CHAPTER 7

Diversi tipi di punti di una superfice

1. Generalità

Come abbiamo visto dalla dimostrazione del Teorema 6.1, dato un punto P (non singolare) di una superfice $\mathcal{S}$, esistono 4 casi possibili: **(1)** la superfice vicino a P si approssima con un piano (il piano tangente), **(2)** con un parabolide ellittico o **(3)** iperbolico oppure **(4)** con un cilindro parabolico. Introduciamo allora la seguente

Definizione 1.1. *Dato un punto P di una superfice $\mathcal{S}$ diremo*
- *P è* planare *se tutte le curvature normali in P sono nulle* (caso **(1)**)*;*
- *P è* ellittico *se le curvature principali hanno lo stesso segno* (caso **(2)**)*;*
- *P è* iperbolico *se le curvature principali hanno segno opposto* (caso **(3)**)*;*
- *P è* parabolico *se delle due curvature principali una è nulla e l'altra no* (caso **(4)**).

Esaminiamo i diversi tipi di punto.

2. Punti ellittici.

Esercizio 2.1. *Dare un esempio di superfice i cui punti sono tutti ellittici.*

Soluzione. L'esempio più ovvio è quello di una sfera. Per dimostrarlo osserviamo che le sezioni normali in un punto P di una sfera di centro C si ottengono sezionando la sfera con i piani che hanno il raggio CP come asse; tali sezioni sono dunque cerchi massimi (cioè circonferenze che hanno centro nel centro della sfera) con curvatura $1/R$. Dunque le curvature normali sono tutte uguali a $\pm 1/R$ (il segno è lo stesso per tutte e dipende dalla scelta del versore normale) e P è un ombelico ellittico. $\square$

Esercizio 2.2. *Dare un esempio di superfice in cui tutti i punti sono ellittici e nessuno di essi è un ombelico.*

Soluzione. Si consideri la superfice di rotazione $\mathcal{S}$ ottenuta ruotando l'arco di circonferenza $\widehat{AB}$ attorno all'asse a (vedi Fig. 1). Prendiamo il versore normale alla superfice rivolto verso l'interno e calcoliamo le curvature principali k_1, k_2 nel generico punto Q. Esse sono le curvature normali $k_{\mathcal{M}}^{(n)}$ del meridiano e $k_{\mathcal{P}}^{(n)}$ del parallelo che passano per Q.

La curvatura normale $k_{\mathcal{M}}^{(n)}$ del meridiano è la curvatura del meridiano (in generale esse sono uguali a meno del segno, ma in questo caso il versore normale è

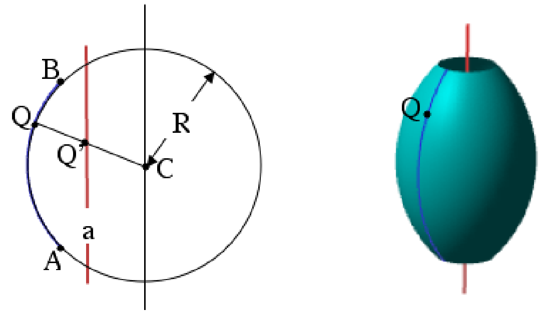

FIGURE 1

diretto verso la concavità del meridiano, quindi esse sono uguali); dunque $k^{(n)}_{\mathcal{M}}$ è la curvatura dell'arco $\widehat{AB}$, cioè

$$k^{(n)}_{\mathcal{M}} = \frac{1}{R},$$

dove R è il raggio della circonferenza a cui appartiene $\widehat{AB}$.

La curvatura normale $k^{(n)}_{\mathcal{P}}$ del parallelo è la curvatura di una circonferenza che passa per Q e ha centro nel punto Q' in cui la normale al meridiano incontra l'asse Q'. Dunque

$$k^{(n)}_{\mathcal{P}} = \frac{1}{||QQ'||}.$$

Ora si dà il caso QQ' sia un segmento del raggio QC, e questo è vero per tutti i punti dell'arco $\widehat{AB}$, se, come in figura, l'asse a si frappone tra arco e centro. Ne viene che

$$||QQ'|| < ||QC|| = R$$

e quindi

$$k^{(n)}_{\mathcal{P}} = \frac{1}{||QQ'||} > \frac{1}{R} = k^{(n)}_{\mathcal{M}}.$$

Dunque le due curvature principali sono entrambe positive, ma diverse e pertanto tutti i punti della superfice $\mathcal{S}$ sono ellittici e nessuno di essi è un ombelico. (Si noti che la condizione decisiva è che l'asse a si frapponga tra centro e arco di circonferenza). $\square$

ESERCIZIO 2.3. *Dimostrare che tutti i punti di un paraboloide ellittico sono ellittici (da cui il secondo nome della superfice).*

Soluzione. Dallo studio delle sezioni piane di un paraboloide ellittico $\mathcal{P}$, sappiamo che queste sono ellissi o parabole, oppure un punto se il piano è tangente a $\mathcal{P}$ (oppure anche vuote se il piano è esterno).

Le ellissi e le parabole (come pure le iperboli) hanno curvatura non nulla in ogni punto. In particolare *tutte le sezioni normali in un punto P di $\mathcal{P}$ hanno curvatura non nulla.*

Ma, per una sezione normale, curvatura e curvatura normale coincidono a meno del segno, dunque *tutte le curvature normali in P sono $\neq 0$.*

Se le curvature principali in P avessero segno discorde ci sarebbero due direzioni di curvatura nulla (simmetriche rispetto alle direzioni principali, cfr. Proposizione 7.1); dunque le curvature principali hanno lo stesso segno e P è ellittico. $\square$

Vediamo un'importante proprietà dei punti ellittici.

TEOREMA 2.4. *Sia P un punto ellittico di una superfice $\mathcal{S}$. Esiste una regione $\mathcal{A}$ di $\mathcal{S}$, che contiene P, che incontra il piano tangente τ_P alla superfice solo nel punto P e, per il rimanente, giace in uno dei due semispazi determinati dal piano.*

La Fig. 2 mostra un caso in cui il piano tangente, in un punto evidentemente

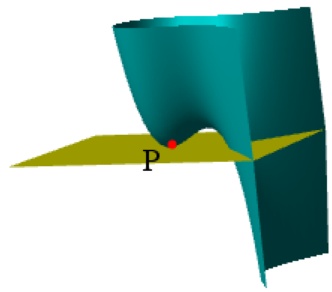

FIGURE 2

ellittico, taglia, lontano dal punto, la superfice. Ecco perché è necessario formulare il teorema così come abbiamo fatto, invece di dire semplicemente che, in un punto ellittico, il piano tangente tocca la superfice solo nel punto, lasciando il resto della superfice tutta da una parte.

Dimostrazione. Come nella dimostrazione del Teorema 6.1, descriviamo la superfice $\mathcal{S}$ come grafico di una funzione f, grafico che si può approssimare con un parabolide ellittico (cfr. la seconda dimostrazione del Teorema 6.1). Pertanto

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + E(x,y),$$

dove $E(x,y)$ è costituito da termini di ordine superiore al secondo, vale a dire

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{E(x,y)}{x^2+y^2} = 0.$$

Da cui si ricava che il segno di $f(x,y)$ si mantiene positivo vicino a P. □

Non si deve credere che questo comportamento dei punti ellittici rispetto al piano tangente sia una proprietà che li caratterizza. Infatti, come vedremo nei due esercizi seguenti è possibile che, vicino ad un punto planare o parabolico, il piano tangente tocchi la superfice solo in un punto, lasciando tutto il resto della superfice da una parte.

ESERCIZIO 2.5. *Mostrare un esempio di punto planare in cui il piano tangente tocca la superfice in un sol punto.*

Soluzione. Si consideri la superfice $\mathcal{S}$ ottenuta ruotando la quartica $\mathcal{C}$ di equazione $y = x^4$ attorno all'asse delle y (vedi Fig. 3). La curva $\mathcal{C}$ ha nell'origine O un punto di curvatura nulla e le sezioni normali di $\mathcal{S}$ nell'origine sono tutte uguali a $\mathcal{C}$. Dunque tutte le curvature normali in O sono nulle e dunque O è un punto planare. □

ESERCIZIO 2.6. *Si mostri un esempio di un punto parabolico in cui il piano tangente tocca la superfice in un sol punto.*

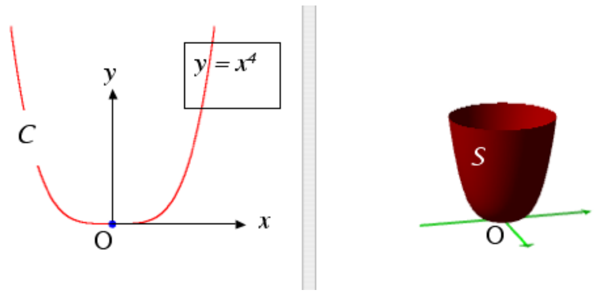

FIGURE 3

Soluzione. Si consideri la superfice $\mathcal{S}$ di equazione $x^4 + y^2 = z$ (cfr. Fig. 4a). Per qualunque valore di x ed y, tranne $x = y = 0$, riesce $z = x^4 + y^2 > 0$; dunque il piano $z = 0$ è tangente alla superfice nell'origine O e tocca la superfice solo in O.

La sezione con il piano $y = 0$ è una sezione normale ed è la quartica $z = x^4$ che ha curvatura nulla in O. Dunque in O c'è una curvatura normale nulla. La sezione con il piano $x = 0$ è una sezione normale ed è la parabola $z = y^2$ che ha curvatura $\neq 0$ in O. Dunque c'è una curvatura normale positiva. Pertanto il punto

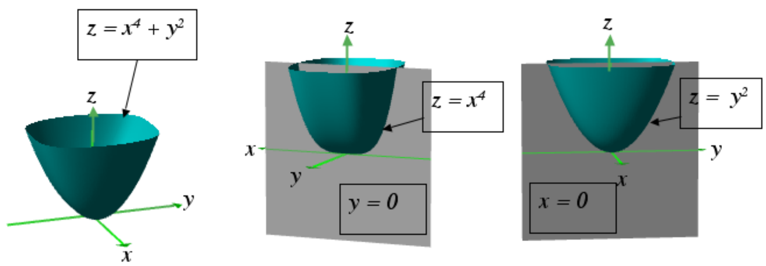

FIGURE 4. a - b - c

O può essere solo iperbolico o parabolico. Il caso iperbolico è escluso perché il piano tangente non taglia la superfice (cfr. Teorema 3.1). $\square$

3. Punti iperbolici

Consideriamo la superfice $\mathcal{S}$ in Fig. 5a. Il punto P evidenziato è iperbolico.

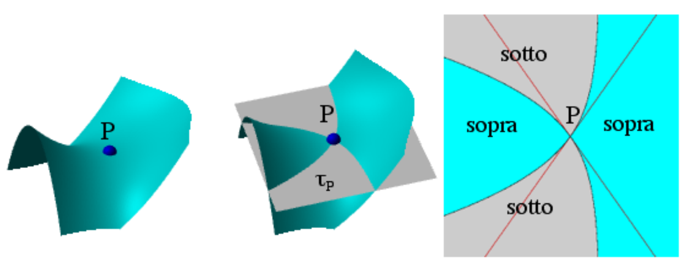

FIGURE 5. a - b - c

In Fig. 5b si vede che il piano tangente taglia sulla superfice una curva $\mathcal{C}$ che in P presenta due rami e due tangenti (vedi Fig. 5c). La curva suddivide una **piccola** regione di $\mathcal{S}$ vicino a P in 4 parti, due a due opposte in P. La superfice $\mathcal{S}$ si dispone sotto o sopra il piano tangente secondo lo schema di Fig. 5.

Si tratta di un fatto generale che enunciamo nel teorema seguente. Tuttavia è bene precisare che è necessario limitarsi ad una **piccola** regione vicino al punto P iperbolico, infatti - come mostra la Fig. 6 - se si considera una regione più ampia,

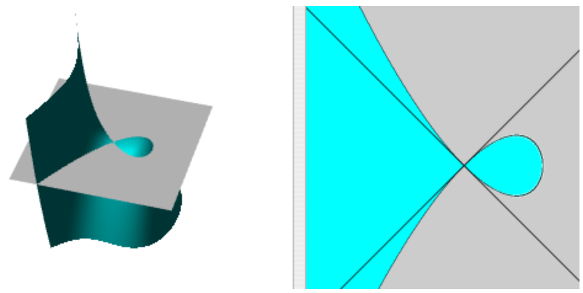

FIGURE 6

la curva $\mathcal{C}$ può dividere il piano tangente in 3 sole regioni.

TEOREMA 3.1. *Sia P un punto iperbolico di una superfice $\mathcal{S}$. Allora il piano tangente τ_P ad $\mathcal{S}$ in P taglia sulla superfice una curva $\mathcal{C}$ che, vicino a P, presenta due rami incidenti in P (dunque P è singolare) le cui tangenti sono direzioni di curvatura normale nulla. La curva $\mathcal{C}$ suddivide la superfice $\mathcal{S}$, in una piccola regione vicino a P, in 4 parti, due a due opposte al vertice che sono (cfr. Fig. 5c) disposte da una parte o dall'altra del piano tangente.*

La situazione descritta nel teorema 3.1 vale per tutti i punti iperbolici, ma non è di loro esclusiva, come mostra l'esercizio seguente.

ESERCIZIO 3.2. *Mostrare un esempio di punto planare P in cui il piano tangente taglia la superfice lungo una curva che presenta in P due archi che suddividono la superfice in 4 regioni disposte da una parte e dall'altra del piano tangente.*

Soluzione. La superfice in Fig. 7a (che ha equazione $z = x^4 - y^4$) è una sella quartica. Essa è descritta da due famiglie di quartiche che si ottengono tagliando la superfice con il fascio di piani paralleli al piano xz oppure con il fascio dei piani paralleli al piano yz (vedi Fig. 7b e c). In particolare per l'origine O (evidenziata in

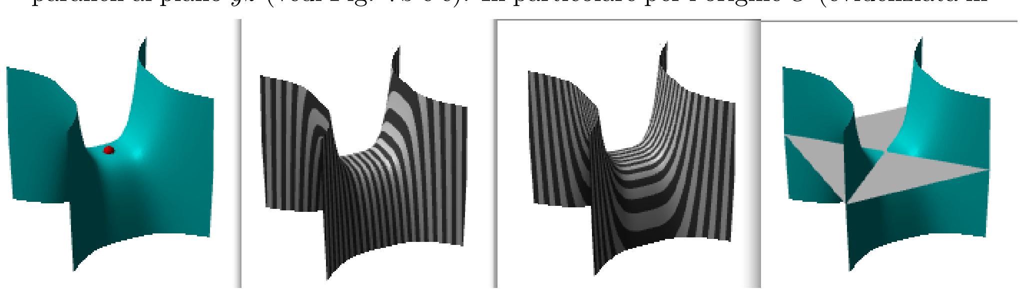

FIGURE 7. a - b - c - d

figura) le sezioni normali hanno tutte curvatura nulla, quindi O è un punto planare.

Come si vede dalla Fig. 7d il piano tangente taglia la superfice lungo una coppia di rette che suddividono la superfice in 4 regioni diversamente disposte rispetto al piano tangente. □

Per i punti parabolici la situazione è un po' diversa: in un punto parabolico può accadere che il piano tangente tagli sulla superfice una curva $\mathcal{C}$ e lasci parte della superfice da una parte del piano e parte dall'altra, ma la curva intersezione $\mathcal{C}$ non ha due diverse tangenti, perché la direzione di curvatura normale nulla in un punto parabolico è unica. A questo proposito vediamo l'esempio seguente.

Esempio 3.3. Si consideri la superfice a sella in Fig. 3.1a di equazione $x^4 - y^2 = z$. Le sezioni con i piani $x =$cost. sono parabole (Fig. 3.1b), mentre quelle con i piani $y =$cost. sono quartiche (Fig. 3.1c). Il piano tangente taglia la superfice (cfr. Fig. 8d) lungo una curva che vicino a P è formata da due archi che hanno la stessa tangente 8e. Dunque esiste nel punto P, evidenziato in figura, una sezione normale

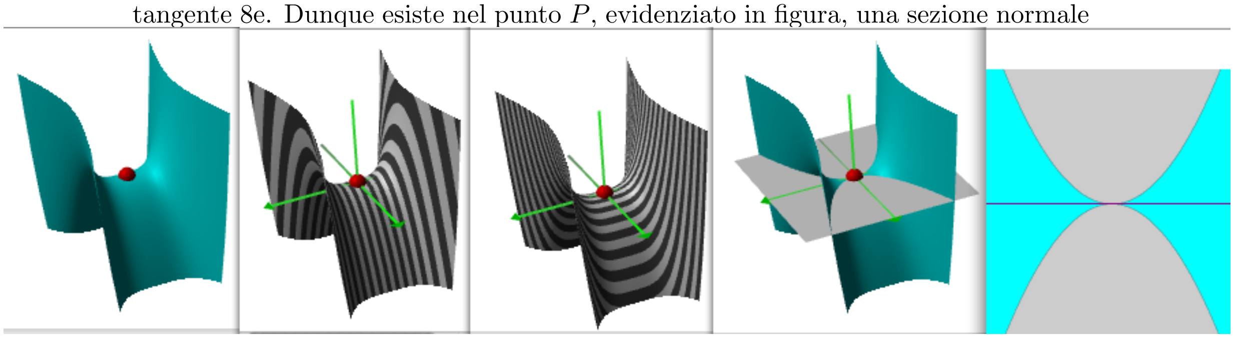

Figure 8. a - b - c - d - e

che è una parabola e quindi con curvatura non nulla, pertanto non è planare. Esiste una sezione normale che è una quartica con curvatura nulla in P, quindi P non è ellittico. La superfice viene suddivisa in 4 regioni dal piano tangente, ma la curva intersezione nel punto P ha una sola tangente, dunque P non è iperbolico. Dunque P è parabolico.

Esercizio 3.4. *Mostrare che tutti i punti di un paraboloide iperbolico sono iperbolici.*

Soluzione. Sappiamo che un paraboloide iperbolico $\mathcal{Q}$ è doppiamente rigato e dunque per ogni punto $P \in \mathcal{Q}$ passano due rette r ed s che stanno sulla superfice. Queste due rette individuano due direzioni tangenti con curvatura nulla e dunque in P ci sono due direzioni con curvatura normale nulla. Perciò P può essere iperbolico o planare.

Per escludere che P sia planare non è necessario richiamare i dettagli dello studio delle sezioni piane di un paraboloide iperbolico, ma basta ricordare che r ed s sono le uniche rette delle superfice che passano per P. Prendiamo un piano α del fascio di piani che ha per asse la normale alla superfice in P. Il piano α taglia su $\mathcal{Q}$ una sezione normale $\mathcal{C}$; tale sezione è una conica (perché $\mathcal{Q}$ è una quadrica), se scegliamo α in modo che non passi per r ed s, allora $\mathcal{C}$ non può contenere rette (altrimenti ci sarebbe un'altra retta oltre ad r ed s che sta su $\mathcal{Q}$ e passa per P), quindi $\mathcal{C}$ è una conica non degenere e dunque ha, in ogni punto e in particolare in

P, curvatura non nulla. Dunque esiste almeno una sezione normale con curvatura non nulla e P non è planare. Dunque è iperbolico. □

4. Punti planari

Abbiamo già visto (Esercizi 2.5 e 3.2) esempi di punti planari in cui il piano tangente lascia la superfice tutta da una parte e in cui la suddivide in 4 parti. Altri esempi interessanti sono il piano stesso che è una superfice composta di punti planari e la *sella di scimmia*.

Esercizio 4.1. *Dare un esempio di punto planare P in cui il piano tangente taglia sulla superfice 3 rette.*

Soluzione. L'esempio in questione è la *sella di scimmia* in Fig. 9a (sarebbe bene farne uno schizzo). Come si vede in Fig. 9b per i punto P passano tre rette che

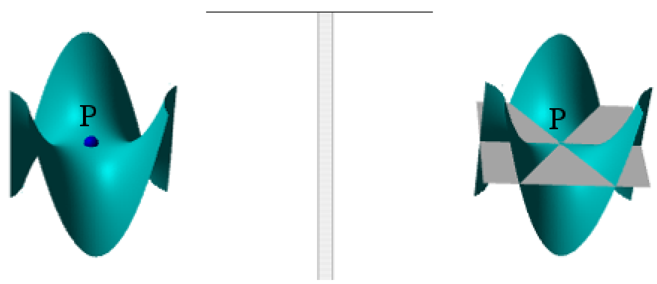

Figure 9. a - b

giacciono sulla superfice, quindi in P ci sono tre direzioni tangenti con curvatura normale nulla e pertanto il punto è planare (infatti tutti i valori delle curvature normali vengono assunti da una sola direzione, se sono le curvature principali, o da due direzioni, cfr. Proposizione 7.1). □

Il nome sella di scimmia deriva dal fatto che c'è posto anche per la coda. Si potrebbe vedere che P è l'unico punto planare e che tutti gli altri sono iperbolici.

5. Punti parabolici

Abbiamo già visto esempi di punti parabolici (Esercizio 2.6 in cui il piano tangente tocca la superfice solo in un punto e Esempio 3.3 in cui il piano tangente taglia la superfice in 4 regioni.)

Esercizio 5.1. *Dare un esempio di superfice in cui tutti i punti sono parabolici.*

Soluzione. La superfice ottenuta ruotando una retta r attorno ad un asse a ad esso parallelo è un *cilindro circolare retto* (cfr. Fig. 10). La superfice ottenuta ruotando una retta r attorno ad un asse a ad esso incidente è un *cono circolare retto* (cfr. Fig. 11).

Entrambe queste superfici sono composte di punti parabolici (dal cono bisogna escludere il vertice che è un punto singolare e dunque non ha senso dire se sia ellittico, iperbolico o ecc.). Infatti il meridiano è una retta e dunque ha curvatura nulla (in verità il meridiano di un cono sono due semirette, ma il discorso fila ugualmente). La curvatura normale del parallelo è $\pm 1/d$ nel caso del cilindro e

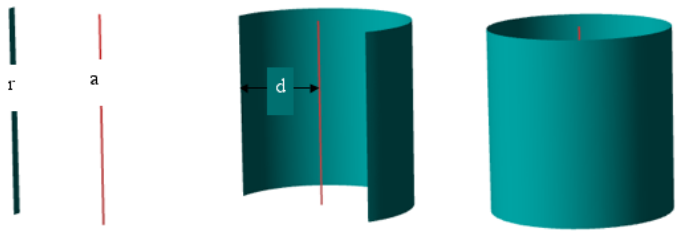

FIGURE 10

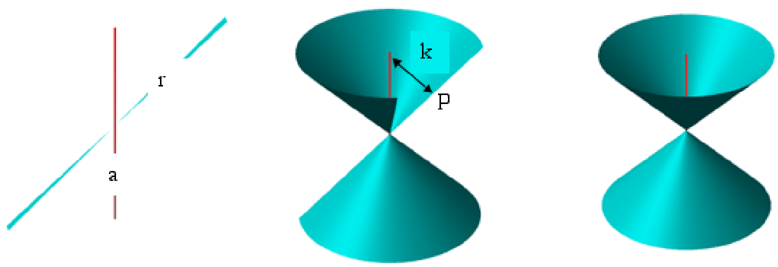

FIGURE 11

$\pm 1/k$ nel caso del cono (qui k dipende evidentemente dal punto P sul cono e il segno dalla scelta del versore normale); quindi non nulla. Dunque le curvature normali di meridiani e paralleli, cioè le curvature principali, sono una nulla e l'altra no, pertanto tutti i punti sono parabolici.

6. Ombelichi

Un ombelico è un punto in cui tutte le curvature normali sono uguali tra loro, dunque un ombelico può essere un punto planare oppure ellittico. I punti del piano sono ombelichi planari e abbiamo visto (cfr. Esercizio 2.1) che i punti di una sfera sono ombelichi ellittici.

Si può dire qualcosa di più:

PROPOSIZIONE 6.1. *Tutti i punti di una sfera o di un piano sono ombelichi. Dunque le curvature normali in un punto P di una sfera sono tutte uguali tra loro e pari a $1/R$ (dove R è il raggio della sfera) e, in un punto P di un piano, tutte le curvature normali sono nulle. Le uniche superfici composte da ombelichi sono il piano e le sfere.*

Da cui segue un interessante

COROLLARIO 6.2. *Non esistono superfici composte da ombelichi in cui le curvature normali, uguali tra loro in ciascun punto, cambino da punto a punto.*

ESERCIZIO 6.3. *Quali sono le superfici composte solo da ombelichi?*

Esercizio 6.4. *Dare un esempio di superfice che possiede un ombelico, ma in cui non tutti i punti sono ombelichi.*

Soluzione. Si consideri una curva piana $\mathcal{C}$ che possiede un asse di simmetria a e tale che l'asse tagli perpendicolarmente la curva in un punto P (vale a dire la retta a è perpendicolare alla tangente in P), vedi un es. in Fig. 12 . Allora, per

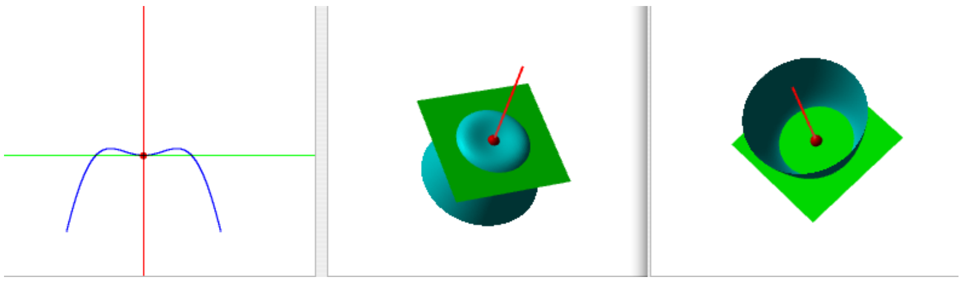

Figure 12

la Proposizione 2.5 (iii). il punto P è un punto non singolare della superfice di rotazione $\mathcal{S}$ ottenuta ruotando $\mathcal{C}$ attorno all'asse a; inoltre il piano tangente a P è perpendicolare all'asse a. Quest'ultimo fatto è decisivo, infatti allora le sezioni normali di $\mathcal{S}$ nel punto P sono le sezioni ottenute con i piani del fascio che ha per asse la retta a e sono dunque tutte identiche alla curva $\mathcal{C}$ e pertanto hanno la stessa curvatura. Dunque P è un ombelico.

Resta da escludere che tutti gli altri punti siano ombelichi, ma poiché le uniche superfici formate da ombelichi sono le sfere e il piano, basta escludere che $\mathcal{C}$ sia una circonferenza o una retta. □

7. Altri esempi ed esercizi

Esercizio 7.1. *Un toro (cfr. Esercizio 2.6) è la superfice di rotazione che si ottiene ruotando una circonferenza $\mathcal{C}$ attorno ad una retta a ad essa complanare ed esterna. Si determini quali punti di un toro $\mathcal{T}$ sono ellittici, iperbolici, parabolici o planari.*

Soluzione. In ogni punto P del toro $\mathcal{T}$, fissiamo il versore normale $\vec{n}_P$ (in rosso in Fig. 13) rivolto verso l'interno del toro.

Poiché il toro è una superfice di rotazione, le curvature principali in un punto P sono, le curvature normali del meridiano e del parallelo che passano per P.

La curvatura normale del meridiano coincide, a meno del segno, con la curvatura del meridiano. Nel caso del toro il meridiano è la circonferenza $\mathcal{C}$, di raggio diciamo R, e dunque

$$k_{\mathcal{C}}^{(n)} = \pm k_{\mathcal{C}} = \pm\frac{1}{R}.$$

Il segno è positivo se il versore normale $\vec{N}_{\mathcal{C}}$ al meridiano e il versore normale $\vec{n}_P$ al toro coincidono; e così accade perché $\vec{N}_{\mathcal{C}}$ è diretto da P verso il centro C della circonferenza. Dunque

$$k_{\mathcal{C}}^{(n)} = \frac{1}{R}.$$

La curvatura normale del parallelo è data da

$$k_{\mathcal{P}}^{(n)} = k_{\mathcal{P}} \vec{N}_{\mathcal{P}} . \vec{n}_P = \frac{1}{d} \cos\theta,$$

dove **(1)** la curvatura del parallelo $k_{\mathcal{P}} = \frac{1}{d}$, con d pari alla distanza del punto P dall'asse, e **(2)** θ è all'angolo formato dai versori $\vec{N}_{\mathcal{P}}$ normale al meridiano (in blu in Fig. 13) e il versore $\vec{n}_P$ normale al toro.

L'angolo θ dipende da dove si trova P: i punti A e B dividono il meridiano in due semicirconferenze $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ (cfr. Fig. 13); l'angolo θ è acuto se $P \in \mathcal{S}$ (risp.

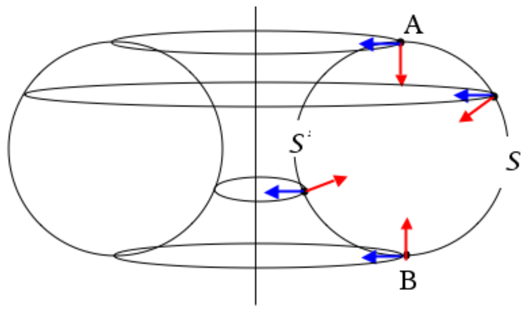

FIGURE 13

ottuso se $P \in \mathcal{S}'$) e dunque la curvatura normale del parallelo risulta positiva (risp. negativa).

Pertanto i punti di $\mathcal{S}$ sono ellittici (entrambe le curvature principali sono positive) mentre i punti di $\mathcal{S}'$ sono iperbolici (positiva la curvatura normale del meridiano e negativa quella del parallelo).

Nei punti A e B (cfr. Fig. 13) il versore normale $\vec{N}_{\mathcal{P}}(P)$ è perpendicolare al versore normale $\vec{n}_P$, pertanto la curvatura normale del parallelo è nulla e dunque questi due punti sono parabolici (una curvatura principale nulla, l'altra diversa da 0).

In Fig. 14 sono evidenziati con il colore i punti di diverso tipo. $\square$

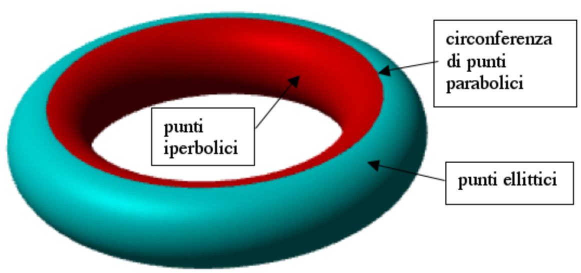

FIGURE 14

ESERCIZIO 7.2. *In un toro ci sono ombelichi ?*

Soluzione. Un punto P di una superfice $\mathcal{S}$ è un ombelico se tutte le curvature normali ad $\mathcal{S}$ nel punto P sono uguali. Se sono tutte nulle è un punto planare, altrimenti è un punto ellittico. In un toro non ci sono punti planari, ma ci sono punti ellittici (rappresentare in uno schizzo i punti ellittici come in Fig. 14). Si

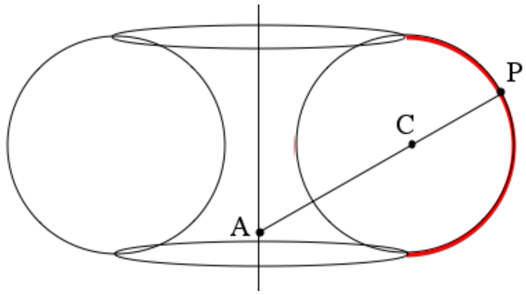

FIGURE 15

tratta di vedere se tra i punti ellittici di un toro ci sono ombelichi. Si consideri la Fig. 15; La curvatura normale del meridiano che passa per P è

$$k_{\mathcal{M}}^{(n)} = \frac{1}{||P - C||}.$$

La curvatura normale del parallelo che passa per P è la curvatura di una circonferenza che passa per P e ha il centro sull'intersezione tra la normale alla superfice passante per P e l'asse di rotazione; vale a dire nel punto A in figura. Dunque

$$k_{\mathcal{P}}^{(n)} = \frac{1}{||P - A||}.$$

Poiché, qualunque sia P ellittico (cioè sulla semicirconferenza rossa in figura) vale

$$||P - C|| < ||P - A||,$$

le due curvature normali sono diverse e dunque *un toro è privo di ombelichi.* □

Si confronti questo esercizio con l'Esercizio 2.2. Dato un arco di circonferenza $\widehat{AB}$ ed una retta a ad esso complanare, che non tocca l'arco, si danno tre casi:

(1) se la retta a passa per il centro C della circonferenza cui appartiene l'arco, allora si ottiene ovviamente una porzione di sfera e tutti i punti della superfice sono ombelichi;

(2) se la retta non passa per il centro C della circonferenza ma si frappone tra arco e centro (caso dell'Esercizio 2.2) oppure è il centro ad essere tra arco e retta (caso della semicirconferenza $\mathcal{S}$ dell'Esercizio 7.1), la superfice generata è priva di ombelichi;

(3) se l'arco è compreso tra la retta a e il centro C (è il caso della semicirconferenza $\mathcal{S}'$ dell'Esercizio 7.1) i punti non sono iperbolici (o parabolici) e dunque non sono ombelichi.

OSSERVAZIONE 7.3. In un punto P ellittico di un toro l'intersezione tra piano tangente e toro si riduce al punto P. In Fig. 16 vediamo che cosa succede negli

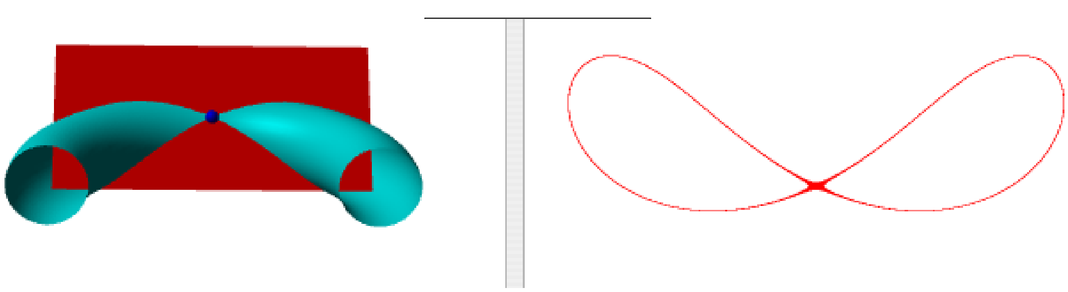

FIGURE 16. Apri il filmato per vedere muoversi il punto.

altri punti.

Esercizio 7.4. *Si consideri la superfice $\mathcal{S}$ generata dalla rotazione dell'arco $\mathcal{C}$ in Fig. 17 attorno all'asse a.*

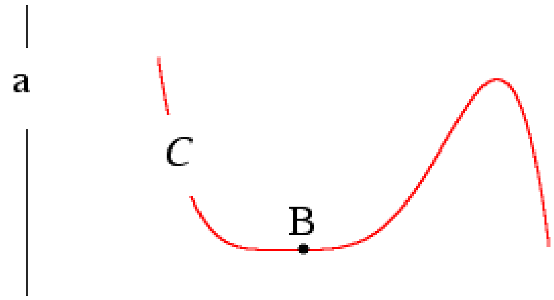

Figure 17

Detto che nel punto B la curva $\mathcal{C}$ ha curvatura nulla, si determini quali punti di $\mathcal{S}$ sono ellittici, iperbolici, parabolici o planari.

Soluzione. In un punto P di $\mathcal{S}$ le curvature principali sono le curvature normali del meridiano e del parallelo che passano per P. Poiché tutti i meridiani sono uguali tra loro possiamo limitarci a studiare i punti di un meridiano $\mathcal{M}$.

Conveniamo di scegliere in ciascun punto P il versore normale $\vec{n}_P$ alla superfice in modo che coincida con il versore normale $\vec{N}_{\mathcal{M}}(P)$ al meridiano $\mathcal{M}$ (versori rossi in Fig. 18a.). Questo è possibile perché il meridiano è una sezione normale della

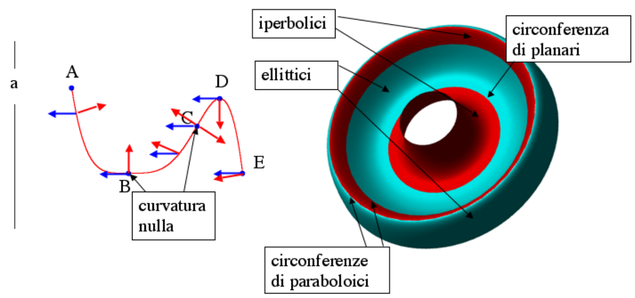

Figure 18. a - b

superfice $\mathcal{S}$ e dunque il versore $\vec{N}_{\mathcal{M}}(P)$ è normale alla superfice. Si osservi però che il punto C è di flesso e quindi il versore normale $\vec{N}_{\mathcal{M}}(C)$ non è ben definito; in C possiamo scegliere il verso del versore normale $\vec{n}_P$ come ci pare.

Ora poiché $\vec{N}_{\mathcal{M}}(P) = \vec{n}_P$, la curvatura normale del meridiano coincide con la sua curvatura e quindi *la curvatura normale $k^{(n)}_{\mathcal{M}}(P)$ è sempre positiva, tranne in B e C in cui è nulla.*

La curvatura normale del parallelo è data dal prodotto

$$k^{(n)}_{\mathcal{P}}(P) = k_{\mathcal{P}}(P)\ \vec{N}_{\mathcal{P}}(P).\vec{n}_P$$

dove (1) $k_{\mathcal{P}}(P) = \frac{1}{d}$ con d pari alla distanza di P dall'asse (raggio del parallelo) e (2) il prodotto scalare $\vec{N}_{\mathcal{P}}(P).\vec{n}_P$ è positivo, nullo o negativo a seconda che l'angolo tra i due vettori si acuto, retto od ottuso.

Ne segue che *la curvatura $k^{(n)}_{\mathcal{P}}(P)$ è positiva negli archi $\overparen{BC}$ e $\overparen{DE}$, nulla nei punti B e D, negativa negli archi $\overparen{AB}$ e $\overparen{CD}$. Infine nel punto C essa è positiva o negativa a seconda del verso che abbiamo scelto per $\vec{n}_P$.*

In conclusione negli archi $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ le curvature normali di meridiano e parallelo sono di segno discorde e dunque i punti sono iperbolici; negli archi $\widehat{BC}$ e $\widehat{DE}$ le curvature normali sono di segno concorde e quindi si tratta i punti ellittici. I punti C e D sono punti parabolici e il punto B è planare. In Fig. 18b i diversi tipi di punto sono distinti dal colore. $\square$