}(t)$  il versore direzione della generatrice che passa per  $P(t)$ . Il parametro di stringimento  $p(t)$  soddisfa, per definizione, la relazione

$$\frac{dP}{dt}(t) \times \vec{v}(t) = p(t) \frac{d\vec{v}}{dt}(t);$$

quindi  $p$  è sempre nullo se e solo se  $\frac{dP}{dt}$  è sempre nullo oppure è sempre parallelo a  $\vec{v}$ . Nel primo caso  $P(t)$  è costante e la superficie è un cono, nel secondo le generatrici sono le tangenti alla linea di stringimento.  $\square$

Vediamo un esempio di rigata delle tangenti.

ESEMPIO IX.5.4. In Fig. 22 vediamo la rigata delle tangenti ad un elica. La

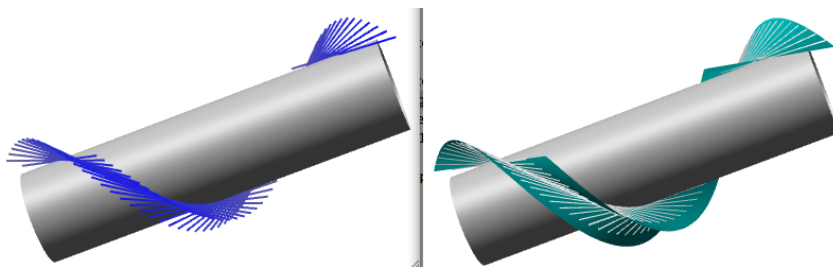


FIGURA 22

superficie si divide in due fogli come si vede in Fig. 23a che si raccordano proprio

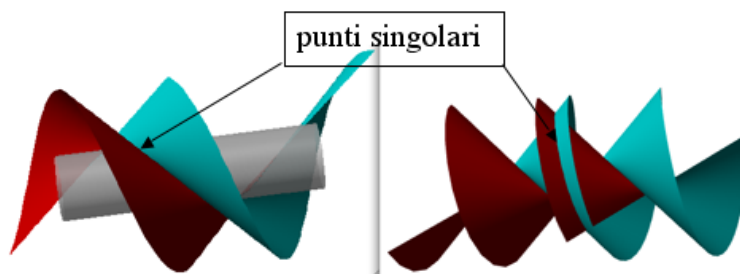


FIGURA 23. a - b

lungo l'elica; i punti della curva, come vedremo meglio poi, sono punti singolari. Se prolunghiamo sufficientemente i segmenti che rappresentano le generatrici è possibile constatare che generatrici diverse sono incidenti (vedi Fig. 23b). I punti in cui le generatrici si incontrano sono anch'essi singolari. Dunque ci siamo resi conto che anche se la direttrice (in questo caso l'elica) è una curva regolare (cioè priva di punti singolari) la superficie rigata può essere singolare. Conviene dedicare all'argomento maggiore attenzione.

## IX.6. Punti singolari

**IX.6.1. Descrizione matematica di una superficie.** Una superficie rigata si descrive con l'equazione (IX.1.1)

$$X(u, t) = P(t) + u \vec{v}(t),$$

ma questo rispecchia un fatto più generale. Immaginiamo di avere un foglio quadrato  $\mathcal{F}$  di materiale plastico molto duttile e di modificarlo in modo da ottenere la superficie voluta. In Fig. 24 si vede come si può costruire una sfera. Sul foglio  $\mathcal{F}$

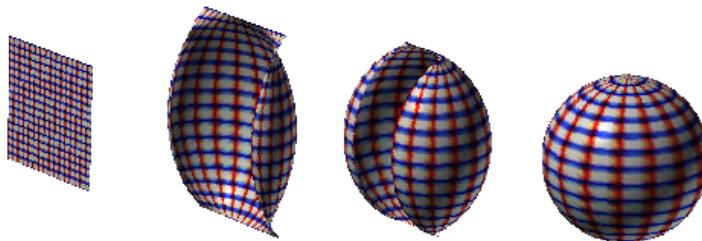


FIGURA 24. Aprire il file per vedere il filmato

possiamo fissare un sistema di coordinate cartesiane per cui ogni punto del quadrato sia individuato da una coppia

$$(u, v), \text{ con } 0 \leq u, v \leq 1$$

e a ciascun punto  $(u, v)$  del foglio  $\mathcal{F}$  corrisponde un punto  $X(u, v)$  della sfera  $\mathcal{S}$ . La quadrettatura che compare nella prima immagine di Fig. 24 è data dalle rette  $u = \text{costante}$  e  $v = \text{costante}$ ; cioè dalle rette parallele ai lati del foglio. Queste linee si trasformano nei paralleli e meridiani della sfera.

Esistono superfici molto più complicate; ad es. si consideri la Fig. 25 in cui

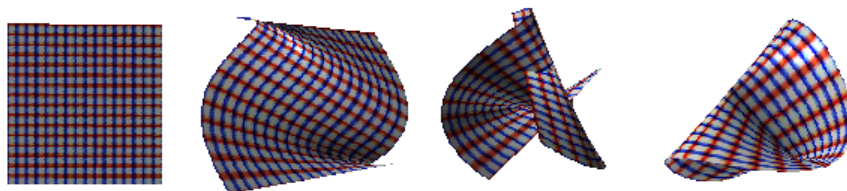


FIGURA 25. Aprire il file per vedere il filmato

le linee sulla superficie che corrispondono alle rette  $u = \text{costante}$  e  $v = \text{costante}$  del foglio sono molto più complesse di meridiani e paralleli. Nel caso della Fig.25 il foglio è disposto in modo da autointersecarsi e quindi la corrispondenza

$$\mathcal{F} \ni (u, v) \mapsto X(u, v) \in \mathcal{S}$$

tra punti del foglio e superficie non è iniettiva. Del resto questo accade anche nel caso della sfera, perché due lati del foglio sono ridotti ai soli poli, mentre gli altri due si incollano lungo un meridiano.

Infine la Fig. 26 mostra come ad ogni retta  $u = \text{cost.}$  oppure  $v = \text{cost.}$  sul foglio  $\mathcal{F}$  corrisponda una curva sulla superficie  $\mathcal{S}$ .

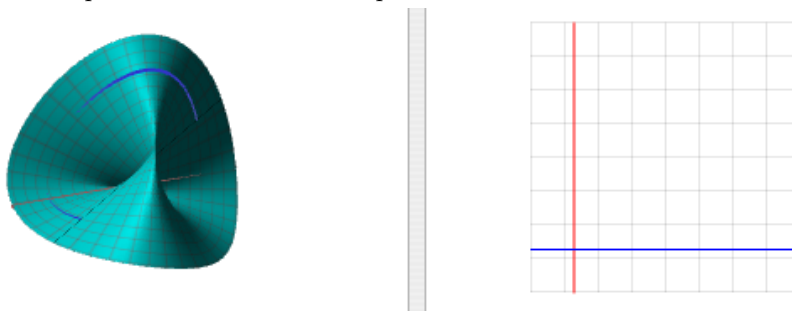


FIGURA 26. Aprire il file per muovere le rette nel foglio e quindi le corrispondenti curve sulla superficie

In conclusione una superficie  $\mathcal{S}$  matematicamente è assegnata da una funzione  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita in una certa regione  $\Omega$  del piano (quindi gli elementi di  $\Omega$  sono coppie  $(u, v)$  di numeri), a valori nello spazio tridimensionale. L'insieme  $X(\Omega)$  dei valori assunti dalla funzione  $X(u, v)$ , al variare di  $(u, v)$  in  $\Omega$ , è la superficie  $\mathcal{S}$ . Per escludere casi patologici assumiamo che esistano e siano continue le derivate parziali  $\frac{\partial X}{\partial u}$  e  $\frac{\partial X}{\partial v}$ .

**IX.6.2. Punti singolari.** Sia data una superficie  $\mathcal{S}$  descritta da una funzione  $X(u, v)$ . Per il punto  $P_0 = X(u_0, v_0)$  della superficie, passano, in particolare, le due curve descritte dai moti:

$$P(t) = X(t, v_0) \text{ e } Q(t) = X(u_0, t),$$

(si pensi a meridiani e paralleli sulla sfera descritti da curve  $v = cost.$  e  $u = cost.$ ).  
I vettori tangenti alle due curve:

$$\frac{dP}{dt}(t) = \frac{\partial X}{\partial u}(t, v_0)$$

e

$$\frac{dQ}{dt}(t) = \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, t),$$

forniscono nel punto  $P_0$  due vettori tangenti:

$$\frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) \text{ e } \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0).$$

È possibile mostrare che se  $\mathcal{C}$  è una curva di  $\mathcal{S}$  che passa per  $P_0$ , allora il suo vettore tangente è combinazione lineare di questi due, dunque il piano  $\tau_{P_0}$ , tangente ad  $\mathcal{S}$  in  $P_0$ , è individuato da questi due vettori. Ben si comprende che se questi due vettori sono paralleli, allora il piano tangente non esiste.

PROPOSIZIONE IX.6.1. *Se  $X(u, v)$  definisce una superficie  $\mathcal{S}$  e i vettori*

$$\frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) \text{ e } \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0)$$

*sono indipendenti, allora il punto  $P_0 = X(u_0, v_0)$  è un punto regolare, in caso contrario non esiste il piano tangente e  $P_0$  è singolare.*

OSSERVAZIONE IX.6.2. *Una condizione equivalente all'indipendenza lineare è che*

$$\frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0) \neq 0$$

ESEMPIO IX.6.3. *Si consideri la superficie  $\mathcal{S}$  rappresentata in Fig. 26. Sapendo che la funzione che la definisce è*

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \frac{\sin 2u}{2}),$$

*si determinino i punti privi di piano tangente.*

Soluzione. Risulta

$$\frac{\partial X}{\partial u} = (-v \sin u, v \cos u, \cos 2u)$$

e

$$\frac{\partial X}{\partial v} = (\cos u, \sin u, 0).$$

Il primo si annulla se  $v = \cos 2u = 0$ , il secondo non è mai nullo. Il prodotto scalare

$$\frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} = 0$$

dice che i due vettori sono ortogonali. Quindi l'unico caso in cui essi sono linearmente dipendenti è quando  $v = \cos 2u = 0$ , vale a dire  $\sin 2u = \pm 1$  e dunque troviamo i punti  $(0, 0, \pm \frac{1}{2})$  rappresentati in Fig. 27a.  $\square$

Il segmento che unisce i due punti singolari che abbiamo trovato è tutto formato da punti singolari, ma di tipo diverso: come si vede in Fig. 27b in essi si tagliano due fogli di superficie (è la stessa situazione di Fig. 3 in Cap. II) e ci sono due piani tangenti.

In conclusione

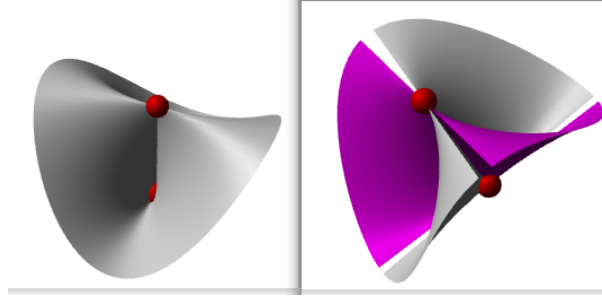


FIGURA 27

se descriviamo una superficie  $\mathcal{S}$  mediante una funzione  $X(u, v)$  possiamo distinguere due tipi di punti singolari:

(i) quelli privi di piano tangente, individuati dalla condizione

$$\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} = 0,$$

(ii) quelli in cui più fogli della superficie si tagliano e sono quindi dotati di più di un piano tangente.

**IX.6.3. Punti singolari di una rigata non-cilindrica.** Il seguente teorema stabilisce quali sono i punti singolari e privi del piano tangente su una rigata non-cilindrica, ferma restando la possibilità di altri punti singolari in cui più fogli si intersecano.

**TEOREMA IX.6.4.** *Gli unici punti singolari privi di piano tangente di una superficie rigata non-cilindrica possono essere sulla linea di stringimento. Essi sono esattamente i punti della linea di stringimento in cui il parametro di stringimento si annulla.*

Dimostrazione. La superficie  $\mathcal{S}$  è descritta da

$$X(u, t) = P(t) + u \vec{v}(t),$$

dove  $P(t)$  descrive la linea di stringimento e  $|\vec{v}(t)| = 1$ . Allora

$$\frac{\partial X}{\partial t} \times \frac{\partial X}{\partial u} = \left( \frac{dP}{dt} + u \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \times \vec{v} = \frac{dP}{dt} \times \vec{v} + u \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{v} = p \frac{d\vec{v}}{dt} + u \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{v}.$$

Osseviamo che, per definizione di prodotto vettoriale, i vettori  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  e  $\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{v}$  sono ortogonali; dunque

$$\left| \frac{\partial X}{\partial t} \times \frac{\partial X}{\partial u} \right| = \sqrt{p^2 \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right|^2 + u^2 \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{v} \right|^2} = \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| \sqrt{p^2 + u^2}.$$

Ora  $\mathcal{S}$  è non-cilindrica, dunque  $\frac{d\vec{v}}{dt} \neq 0$ , ne segue che

$$\frac{\partial X}{\partial t} \times \frac{\partial X}{\partial u} = 0 \text{ se e solo se } p = u = 0,$$

cioè i punti singolari privi di piano tangente si trovano sulla linea di stringimento ( $u = 0$ ) nei punti in cui il parametro di stringimento si annulla ( $p = 0$ ).  $\square$

**ESERCIZIO IX.6.5.** (Con riferimento all'Esempio IX.5.4). *Sia  $\mathcal{S}$  la rigata delle tangenti all'elica. Giustificare perché i punti dell'elica sono esattamente i punti di  $\mathcal{S}$  privi di piano tangente.*

Soluzione. L'elica ha curvatura costante  $\neq 0$  (cfr. Corso di Geometria), quindi la rigata  $\mathcal{S}$  delle tangenti all'elica è non-cilindrica (cfr. Proposizione IX.5.2) e l'elica stessa è la linea di stringimento. Dunque possiamo utilizzare il teorema (Teorema IX.6.4) che dice chi sono i punti di una superficie non cilindrica privi di piano tangente: essi sono i punti della linea di stringimento con parametro di stringimento nullo. Ma per una rigata delle tangenti ad una curva il parametro di stringimento è sempre nullo (cfr. Proposizione IX.5.3), quindi gli unici punti privi di piano tangente della superficie  $\mathcal{S}$  sono i punti dell'elica.  $\square$

ESEMPIO IX.6.6. Si consideri la superficie rigata  $\mathcal{S}$  in Fig. 28. Nelle immagini

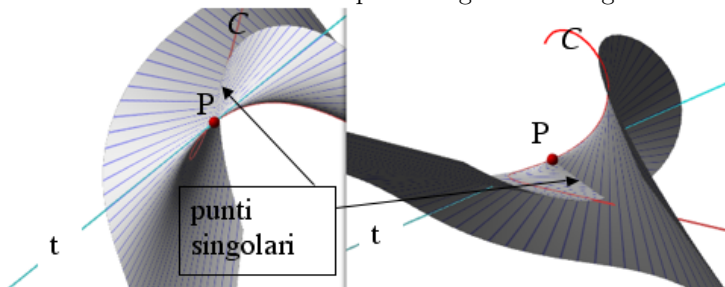


FIGURA 28. Apri il file per muovere la superficie e vederla meglio

sono messi in evidenza un punto  $P$  della superficie, la generatrice  $t$  che passa per  $P$  e la linea  $C$  di stringimento. Essa passa per  $P$  e ha come tangente in  $P$  la generatrice  $t$ .

Usiamo le solite notazioni:  $P(t)$  è un punto in moto che descrive la linea di stringimento (con  $P(t_0) = P$ , cioè  $P(t)$  passa per  $P$  all'istante  $t_0$ ); mentre  $\vec{v}(t)$  è il versore direzione della generatrice che passa per  $P(t)$ . Come sappiamo il parametro di stringimento è definito da

$$\frac{dP}{dt}(t) \times \vec{v}(t) = p(t) \frac{d\vec{v}}{dt}(t).$$

Ma, nel nostro caso la generatrice  $t$ , che ha per vettore direzione  $\vec{v}(t_0)$ , è tangente alla linea di stringimento  $C$  nel punto  $P$ ; dunque  $\vec{v}(t_0)$  e il vettore  $\frac{dP}{dt}(t_0)$ , tangente a  $C$  in  $P$ , sono paralleli. Quindi

$$\frac{dP}{dt}(t_0) \times \vec{v}(t_0) = 0$$

e dunque  $p(t_0) = 0$ .

Allora, per il Teorema IX.6.4,  $P$  è un punto singolare privo di piano tangente. Si noti che da  $P$  parte un arco di punti in cui due fogli della superficie si tagliano (in  $P$  c'è un unico foglio) e dunque tale arco è costituito da punti singolari con due piani tangenti.  $\square$

Nel caso specifico delle rigate delle tangenti abbiamo una descrizione precisa dei punti singolari privi di piano tangente:

**PROPOSIZIONE IX.6.7.** *Sia  $\mathcal{S}$  la rigata delle tangenti di una curva  $C$  la cui curvatura e torsione non sono mai nulle. Allora la curva  $C$  è uno spigolo della superficie: in ogni punto  $P$  di  $C$  la sezione di  $\mathcal{S}$  con il piano normale alla curva  $C$  in  $P$  una cuspide.*

Come illustrazione del teorema si veda la Fig. 29 che mostra, nel caso della rigata delle tangenti all'elica, come la sezione con il piano normale all'elica sia una cuspidi.

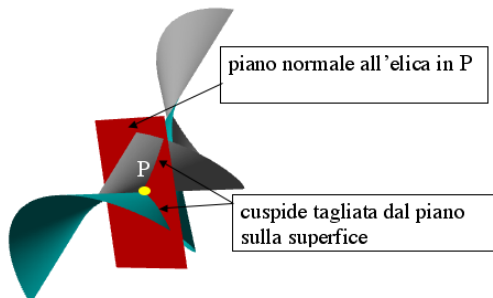


FIGURA 29. Apri il file per far variare il piano lungo l'elica.

ESEMPIO IX.6.8. La superficie  $\mathcal{S}$  in Fig. 30a è la rigata delle tangenti della

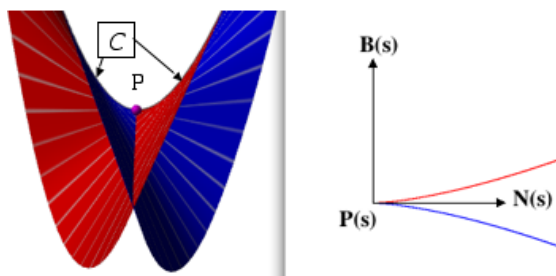


FIGURA 30

curva  $\mathcal{C}$  (si apra il file per vedere la superficie da un'altra angolazione e constatare che  $\mathcal{C}$  non è piana). La curvatura è sempre non nulla, quindi (cfr. Proposizione IX.5.2)  $\mathcal{S}$  è non-cilindrica e la curva  $\mathcal{C}$  è la linea di stringimento. Il parametro di stringimento è nullo (cfr. Proposizione IX.5.3) e pertanto (cfr. Teorema IX.6.4) i punti privi di piano tangente sono esattamente i punti di  $\mathcal{C}$ . La torsione di  $\mathcal{C}$  si annulla solo nel punto  $P$ ; quindi, per la Proposizione IX.6.7, in tutti i punti  $P(s)$ ,  $P(s) \neq P$ , di  $\mathcal{C}$  il piano normale a  $\mathcal{C}$  in  $P(s)$  taglia  $\mathcal{S}$  lungo una cuspidi (vedi Fig. 30b). Nel punto  $P$  questo non accade; come si vede in Fig. 30a le due parti della superficie si tagliano lungo un arco  $\mathcal{D}$  che finisce in  $P$ . I punti di quest'arco sono singolari e ciascuno di essi possiede due piani tangenti, invece in  $P$ , come detto, il piano tangente non c'è. Aprendo il file di Fig. 30b si capisce cosa succede: in  $P$  i due rami di cuspidi si scambiano e quindi in  $P$  il piano normale alla curva taglia sulla superficie esattamente l'arco  $\mathcal{D}$ .