

Corso 2007-08

VII - Curvatura normale di una curva su una superficie

1. Alcuni richiami

1.1. Curvatura media di un arco. Data una curva \mathcal{C} nello spazio, consideriamo un piccolo arco \widehat{AB} della curva. Confrontiamo l'angolo θ , formato dai vettori tangenti \vec{T}_A e \vec{T}_B negli estremi, con la lunghezza $L(\widehat{AB})$ dell'arco medesimo. Il rapporto

$$\frac{\theta}{L(\widehat{AB})} =: K(\widehat{AB})$$

è chiamato *curvatura media* dell'arco \widehat{AB} .

Questo è ragionevole perché l'angolo misura di quanto ha “girato” la curva passando da A a B , ma questo va rapportato allo spazio percorso. Ad esempio in uno svincolo autostradale posso girare di 90° percorrendo 500 m., mentre in una manovra di parcheggio giro di 90° in pochi metri; intuitivamente la mia traiettoria è molto più curva nel secondo caso. L'esempio dovrebbe suggerire la necessità di considerare il rapporto angolo/lunghezza per avere un valore ragionevole della curvatura media.

1.2. Curvatura di una curva in un punto. Fissato un punto P della curva \mathcal{C} consideriamo, per archi \widehat{AB} molto piccoli che contengono P , la loro curvatura media $K(\widehat{AB})$. Al tendere di A e B a P , il limite

$$\lim_{A, B \rightarrow P} K(\widehat{AB}) =: k(P)$$

è, per definizione, la *curvatura* $k(P)$ della curva \mathcal{C} nel punto P .

Le uniche curve la cui curvatura è costante, vale a dire è la stessa in tutti i punti, sono la retta e le circonferenze. La retta ha curvatura nulla, una circonferenza ha curvatura pari al reciproco del raggio.

1.3. Calcolo della curvatura. Esiste una formula molto rilevante, che ci consente di calcolare effettivamente la curvatura anche in casi complessi. Descriviamo la curva \mathcal{C} come traiettoria del moto di un punto. All'istante t il punto occuperà la posizione $P(t)$, le cui coordinate - rispetto ad un opportuno sistema cartesiano ortogonale - sono $x(t), y(t), z(t)$.

Supponiamo inoltre che la velocità del moto sia costantemente unitaria, questo significa che il vettore velocità

$$\vec{V}(t) = \frac{dP}{dt}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

ha lunghezza $\|\vec{V}(t)\| = 1$ e dunque coincide con il versore tangente

$$\vec{T}(t) = \vec{V}(t).$$

La velocità con cui il versore tangente muta direzione, essendo fissata a priori la velocità del punto $P(t)$, dipende solo dalla forma della curva e ne misura intuitivamente la curvatura. In effetti come abbiamo dimostrato¹

$$k(P(t)) = \left\| \frac{d\vec{T}}{dt}(t) \right\|,$$

vale a dire

la curvatura nel punto $P(t)$ è la velocità del versore tangente.

1.4. Versore normale alla curva. Se immaginiamo di applicare il versore tangente $\vec{T}(t)$ in un punto fisso, il secondo estremo del versore percorrerà una curva su una sfera. In Fig. [f7.0](#) la vediamo il punto $P(t)$ muoversi su una curva \mathcal{C} con il suo versore tangente $\vec{T}(t)$, mentre in Fig. [f7.0](#) vediamo il versore tangente $\vec{T}(t)$, il cui estremo è vincolato al centro della sfera, descrivere una curva sulla sfera. (Aperto il

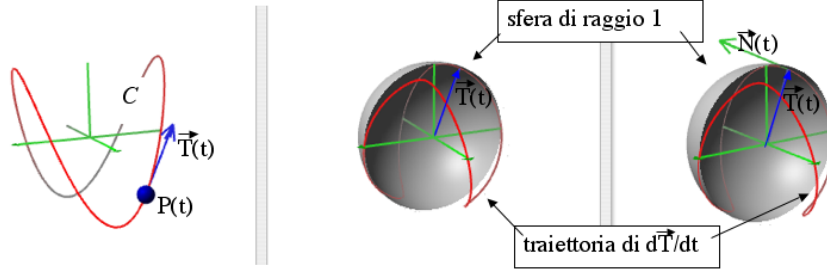


FIGURE 1. a - b - c. Apri il file per vedere il moto.

[f7.0](#)

file, si noti come i due vettori, nelle due immagini, si mantengono paralleli durante il moto: sono lo stesso vettore applicato a sinistra in $P(t)$, a destra nel centro della sfera). Così come il vettore $\frac{dP}{dt}$ è il vettore velocità di $P(t)$, allo stesso modo $\frac{d\vec{T}}{dt}(t)$ è il vettore velocità del punto $\vec{T}(t)$ che si muove sulla sfera; pertanto $\frac{d\vec{T}}{dt}(t)$ è tangente alla sfera e dunque perpendicolare al raggio $\vec{T}(t)$. Vale a dire

$$\vec{T}(t) \text{ e } \frac{d\vec{T}}{dt}(t) \text{ sono perpendicolari.}$$

Definiamo allora il versore normale (cfr. Fig. [f7.0](#)) alla curva nel punto $P(t)$:

$$\vec{N}(t) := \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}(t)}{\left\| \frac{d\vec{T}}{dt}(t) \right\|}$$

N.B. che la definizione si può dare solo se il denominatore è non nullo, cioè se la curvatura all'istante t è $\neq 0$.

¹Corso di Geometria, Cap. V, Teorema 5.6.

Moltiplicando membro a membro le ultime due equazioni ricaviamo

$$k(P(t)) \vec{N}(t) = \frac{d\vec{T}}{dt}(t)$$

che è la formula che conviene ricordare.

1.5. Interpretazione fisica della curvatura. Una particella di massa m si muove su una superficie a velocità unitaria secondo una certa traiettoria \mathcal{C} . Se la traiettoria non è rettilinea necessariamente la particella è sottoposta ad una forza². Tale forza è per definizione massa \times accelerazione, vale a dire

$$\vec{F} = m\vec{A}$$

dove l'accelerazione è data da

$$\vec{A}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt}(t).$$

Ma nel nostro caso, $\vec{V}(t) = \vec{T}(t)$, quindi $\vec{A}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt}(t) = \frac{d\vec{T}}{dt}(t) = k(P(t)) \vec{N}(t)$. Dunque³

$$\vec{A}(t) = k(P(t)) \vec{N}(t),$$

vale a dire

se il moto avviene a velocità unitaria l'accelerazione a cui è sottoposta la particella è in valore assoluto pari alla curvatura e diretta come il versore normale alla curva (accelerazione centripeta⁴).

2. Versore normale ad una superficie.

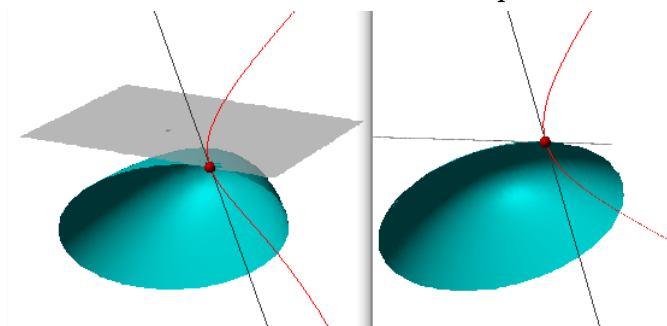


FIGURE 2. a - b

f7.1

Come abbiamo detto (cfr. Definizione 7.1) l'angolo tra due curve incidenti è l'angolo tra le rette tangenti alle due curve.

Analogamente definiamo l'angolo tra una superficie ed una curva, che sono incidenti in un punto P , come l'angolo formato dal piano tangente alla superficie in P con la retta tangente alla curva in P (cfr. Fig. 2, nell'immagine di destra,

²In assenza di forze la particella è in quiete o in moto rettilineo uniforme.

³Se invece la velocità v non è costante, allora l'accelerazione è data da $\vec{A} = kv^2 \vec{N} + \frac{dv}{dt} \vec{T}$ (cfr. Corso di Geometria Cap V, Teorema 6.2.)

⁴Come risulta dalla nota precedente, se la velocità non è unitaria, allora l'accelerazione centripeta deve essere moltiplicata per il quadrato della velocità. Se la velocità non è costante, allora interviene una componente tangenziale dell'accelerazione.

che è diversamente orientata, si può apprezzare meglio l'angolo tra retta e piano). Dati una superficie \mathcal{S} ed un suo punto P non singolare⁵, esistono evidentemente due vettori perpendicolari alla superficie in P (cfr. Fig. 3).^{f7.2} Per una sfera è possibile

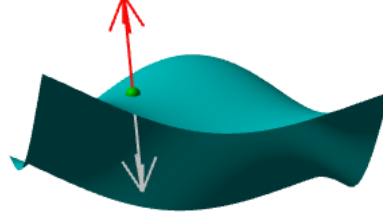


FIGURE 3. Apri il file per muovere il punto

f7.2

indicare a priori una scelta, dicendo ad es. che in tutti i punti il vettore normale è diretto verso l'esterno, tuttavia questo non può in generale essere fatto per una qualunque superficie. Dunque la scelta del vettore normale alla superficie nel punto P , vettore che indicheremo con \vec{n}_P , va fatta di volta in volta.

3. Curvatura normale di una curva su una superficie.

Data una curva \mathcal{C} che giace su una superficie \mathcal{S} e passa per un punto P , scelto un vettore normale \vec{n}_P alla superficie in P , definiamo la curvatura normale $k_{\mathcal{C}}^{(n)}(P)$ della curva \mathcal{C} nel punto P :

$$k_{\mathcal{C}}^{(n)}(P) := k_{\mathcal{C}}(P) \vec{N}_{\mathcal{C}} \cdot \vec{n}_P.$$

Esaminiamo il significato della formula. Poiché il vettore $\vec{N}_{\mathcal{C}}$ normale alla curva e il vettore \vec{n}_P normale alla superficie sono, per l'appunto vettori, il loro prodotto scalare è semplicemente

$$\vec{N}_{\mathcal{C}} \cdot \vec{n}_P = \cos \theta$$

dove θ è l'angolo da essi formato. Dunque la curvatura normale è data da

$$k_{\mathcal{C}}^{(n)}(P) := k_{\mathcal{C}}(P) \cos \theta.$$

N.B.

(1) Se si cambia la scelta del vettore normale, esso cambia di segno e dunque anche la curvatura normale cambia di segno.

(2) Se la curvatura $k_{\mathcal{C}}(P) = 0$, allora non è definito $\vec{N}_{\mathcal{C}}$ in P , tuttavia in tal caso si pone, per definizione

$$k_{\mathcal{C}}^{(n)}(P) = 0.$$

7.1

ESERCIZIO 3.1. Sia \mathcal{S} una sfera e \mathcal{C} la circonferenza ottenuta tagliando la sfera con un piano (cfr. Fig. 4).^{f7.3} Conveniamo di prendere il vettore normale alla sfera diretto verso l'interno. Calcolare la curvatura normale della circonferenza \mathcal{C} sapendo che la sfera \mathcal{S} ha raggio R e che la circonferenza \mathcal{C} ha raggio r .

⁵Cioè per cui esiste il piano tangente τ_P alla superficie.

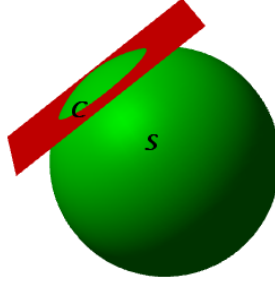


FIGURE 4

f7.3

Soluzione. La curvatura normale $k_C^{(n)}(P)$ della circonferenza C in un suo qualunque punto è data dalla formula

$$k_C^{(n)}(P) = k_C \vec{N}_C \cdot \vec{n}_P,$$

dove k_C è la curvatura della circonferenza, che sappiamo essere $1/r$ (non dipende dal punto). Mentre il prodotto scalare $\vec{N}_C \cdot \vec{n}_P = \cos \theta$, dove θ è l'angolo tra il versore normale \vec{N}_C alla circonferenza e il versore normale \vec{n}_P alla sfera in P . Rappresentiamo la situazione in Fig. 5a evidenziando il versore normale alla circonferenza

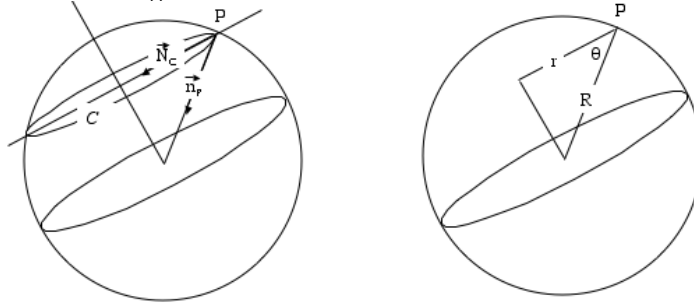


FIGURE 5. a - b

f7.4

che è diretto verso il centro della stessa. Dalla Fig. 5b si evince che l'angolo θ tra i due versori soddisfa:

$$R \cos \theta = r.$$

Pertanto

$$k_C^{(n)}(P) = k_C(P) \vec{N}_C \cdot \vec{n}_P = \frac{1}{r} \cos \theta = \frac{1}{R}.$$

Il risultato è interessante: dice che

la curvatura normale di una circonferenza su una sfera non dipende nè dal punto in cui è calcolata, nè dalla circonferenza ed è pari al reciproco del raggio della sfera.

□

4. Interpretazione fisica della curvatura normale.

Immaginiamo di avere costruito una superficie di vetro a due strati e che nella piccola intercapedine tra i due strati si muova una particella. Supponiamo che il moto della particella sia causato da una forza tangenziale alla superficie (ad es. mettiamo del liquido nell'intercapedine e provochiamo un moto nel liquido che a

sua volta muove la particella). Per semplicità supponiamo che la velocità della particella sia unitaria e che la massa sia 1, in modo che forze e accelerazioni coincidano. Se la traiettoria non è rettilinea, allora necessariamente sulla particella agisce un'accelerazione che è data da (cfr. 1.1.5)

$$\vec{A}(t) = k_C(P(t)) \vec{N}_C(t).$$

Dunque l'accelerazione \vec{A} è diretta come il versore normale alla curva (è importante capire che dalla conoscenza della traiettoria e della velocità possiamo ricostruire quale sia l'accelerazione che agisce sulla particella). Da chi è causata questa accelerazione? Dall'accelerazione A_1 dovuta alla spinta del liquido e diretta tangenzialmente alla superficie e dall'accelerazione A_2 diretta perpendicolarmente alla superficie e dovuta al vincolo. Dunque

$$\vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \vec{A}.$$

Come si vede in Fig. 6 \vec{A}_2 è la proiezione di \vec{A} sulla normale alla superficie, quindi

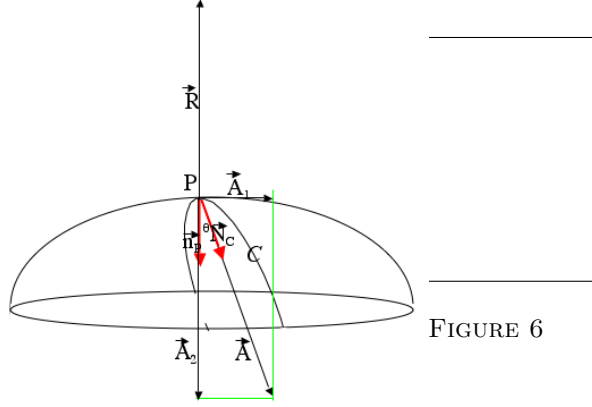


FIGURE 6

f7.6

$$\vec{A}_2 = (\vec{A} \cdot \vec{n}_P) \vec{n}_P = k_C(P(t)) \cos \theta \vec{n}_P = k_C^{(n)}(P(t)) \vec{n}_P.$$

Questo significa che il vincolo a stare tra le due superfici agisce in direzione normale alla superficie con un'intensità pari alla curvatura normale. Uguale ed opposta a questa è la reazione vincolare (il vettore \vec{R} in figura), cioè la forza esercitata dalla particella sulla superficie di vetro. In conclusione:

se una particella di massa unitaria è vincolata a muoversi su una superficie, il moto avviene a velocità unitaria ed è causato da una forza tangenziale alla superficie, allora la curvatura normale è pari alla forza esercitata dalla particella sul vincolo

Dovrebbe essere evidente che se la superficie è un paraboloide iperbolico e la traiettoria della particella è la curva rossa (rispettivamente blu) in Fig. 7 allora la forza esercitata dalla particella sulla superficie è diretta verso il basso (risp. l'alto). Mentre se la particella si muove lungo la retta, che ha curvatura nulla, la relativa curvatura normale è nulla e quindi la particella non esercita nessuna forza sulla superficie.

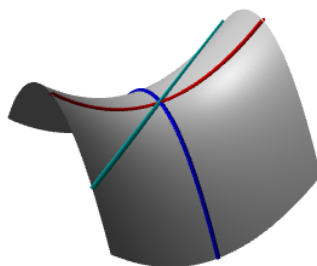


FIGURE 7

f7.7

5. La curvatura normale dipende solo dalla direzione tangente

Veniamo a un risultato fondamentale:

7.2

TEOREMA 5.1. *Siano dati una superficie \mathcal{S} , un suo punto P non singolare ed una retta tangente t alla superficie nel punto P . Tutte le curve che giacciono sulla superficie e passano per P , con tangente t , hanno la medesima curvatura normale nel punto P .*

Dimostrazione. Fissiamo un vettore normale \vec{n}_P alla superficie in P . Sarà necessario qualche calcolo e perciò conviene scegliere un opportuno sistema di coordinate. Prendiamo il punto P come origine, gli assi x ed y sul piano τ_P tangente alla superficie e l'asse delle z diretto come il vettore normale \vec{n}_P (vedi Fig. 8).

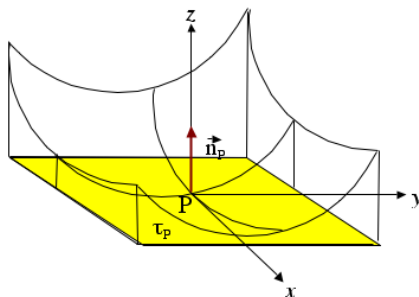


FIGURE 8

f7.8

È ragionevole pensare che se Q è un punto, del piano tangente, sufficientemente vicino a P , allora sulla perpendicolare al piano condotta per Q ci sia uno ed un solo punto della superficie, almeno vicino a P . Questo perché, per definizione di piano tangente, molto vicino a P esso è indistinguibile dalla superficie⁶. Si osservi anche che lontano dal piano tangente ci possono essere altri punti sulla perpendicolare condotta da Q come mostra la Fig. 9. Dunque possiamo associare a ciascun punto Q di coordinate $(x, y, 0)$ un unico punto Q' che sta sulla verticale di Q (pensiamo il piano xy come orizzontale) che avrà coordinate $(x, y, f(x, y))$. In altri termini stiamo descrivendo la superficie come grafico di una funzione

$$z = f(x, y).$$

Poiché i punti della superficie sono della forma $(x, y, f(x, y))$, una curva \mathcal{C} che giace sulla superficie e passa per P , può essere descritta dal moto di un punto con coordinate

$$P(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$$

dove $x(0) = y(0) = 0$ (l'ultima condizione significa che all'istante 0 la curva passa per P).

Calcoliamo il vettore velocità:

$$\vec{V}(t) = (\dot{x}, \dot{y}, f_x \dot{x} + f_y \dot{y}).$$

⁶L'esempio della tazzina da caffè (Esercizio 16) mostra che questo non è vero se il punto P è singolare

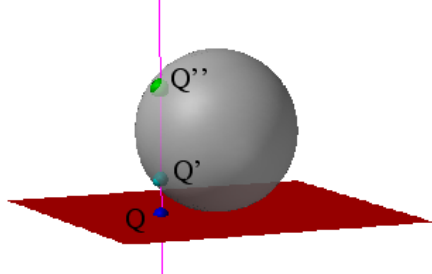


FIGURE 9

f7.9

Si tratta di un vettore tangente alla superficie e dunque per $t = 0$ deve stare sul piano xy , vale a dire la terza coordinata è nulla, cioè

$$(f_x \dot{x} + f_y \dot{y}) \Big|_{t=0} = 0.$$

Ma \dot{x}, \dot{y} sono le componenti del vettore tangente, che può essere qualsiasi, dunque

e7.1

$$(5.1) \quad f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

Supponiamo che la velocità di $P(t)$ sia unitaria, allora $\vec{V}(t) = \vec{T}(t)$ e quindi

e7.1.1

$$(5.2) \quad \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} = (\ddot{x}, \ddot{y}, f_{xx}\dot{x}^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}\dot{y}^2 + f_x\ddot{x} + f_y\ddot{y}).$$

Ma $k_C(P)\vec{N}_C = \frac{d\vec{T}}{dt} \Big|_{t=0}$ e, calcolando (5.2) nell'origine e usando (5.1), resta solo

$$k_C(P)\vec{N}_C = \frac{d\vec{T}}{dt} \Big|_{t=0} = (\ddot{x}, \ddot{y}, f_{xx}\dot{x}^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}\dot{y}^2).$$

Ora il versore $\vec{n}_P = (0, 0, 1)$, quindi

$$k_C^{(n)}(P) = k_C(P)\vec{N}_C \cdot \vec{n}_P = f_{xx}\dot{x}^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}\dot{y}^2.$$

Questa espressione dipende dalle derivate f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} che dipendono dunque dalla superficie e dalle derivate \dot{x}, \dot{y} che coinvolgono solo la direzione tangente e non la curva stessa. \square

7.3

ESERCIZIO 5.2. *Spiegare perché, data una curva \mathcal{C} che giace su una superficie S e passa per un punto P , la curvatura normale $k_C^{(n)}(P)$ non dipende dalla curva ma dalla direzione tangente alla curva in P .*

Soluzione. La curvatura normale è data dalla formula

$$k_C^{(n)}(P) = k_C(P)\vec{N}_C \cdot \vec{n}_P,$$

dove

$$k_C(P)\vec{N}_C = \frac{d\vec{T}}{dt}.$$

Prendendo in modo opportuno le coordinate è possibile descrivere la superficie come grafico di una funzione $z = f(x, y)$, dove il piano xy coincide con il piano tangente. Un calcolo permette di concludere che

$$k_C^{(n)}(P) = f_{xx}\dot{x}^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}\dot{y}^2,$$

dove \dot{x} e \dot{y} sono le componenti del versore tangente alla curva nel punto P . Se ne ricava che la curvatura normale dipende da come è fatta la superficie (cioè dalla funzione f) e dalla direzione tangente alla curva. \square

7.4

ESERCIZIO 5.3. Abbiamo visto, vedi Esercizio ^{f7.1}3.1 che la curvatura normale di una circonferenza tagliata da un piano su una sfera \mathcal{S} dipende solo dal raggio della sfera. Cosa ne possiamo dedurre circa la curvatura normale di una qualunque curva sulla sfera \mathcal{S} ?

Soluzione. Prendiamo una curva \mathcal{C} sulla sfera \mathcal{S} e fissiamo un punto P di \mathcal{C} .

Sia t la retta tangente alla curva \mathcal{C} nel punto P . Consideriamo un qualunque piano α passante per t e diverso dal piano tangente τ_P alla sfera in P . Tale piano α taglia sulla sfera una circonferenza \mathcal{C}' che è tangente alla retta t (vedi Fig. ^{f7.10}10).

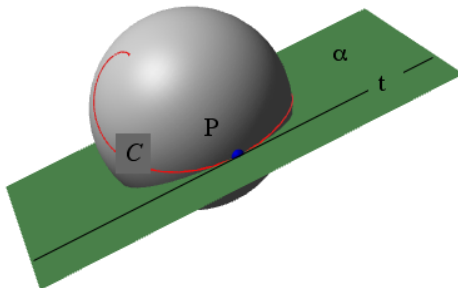


FIGURE 10

f7.10

Le curve \mathcal{C} e \mathcal{C}' giacciono entrambe sulla sfera \mathcal{S} e hanno nel punto P la stessa tangente, dunque possiedono la stessa curvatura normale.

Concludo che

tutte le curve che giacciono sulla sfera \mathcal{S} hanno la stessa curvatura normale in ogni punto, pari al reciproco del raggio della sfera.

In particolare un punto che si muove sulla faccia interna di una superficie sferica, a velocità unitaria, e che è sottoposto ad una forza viva tangenziale, esercita sulla superficie una pressione costante che non dipende dalla traiettoria da esso seguita. \square

7.5

ESERCIZIO 5.4. Data una superficie di rotazione, calcolare la curvatura normale dei meridiani.

Soluzione. Sia P un punto della superficie di rotazione \mathcal{S} e siano \mathcal{M} e \mathcal{P} rispettivamente il meridiano e il parallelo che passano per P .

Cominciamo con l'osservare che il versore normale $\vec{N}_{\mathcal{M}}(P)$ al meridiano in P è normale alla superficie \mathcal{S} , vale a dire coincide a meno del segno con il versore normale \vec{n}_P , cioè

e7.2

$$(5.3) \quad \vec{N}_{\mathcal{M}}(P) = \pm \vec{n}_P.$$

Per convincersi di questo è sufficiente vedere (cfr. Fig. ^{f7.11}11) che i due versori sono entrambi perpendicolari ad una stessa coppia di rette, precisamente alle rette $t_{\mathcal{M}}$ e $t_{\mathcal{P}}$ tangenti, in P , rispettivamente a meridiano e parallelo. Che questo sia vero per il versore normale \vec{n}_P alla superficie è ovvio: esso, per definizione, è perpendicolare al piano tangente e dunque a tutte le rette tangenti. È altresì ovvio che il versore normale $\vec{N}_{\mathcal{M}}(P)$ al meridiano è perpendicolare alla tangente $t_{\mathcal{M}}$ al meridiano stesso. Resta da vedere che esso è perpendicolare anche all'altra tangente $t_{\mathcal{P}}$.

Ma per definizione il meridiano giace su un piano α passante per l'asse, dunque esso è una curva piana e il suo versore normale giace sullo stesso piano α . Sia r il

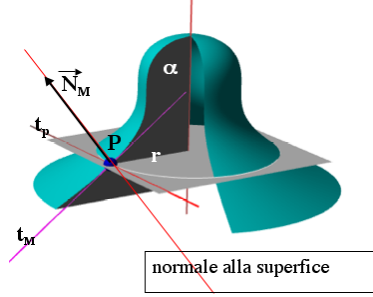


FIGURE 11

f7.11

raggio del parallelo che passa per P . Allora: t_P è perpendicolare ad r (la tangente ad una circonferenza è perpendicolare al raggio) e a t_M (meridiani e paralleli di una superficie di rotazione sono perpendicolari), quindi è perpendicolare a tutte le rette del piano α che contiene r e t_M , in particolare è perpendicolare a $\vec{N}_M(P)$.

Stabilita (7.2), ne segue $\vec{N}_M \cdot \vec{n}_P = \pm 1$ e quindi, otteniamo

$$k_M^{(n)}(P) = k_M(P) \vec{N}_M \cdot \vec{n}_P = \pm k_M(P).$$

Vale a dire

la curvatura normale del meridiano è uguale, a meno del segno, alla curvatura del meridiano stesso, precisamente le due curvature sono le stesse se il versore normale alla superficie è diretto dalla parte della concavità del meridiano, altrimenti sono opposte.

□

7.6

ESERCIZIO 5.5. Data una superficie di rotazione, calcolare la curvatura normale dei paralleli.

Soluzione. Si consideri la Fig. 12. A sinistra è rappresentata la sezione, della figura

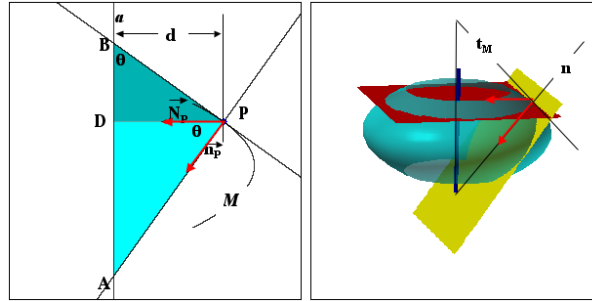


FIGURE 12

f7.12

di destra, con il piano che passa per l'asse di rotazione e per il punto P . Sia d la distanza di P dall'asse, allora il parallelo \mathcal{P} passante per P è una circonferenza di raggio d ; dunque la curvatura k_P del parallelo è $1/d$. La curvatura normale del parallelo è data dalla formula

$$k_P^{(n)} = k_P \vec{N}_P \cdot \vec{n}_P = \frac{\cos \theta}{d},$$

ove θ è l'angolo tra i versori normale alla curva e normale alla superficie.

Può essere preferibile vedere θ come l'angolo tra la tangente e l'asse, i due ovviamente coincidono.

Per dare un senso intuitivo alla formula, si osservi che

$$\|B - P\| \cos \theta = d;$$

quindi

$$k_{\mathcal{P}}^{(n)} = \frac{\cos \theta}{d} = \frac{1}{\|B - P\|}.$$

Dunque

la curvatura normale del parallelo che passa per P è la curvatura di una circonferenza che passa per P e ha centro sull'asse di rotazione nel punto (B) in cui questa è tagliata dalla tangente al meridiano.

□

Vale la pena di fare una piccola osservazione. Data una superficie \mathcal{S} ed un suo punto P , non singolare, fissiamo un versore normale \vec{n}_P alla superficie in P . Consideriamo il fascio di piani \mathcal{F} che ha per asse la retta normale alla superficie. Ciascuno di questi piani taglia sul piano tangente una retta tangente per P e sulla superficie una curva. In Fig. 13 vediamo un piano α del fascio che taglia sul piano tangente

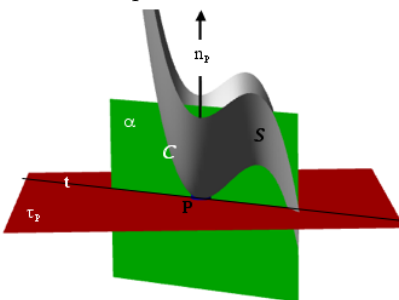


FIGURE 13. Apri il file per vedere il piano muoversi.

f7.13

τ_P la retta t e sulla superficie \mathcal{S} la curva \mathcal{C} . Poiché il fascio \mathcal{F} è il fascio dei piani per P perpendicolari al piano tangente, le curve così ottenute si chiamano *sezioni normali* della superficie \mathcal{S} in P .

Il versore \vec{N}_C normale ad una sezione normale \mathcal{C} ha la stessa direzione del versore \vec{n}_P normale alla superficie, cioè

$$\vec{N}_C = \pm \vec{n}_P.$$

Infatti \vec{N}_C giace, come la curva \mathcal{C} , sul piano α ed è perpendicolare alla retta t che è tangente alla curva.

Dunque

$$k_C^{(n)}(P) = k_C(P) \vec{N}_C \cdot \vec{n}_P = \pm k_C(P).$$

Vale a dire

per le sezioni normali di una superficie in un punto P la curvatura normale e la curvatura sono uguali a meno del segno; precisamente sono uguali se il versore normale alla superficie è rivolto verso la concavità della curva, altrimenti sono opposte.

6. Curvature normali in un punto di una superficie.

Data una superficie \mathcal{S} ed un suo punto P , non singolare, fissiamo un versore normale \vec{n}_P alla superficie.

Ora consideriamo una curva \mathcal{C} che giace sulla superficie e passa per P . Come sappiamo (Teorema 5.1) la sua curvatura normale $k_{\mathcal{C}}^{(n)}(P)$ in P dipende solo dalla retta t , tangente alla curva in P . Vale a dire \mathcal{C} ha la stessa curvatura normale (in P) della sezione normale \mathcal{C}' ottenuta sezionando la superficie \mathcal{S} con il piano α perpendicolare ad \mathcal{S} in P e che passa per t . In altri termini se vogliamo considerare tutte le possibili curvature normali in P non è necessario considerare tutte le possibili curve della superficie che passano per P , ma è sufficiente considerare solo le sezioni normali:

ad ogni retta tangente t ad \mathcal{S} in P corrisponde una sezione normale \mathcal{C} la cui curvatura normale $k_{\mathcal{C}}^{(n)}(P)$ dipende solo da t , pertanto talvolta la indicheremo con $k_t^{(n)}$.

La cosa rilevante che vogliamo illustrare è che la funzione

$$t \mapsto k_t^{(n)}$$

che associa ad ogni direzione tangente in P la corrispondente curvatura normale gode di particolari proprietà. Cominciamo con il seguente

7.7

TEOREMA 6.1. *In un punto P di una superficie*

- *o tutte le curvature normali sono uguali, nel qual caso il punto P si dice ombelico*
- *oppure le possibili curvature normali variano tra due valori, un valore minimo ed uno massimo. In tal caso esiste un'unica direzione in cui la curvatura normale è massima ed un'unica direzione in cui la curvatura normale è minima e queste due direzioni, dette direzioni principali, sono tra loro perpendicolari.*

Le curvature delle direzioni principali - vale a dire i valori massimo e minimo - sono altresì dette curvature principali.

6.1. Dimostrazione del Teorema 7.7. Con un semplice calcolo algebrico si dimostra che:

7.12

LEMMA 6.2. *La superficie di equazione*

7.3

$$(6.1) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = z$$

è - a seconda di come sono i coefficienti A, B, C - un piano, un paraboloide ellittico o iperbolico, un cilindro parabolico.

Dimostrazione. Se $A = B = C = 0$, l'equazione (6.1) diventa: $z = 0$ e rappresenta un **piano**.
Se $A = C = 0$ e $B \neq 0$, allora resta

$$2Bxy = z$$

che (cfr. dimostrazione del Teorema 4.5) è l'equazione di un **paraboloide iperbolico**.

Altrimenti, considerato che nell'equazione (6.1) x ed y svolgono lo stesso ruolo, possiamo supporre $A \neq 0$ e quindi scrivere

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A\left(x + \frac{By}{A}\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)y^2.$$

Allora considerando la trasformazione affine

$$\begin{cases} x' = x + \frac{By}{A} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

l'equazione ^[7.3](6.1) diventa:

$$\boxed{7.4} \quad (6.2) \quad Ax'^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)y'^2 = z'.$$

Quest'ultima equazione

• se A e $(C - \frac{B^2}{A})$ hanno lo stesso segno rappresenta un **paraboloide ellittico** (cfr. ^[3.2]Proposizione 3.2);

• se A e $(C - \frac{B^2}{A})$ hanno segno opposto rappresenta un **paraboloide iperbolico** (cfr. ^[3.2]Proposizione 3.2);

• se $(C - \frac{B^2}{A}) = 0$ resta $Ax^2 = z$ che rappresenta un **cilindro parabolico** (cfr. ^[7.15]Fig. 7.15).

Si noti che la trasformazione affine che abbiamo considerato lascia invariata la variabile z e quindi piani verticali vanno in piani verticali e piani orizzontali in piani orizzontali. Ne segue che ad es. nel caso del paraboloide ellittico, le sezioni orizzontali dopo la trasformazione affine sono ellissi e quindi lo erano anche prima e le sezioni verticali, che sono parabole, lo erano anche prima della trasformazione, dunque la superficie era, prima della trasformazione affine, un paraboloide ellittico⁷.

La conclusione è che sono possibili solo i 4 casi previsti nell'enunciato. \square

Possiamo così passare alla

Prima dimostrazione del Teorema ^[7.7]6.1. Partiamo dalla soluzione dell'Esercizio ^[7.5]6.1 (rileggerla): preso un sistema di coordinate con origine nel punto P e in cui il piano tangente τ_P coincide con il piano x, y , la superficie, vicino a P , è il grafico di una funzione $z = f(x, y)$.

Inoltre la funzione $z = h(x, y)$, definita da

$$h(x, y) = f_{xx}x^2 + 2f_{xy}xy + f_{yy}y^2,$$

ha questa utile proprietà: consideriamo la circonferenza unità⁸ \mathcal{U} sul piano tangente; se $(x, y) \in \mathcal{U}$, allora $h(x, y)$ è la curvatura normale $k_t^{(n)}$ della retta tangente t che passa per (x, y) . Si noti inoltre che

$$h(x, y) = h(-x, -y),$$

quindi la retta t taglia su \mathcal{U} punti diametralmente opposti a cui corrisponde lo stesso valore della curvatura.

Per comprendere questa affermazione si consideri la Fig. ^[7.16]14a. In essa è rappresentata la circonferenza unità \mathcal{U} e il grafico di una funzione (non è proprio h , ma solo un esempio); la retta t taglia la circonferenza unità in due punti diametralmente opposti (Q ed R) sulla cui verticale stanno due punti (Q' e R') della superficie. Questi ultimi, al variare della retta t descrivono la curva \mathcal{K} che, non è altro che l'intersezione del grafico di h con il cilindro verticale (vedi Fig. ^[7.16]14b) costruito sopra la circonferenza \mathcal{U} . La curvatura normale $k_t^{(n)}$ della direzione t è la quota di Q' e di R' .

Per il Lemma ^[7.12]6.2 ci sono 4 possibilità:

⁷Questo risultato corrisponde ad un fatto più generale che non abbiamo dimostrato: le trasformazioni affini mandano quadriche in quadriche senza alterarne il tipo, quindi paraboloidi ellittici in paraboloidi ellittici ecc.

⁸Cioè la circonferenza con centro l'origine e raggio 1

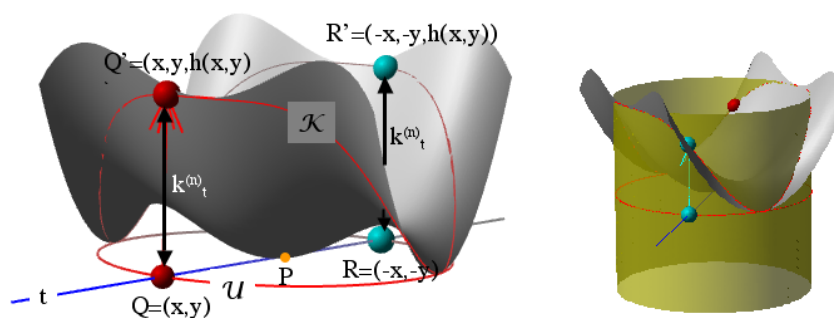


FIGURE 14. a - b. Apri il file per vedere la retta ruotare

f7.16

(1) il grafico della funzione h è il piano $z = 0$ (cioè il piano tangente in P), questo significa che le curvature normali sono tutte nulle e il punto P è un ombelico;

(2) il grafico della funzione h è un paraboloide ellittico. In Fig. ^{f7.17}₁₅ vediamo

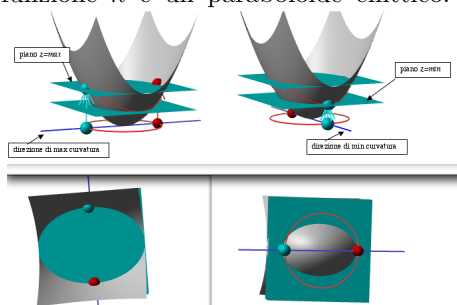


FIGURE 15. Apri i files per vedere ruotare la retta

f7.17

riprodotta la stessa situazione di Fig. ^{f7.16}₁₄ nel caso particolare in cui il grafico di h è un paraboloide ellittico. In particolare si riconosce che c'è un'unica direzione di massimo ed un'unica direzione di minimo. Nelle due immagini inferiori vediamo una vista dall'alto e una vista dal basso dello stesso oggetto; esse mostrano come le direzioni di massimo e di minimo siano quelle degli assi delle ellissi che i piani orizzontali tagliano sul paraboloide ellittico. Dunque esse sono perpendicolari tra loro.

Si può anche ragionare diversamente. In Fig. ^{f7.17.2}_{16a}; ogni ellisse rossa è una

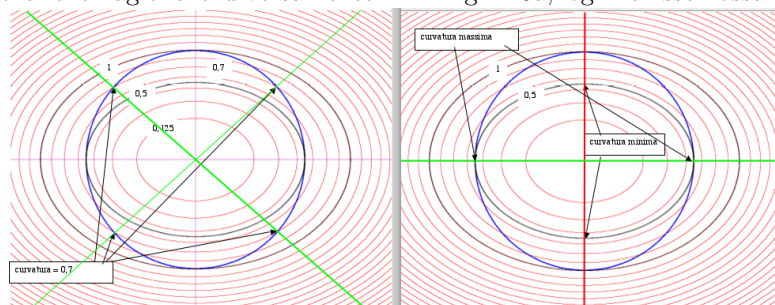


FIGURE 16. a - b

f7.17.2

sezione del paraboloide ellittico con un piano orizzontale, i.e. piani $z = cost$. Per intenderci converrà indicare con \mathcal{E}_c l'ellisse tagliata dal piano $z = c$ (è chiaro che dobbiamo prendere $c > 0$ altrimenti la sezione non è un'ellisse). La circonferenza \mathcal{U} (in blu) taglia l'ellisse \mathcal{E}_c se $m \leq c \leq M$ (nel caso concreto in figura $m = 0,5$

e $M = 1$). Se $m < c < M$, allora \mathcal{U} taglia l'ellisse \mathcal{E}_c in 4 punti che individuano due rette incidenti nell'origine (rette verdi, e il valore di c è 0,7). Se $c = m$ oppure $c = M$, allora (cfr. fig. 16b) \mathcal{U} è tangente all'ellisse \mathcal{E}_c in due punti che individuano una sola retta per l'origine (in rosso e risp. verde).

Confrontando con la Fig. 17 dovrebbe risultare evidente il significato di tutto ciò. Le due rette verdi in Fig. 16a rappresentano due direzioni tangenti a cui corrisponde la curvatura normale 0,7. La retta rossa (risp. verde) in Fig. 16b rappresenta la direzione di minima (risp. massima) curvatura.

(3) il grafico della funzione h è un paraboloide iperbolico. La Fig. 17 è l'analogo

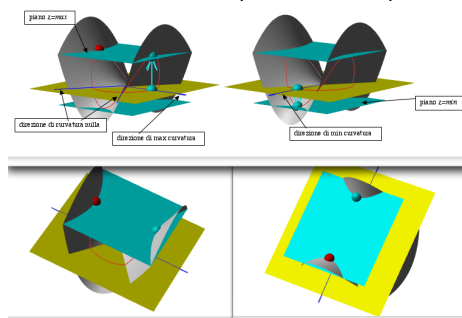


FIGURE 17. Apri i files per vedere ruotare la retta

f7.18

della Fig. 15 nel caso in cui il grafico di h sia un paraboloide iperbolico. Come si vede dalle figure di sotto le direzioni di massimo e di minimo passano per i vertici delle iperboli che i piani orizzontali tagliano sul paraboloide iperbolico. Dunque esse sono perpendicolari tra loro.

Di nuovo possiamo usare l'argomento delle sezioni piane in Fig. 18. Qui ab-

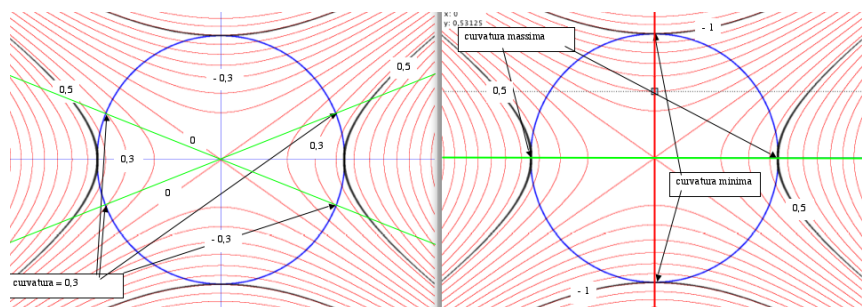


FIGURE 18. a - b

f7.18.2

biamo delle iperboli \mathcal{I}_c con c che può assumere anche valori negativi. Per $c = 0$ abbiamo due rette (gli asintoti di tutte le iperboli); per $c < 0$ otteniamo le iperboli che sono negli angoli sotto e sopra gli asintoti sono negative, per $c > 0$ le iperboli che sono comprese nelle due angoli a lato degli asintoti. Ci sono due valori $m < 0 < M$ tali che le iperboli \mathcal{I}_c con $m < c < M$ tagliano la circonferenza \mathcal{U} in 4 punti ed individuano due direzioni tangenti che hanno curvatura normale c . Invece le iperboli \mathcal{I}_m e \mathcal{I}_M sono tangenti a \mathcal{U} ed individuano ciascuna una sola direzione. Sono le due direzioni principali, che corrispondono agli assi delle iperboli e quindi sono tra loro perpendicolari.

(4) il grafico della funzione h è un cilindro parabolico. La Fig. 19 è l'analogo della Fig. 15 nel caso (4). Come si vede dalle due figure di sotto la direzione di

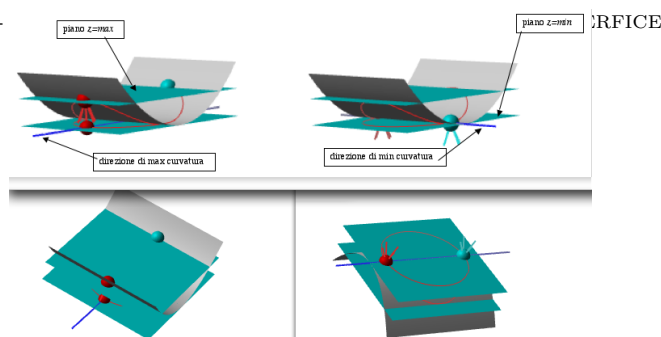


FIGURE 19. Apri i files per vedere ruotare la retta

f7.19

minimo è quella delle generatrici del cilindro mentre quella di massimo è ad essa perpendicolare.

Anche nel caso (4), possiamo trattare il problema per mezzo delle sezioni orizzontali del cilindro parabolico. In Fig. 20 vediamo che queste sezioni sono coppie

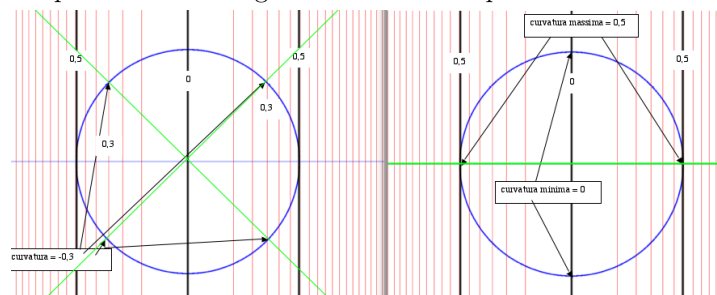


FIGURE 20. a - b

f7.19.2

di rette parallele, tranne per la sezione $z = 0$ che è un'unica retta. Qui ci sono due valori 0 ed $M > 0$ per cui se $0 < c < M$ allora \mathcal{U} taglia la coppia di rette parallele in 4 punti e restano individuate due direzioni tangenti con curvatura normale c . Se invece $c = 0$ (risp. $c = M$) di direzioni ne resta individuata una sola (cfr. Fig. 20b); si tratta delle direzioni principali che di nuovo sono tra loro perpendicolari. \square

Proponiamo una differente dimostrazione:

Seconda dimostrazione del Teorema 6.1. Sviluppiamo in serie la funzione $f(x, y)$; otteniamo⁹:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2) + \dots \simeq \frac{1}{2}h(x, y)$$

dove i termini trascurati sono di ordine maggiore a 2. Questa approssimazione non altera il calcolo delle derivate seconde di f nell'origine e quindi non compromette il calcolo delle curvature normali nell'origine. Dunque, ai fini del calcolo delle curvature normali nel punto P , possiamo supporre che la superficie \mathcal{S} sia il grafico della funzione $\frac{1}{2}h$.

Di nuovo per il Lemma 6.2 ci sono 4 casi:

(1) la superficie $z = \frac{1}{2}h(x, y)$ che approssima la nostra superficie \mathcal{S} è un piano, allora tutte le sezioni normali sono rette e dunque tutte le curvature normali sono nulle.

⁹Tenuto conto che $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$

(2) la superficie $z = \frac{1}{2}h(x, y)$ che approssima la nostra superficie \mathcal{S} è un paraboloide ellittico. Le sezioni normali sono le sezioni con piani verticali passanti per l'asse delle z , quindi sono parabole. Per costruzione il paraboloide è definito a partire da due parabole disposte su piani ortogonali, eventualmente diverse, una più “ampia” l'altra meno “ampia”. Dunque esistono due sezioni normali, su piani perpendicolari tra loro, che sono queste due parabole. Le altre parabole hanno ampiezza intermedia tra queste. È intuitivo che tanto più una parabola è “ampia”, tanto minore è la curvatura nel vertice della parabola. Per le sezioni normali curvatura coincide con curvatura normale, quindi esiste un'unica direzione di massimo e un'unica direzione di minima curvatura normale ed esse sono ortogonali tra loro (In Fig. 21 sono rappresentate: la sezione normale di massima curvatura, quella di minima ed una di curvatura intermedia. Nell'ultima immagine di destra si vede il confronto tra le tre sezioni). Si noti che nel caso rappresentato in figura entrambe le curva-

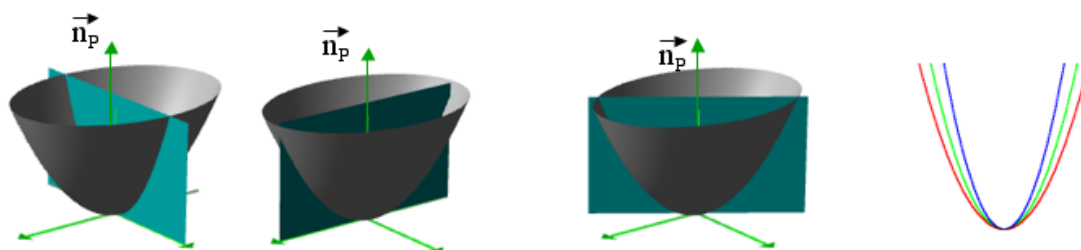


FIGURE 21. Apri il file per vedere variare la sezione normale

f7.20

ture principali (e quindi tutte le curvature normali) sono positive infatti il versore normale \vec{n}_P ha verso concorde con il versore normale alle sezioni che hanno tutte la concavità rivolta verso l'alto. Se invertiamo il verso del versore normale \vec{n}_P tutte le curvature normali cambiano di segno e la direzione di massimo diventa di minimo e viceversa.

(3) La superficie $z = \frac{1}{2}h(x, y)$ che approssima la nostra superficie \mathcal{S} è un paraboloide iperbolico. Le sezioni normali sono le sezioni verticali passanti per l'asse delle z , quindi sono parabole, tranne due che sono rette (cfr. Cap. VI). Le bisettrici di queste due rette sono le sezioni normali con curvatura massima e minima (si tratta di parabola con la concavità diretta da parti opposte). Ovviamente le due bisettrici sono perpendicolari tra loro. In Fig. 22 sono rappresentate: la sezione normale di massima curvatura, quella di minima ed una di curvatura intermedia. Nell'ultima immagine di destra si vede il confronto tra le tre sezioni).

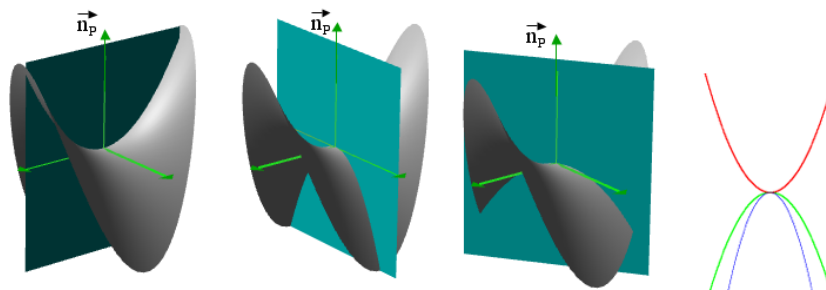


FIGURE 22. Apri il file per vedere variare la sezione normale

f7.21

(4) La superficie $z = \frac{1}{2}h(x, y)$ che approssima la nostra superficie \mathcal{S} è un cilindro parabolico. Le sezioni normali sono le sezioni verticali passanti per l'asse delle z , quindi sono parabole (con la concavità rivolta dalla stessa parte) tranne una che è una retta. In Fig. 23 sono rappresentate: la sezione normale di massima curvatura, quella di minima (ovviamente la retta) ed una di curvatura intermedia. Nell'ultima immagine di destra si vede il confronto tra le tre sezioni).

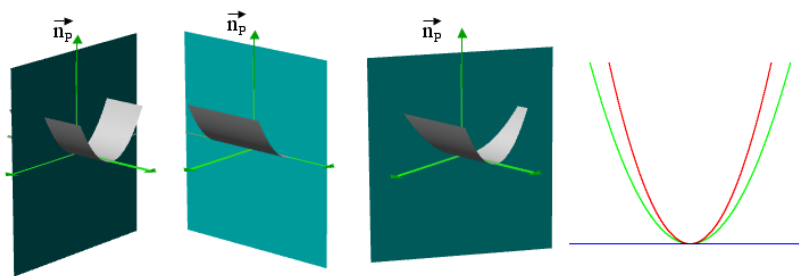


FIGURE 23. Apri il file per vedere variare la sezione normale

f7.22

7. Ulteriori proprietà della curvatura normale

Dalla dimostrazione del Teorema 7.7 non sarebbe difficile dedurre che,

7.8

PROPOSIZIONE 7.1. Indichiamo con k_{min} e k_{max} le curvatures principali. La curvatura normale $k_{t(\theta)}^{(n)}$ nella direzione della retta tangente $t(\theta)$ che forma un angolo θ con la direzione di minimo è data da

$$k_{t(\theta)}^{(n)} = k_{min} \cos^2 \theta + k_{max} \sin^2 \theta.$$

In particolare questo dice che: (i) la curvatura normale in ogni direzione è determinata dai valori della curvatures nelle direzioni principali, (ii) passando dalla direzione di minimo a quella di massimo la curvatura normale è strettamente crescente (ogni valore viene assunto una ed una sola volta), (iii) direzioni simmetriche rispetto alle curvatures principali hanno la stessa curvatura normale.

7.9

ESERCIZIO 7.2. Mostrare che in un punto P di una superficie di rotazione le curvatures principali sono le tangenti al parallelo e al meridiano che passano per P .

Soluzione. Il piano che passa per l'asse di rotazione e per P è un piano di simmetria della superficie, quindi le direzioni tangenti in P e simmetriche rispetto al meridiano hanno la stessa curvatura normale. Dunque se una certa direzione t è di massimo, lo sarà anche la sua simmetrica t' . Ma per il Teorema 7.1 esiste una sola direzione di massimo, dunque $t = t'$; cioè t è tangente al meridiano oppure al parallelo. Lo stesso argomento vale per il minimo. \square

8. I diversi tipi di punti su una superficie

Come abbiamo visto dalla dimostrazione del Teorema ^{7.7}6.1, dato un punto P di una superficie \mathcal{S} , esistono 4 casi possibili: **(1)** la superficie vicino a P si approssima con un piano (il piano tangente), **(2)** con un paraboloide ellittico o **(3)** iperbolico oppure **(4)** con un cilindro parabolico. Introduciamo allora la seguente

- 7.10** DEFINIZIONE 8.1. *Dato un punto P di una superficie \mathcal{S} diremo*
- P è planare se tutte le curvature normali in P sono nulle (caso **(1)**);
 - P è ellittico se le curvature principali hanno lo stesso segno (caso **(2)**);
 - P è iperbolico se le curvature principali hanno segno opposto (caso **(3)**);
 - P è parabolico se delle due curvature principali una è nulla e l'altra no (caso **(4)**).

Esaminiamo i diversi tipi di punto.

8.1. Punti ellittici.

- 7.11** ESERCIZIO 8.2. *Dare un esempio di superficie i cui punti sono tutti ellittici.*

Soluzione. L'esempio più ovvio è quello di una sfera: tutti

8.1.1. *Commenti al Teorema 6.1: ombelichi.* Vediamo innanzi tutto un esempio di ombelico.

- 7.8** ESERCIZIO 8.3. *Dare un esempio di ombelico.*

Soluzione. Sappiamo (cfr. Esercizio 7.4) che tutte le curve che giacciono su una sfera hanno in tutti i punti la stessa curvatura normale, pari a $1/R$, dove R è il raggio della sfera. In particolare in un punto P della sfera tutte le curvature normali sono uguali e quindi P è un ombelico. Concludo che tutti i punti di una sfera sono ombelichi.

Anche tutti i punti di un piano sono ombelichi, infatti in un punto P di una superficie le curvature normali sono (a meno del segno) le curvature delle sezioni normali e quest'ultime, se la superficie è un piano π , sono evidentemente delle rette, dunque hanno curvatura nulla. Pertanto in un punto del piano tutte le curvature normali sono nulle. \square

Si può dire qualcosa di più:

- 7.9** PROPOSIZIONE 8.4. *Tutti i punti di una sfera o di un piano sono ombelichi. Dunque le curvature normali in un punto P di una sfera sono tutte uguali tra loro e pari a $1/R$ (dove R è il raggio della sfera) e, in un punto P di un piano, tutte le curvature normali sono nulle. Le uniche superfici composte da ombelichi sono il piano e le sfere.*

Da cui segue un interessante

- 7.10** COROLLARIO 8.5. *Non esistono superfici composte da ombelichi in cui le curvature normali, uguali tra loro in ciascun punto, cambino da punto a punto.*

- 7.11** ESERCIZIO 8.6. *Dare un esempio di superficie che possiede un ombelico, ma in cui non tutti i punti sono ombelichi.*

Soluzione. Si consideri una curva piana \mathcal{C} che possiede un asse di simmetria a e tale che l'asse tagli perpendicolarmente la curva in un punto P (vale a dire la retta a è perpendicolare alla tangente in P), vedi un es. in Fig. 24. Allora, per

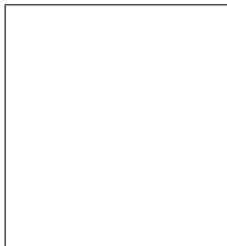


FIGURE 24

f7.14

la Proposizione 7.14 (iii). il punto P è un punto non singolare della superficie di rotazione \mathcal{S} ottenuta ruotando \mathcal{C} attorno all'asse a ; inoltre il piano tangente a P è perpendicolare all'asse a . Quest'ultimo fatto è decisivo, infatti allora le sezioni normali di \mathcal{S} nel punto P sono le sezioni ottenute con i piani del fascio che ha per asse la retta a e sono dunque tutte identiche alla curva \mathcal{C} e pertanto hanno la stessa curvatura. Dunque P è un ombelico.

Resta da escludere che tutti gli altri punti siano ombelichi, ma poiché le uniche superfici formate da ombelichi sono le sfere e il piano, basta escludere che \mathcal{C} sia una circonferenza o una retta. \square

8.1.2. *Ulteriori commenti.* Se, in un punto P di una superficie, cambiamo di segno al versore normale, vale a dire sostituiamo $-\vec{n}_P$ a \vec{n}_P , allora tutte le curvature normali cambiano di segno, quindi quella che era la direzione di massimo diventa di minimo e viceversa. Poco importa le direzioni principali restano le stesse.