

## VII - Curvatura normale di una curva su una superficie

### 1. Alcuni richiami circa la curvatura di una curva

**1.1. Curvatura media di un arco.** Data una curva  $\mathcal{C}$  nello spazio, consideriamo un piccolo arco  $\widehat{AB}$  della curva. Confrontiamo l'angolo  $\theta$ , formato dai vettori tangenti  $\vec{T}_A$  e  $\vec{T}_B$  negli estremi, con la lunghezza  $L(\widehat{AB})$  dell'arco medesimo. Il rapporto

$$\frac{\theta}{L(\widehat{AB})} =: K(\widehat{AB})$$

è chiamato *curvatura media* dell'arco  $\widehat{AB}$ .

Questa definizione è appropriata perché l'angolo misura di quanto ha “girato” la curva passando da  $A$  a  $B$ , ma questo va rapportato allo spazio percorso. Ad esempio in uno svincolo autostradale posso girare di  $90^\circ$  percorrendo 500 m., mentre in una manovra di parcheggio giro di  $90^\circ$  in pochi metri; intuitivamente la mia traiettoria è molto più curva nel secondo caso. L'esempio dovrebbe suggerire la necessità di considerare il rapporto angolo/lunghezza per avere un valore ragionevole della curvatura media.

**1.2. Curvatura di una curva in un punto.** Fissato un punto  $P$  della curva  $\mathcal{C}$  consideriamo la curvatura media  $K(\widehat{AB})$  di archi  $\widehat{AB}$  molto piccoli che contengono  $P$ . Al tendere di  $A$  e  $B$  a  $P$ , il limite

$$\lim_{A, B \rightarrow P} K(\widehat{AB}) =: k_{\mathcal{C}}(P)$$

è, per definizione, la *curvatura*  $k_{\mathcal{C}}(P)$  della curva  $\mathcal{C}$  nel punto  $P$ .

Le uniche curve la cui curvatura è costante, vale a dire è la stessa in tutti i punti, sono la retta e le circonferenze. La retta ha curvatura nulla, una circonferenza ha curvatura pari al reciproco del raggio.

**1.3. Calcolo della curvatura.** Esiste una formula molto rilevante, che ci consente di calcolare effettivamente la curvatura anche in casi complessi. Descriviamo la curva  $\mathcal{C}$  come traiettoria del moto di un punto. All'istante  $t$  il punto occuperà la posizione  $P(t)$ , le cui coordinate - rispetto ad un opportuno sistema cartesiano ortogonale - sono  $x(t), y(t), z(t)$ .

Supponiamo inoltre che la velocità del moto sia costantemente unitaria<sup>1</sup>, questo significa che il vettore velocità

$$\vec{V}(t) = \frac{dP}{dt}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

ha lunghezza  $\|\vec{V}(t)\| = 1$  e dunque coincide con il versore tangente

$$\vec{T}(t) = \vec{V}(t).$$

La velocità con cui il versore tangente muta direzione, essendo fissata a priori la velocità del punto  $P(t)$ , dipende solo dalla forma della curva e ne misura intuitivamente la curvatura. In effetti come abbiamo dimostrato<sup>2</sup>

$$k(P(t)) = \left\| \frac{d\vec{T}}{dt}(t) \right\|,$$

vale a dire

*la curvatura nel punto  $P(t)$  è la velocità del versore tangente.*

**1.4. Versore normale alla curva.** Se immaginiamo di applicare il versore tangente  $\vec{T}(t)$  in un punto fisso, il secondo estremo del versore percorrerà una curva su una sfera. In Fig. 1a vediamo il punto  $P(t)$  muoversi su una curva  $\mathcal{C}$  con il suo versore tangente  $\vec{T}(t)$ , mentre in Fig. 1b vediamo il versore tangente  $\vec{T}(t)$ , il cui estremo è vincolato al centro della sfera, descrivere una curva sulla sfera. (Aperto il

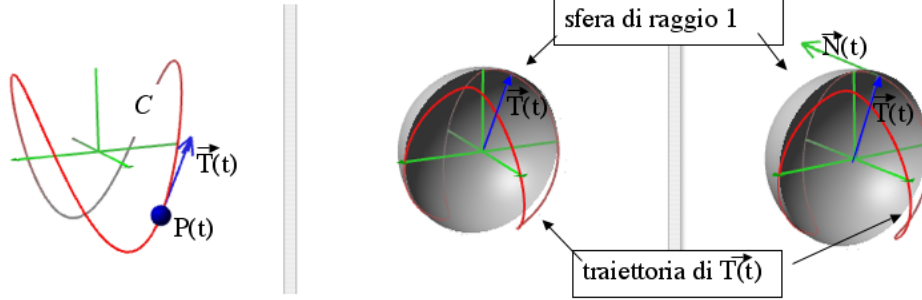


FIGURE 1. a - b - c. Apri il file per vedere il moto.

file, si noti come i due vettori, nelle due immagini, si mantengono paralleli durante il moto: in effetti si tratta dello stesso vettore applicato a sinistra in  $P(t)$ , a destra nel centro della sfera).

Così come il vettore  $\frac{dP}{dt}$  è il vettore velocità di  $P(t)$ , allo stesso modo  $\frac{d\vec{T}}{dt}(t)$  è il vettore velocità del punto  $\vec{T}(t)$  che si muove sulla sfera; pertanto  $\frac{d\vec{T}}{dt}(t)$  è tangente alla sfera e dunque perpendicolare al raggio  $\vec{T}(t)$ . Vale a dire

$$\vec{T}(t) \text{ e } \frac{d\vec{T}}{dt}(t) \text{ sono perpendicolari.}$$

<sup>1</sup>Da un punto di vista geometrico siamo interessati alla traiettoria, non ai differenti modi (differenti velocità) a cui può essere percorsa. Un modo per “depurare” la trattazione dagli aspetti fisici è quello di uniformare le velocità, assumendo che esse siano sempre unitarie.

<sup>2</sup>Corso di Geometria, Cap. V, Teorema 5.6.

Definiamo allora il versore normale (cfr. Fig. 1c) alla curva nel punto  $P(t)$ :

$$\vec{N}(t) := \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}(t)}{\|\frac{d\vec{T}}{dt}(t)\|}$$

**N.B.** che la definizione si può dare solo se il denominatore è non nullo, cioè se la curvatura all'istante  $t$  è  $\neq 0$ .

Moltiplicando membro a membro le ultime due equazioni ricaviamo

$$k(P(t)) \vec{N}(t) = \frac{d\vec{T}}{dt}(t)$$

che è la formula che conviene ricordare.

**1.5. Interpretazione fisica della curvatura.** Una particella di massa  $m$  si muove su una superficie a velocità unitaria secondo una certa traiettoria  $\mathcal{C}$ . Se la traiettoria non è rettilinea necessariamente la particella è sottoposta ad una forza<sup>3</sup>. Tale forza è per definizione massa  $\times$  accelerazione, vale a dire

$$\vec{F} = m\vec{A}$$

dove l'accelerazione è data da

$$\vec{A}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt}(t).$$

Ma nel nostro caso,  $\vec{V}(t) = \vec{T}(t)$ , quindi  $\vec{A}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt}(t) = \frac{d\vec{T}}{dt}(t) = k(P(t)) \vec{N}(t)$ . Dunque<sup>4</sup>

$$\vec{A}(t) = k(P(t)) \vec{N}(t),$$

vale a dire

*se il moto avviene a velocità unitaria l'accelerazione a cui è sottoposta la particella è in valore assoluto pari alla curvatura e diretta come il versore normale alla curva (accelerazione centripeta<sup>5</sup>).*

## 2. Versore normale ad una superficie.

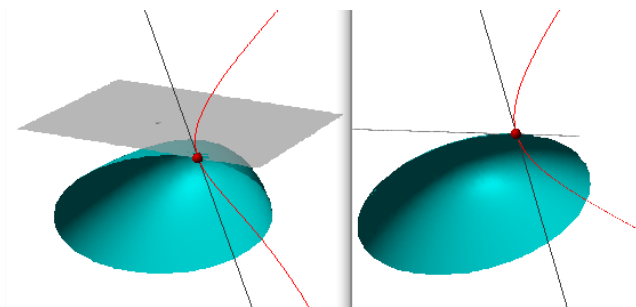


FIGURE 2

<sup>3</sup>In assenza di forze la particella è in quiete o in moto rettilineo uniforme.

<sup>4</sup>Se invece la velocità  $v$  non è costante, allora l'accelerazione è data da  $\vec{A} = kv^2 \vec{N} + \frac{dv}{dt} \vec{T}$  (cfr. Corso di Geometria Cap V, Teorema 6.2.)

<sup>5</sup>Come risulta dalla nota precedente, se la velocità non è unitaria, allora l'accelerazione centripeta deve essere moltiplicata per il quadrato della velocità; se la velocità non è costante, allora interviene una componente tangenziale dell'accelerazione.

Come abbiamo detto (cfr. Definizione ??) l'angolo tra due curve incidenti è l'angolo tra le rette tangenti alle due curve.

Analogamente l'angolo tra una superficie ed una curva, che sono incidenti in un punto  $P$ , è, per definizione, l'angolo formato dal piano tangente alla superficie in  $P$  con la retta tangente alla curva in  $P$  (cfr. Fig. 2, nell'immagine di destra, che è diversamente orientata, si può apprezzare meglio l'angolo tra retta e piano).

Dati una superficie  $\mathcal{S}$  ed un suo punto  $P$  non singolare<sup>6</sup>, esistono evidentemente due versori perpendicolari alla superficie in  $P$  (cfr. Fig. 3). Per una sfera è possibile

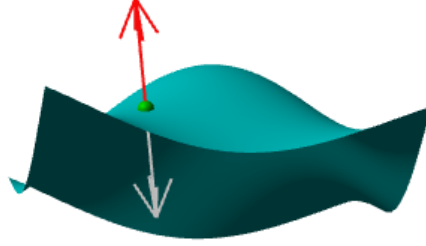


FIGURE 3. Apri il file per muovere il punto

indicare a priori una scelta, dicendo ad es. che in tutti i punti il versore normale è diretto verso l'esterno, tuttavia questo non può in generale essere fatto per una qualunque superficie. Dunque la scelta del versore normale alla superficie nel punto  $P$ , versore che indicheremo con  $\vec{n}_P$ , va fatta di volta in volta.

### 3. Curvatura normale di una curva su una superficie.

Ci proponiamo di studiare la forma di una superficie  $\mathcal{S}$ , vicino ad un suo punto  $P$ , utilizzando la curvatura delle curve che giacciono sulla superficie e passano per  $P$ . Si incontra subito una difficoltà: per  $P$  passano curve con curvatura molto diversa tra loro. Ad esempio per un punto  $P$  di una sfera di raggio  $R$  passano circonferenze, che giacciono sulla superficie sferica, di qualsivoglia curvatura  $> \frac{1}{R}$ . Per superare questa difficoltà conviene introdurre, per una curva  $\mathcal{C}$  che giace su  $\mathcal{S}$  e passa per  $P$ , la nozione di *curvatura normale (alla superficie)* nel punto  $P$ .

*Data una curva  $\mathcal{C}$  che giace su una superficie  $\mathcal{S}$  e passa per un punto  $P$ , scelto un versore normale  $\vec{n}_P$  alla superficie in  $P$ , definiamo la curvatura normale  $k_{\mathcal{C}}^{(n)}(P)$  della curva  $\mathcal{C}$  nel punto  $P$ :*

$$k_{\mathcal{C}}^{(n)}(P) := k_{\mathcal{C}}(P) \vec{N}_{\mathcal{C}} \cdot \vec{n}_P.$$

Esaminiamo il significato della formula. Poiché il versore  $\vec{N}_{\mathcal{C}}$  normale alla curva e il versore  $\vec{n}_P$  normale alla superficie sono, per l'appunto versori, il loro prodotto scalare è semplicemente

$$\vec{N}_{\mathcal{C}} \cdot \vec{n}_P = \cos \theta$$

dove  $\theta$  è l'angolo da essi formato. Dunque la curvatura normale è data da

$$k_{\mathcal{C}}^{(n)}(P) := k_{\mathcal{C}}(P) \cos \theta.$$

<sup>6</sup>Cioè per cui esiste il piano tangente  $\tau_P$  alla superficie.

**N.B.**

(1) Se si cambia la scelta del versore normale, esso cambia di segno e dunque anche la curvatura normale cambia di segno.

(2) Se la curvatura  $k_C(P) = 0$ , allora non è definito  $\vec{N}_C$  in  $P$ . In tal caso si pone, per definizione

$$k_C^{(n)}(P) = 0.$$

**ESERCIZIO 3.1.** Sia  $S$  una sfera e  $C$  la circonferenza ottenuta tagliando la sfera con un piano (cfr. Fig. 4). Conveniamo di prendere il versore normale alla sfera di-

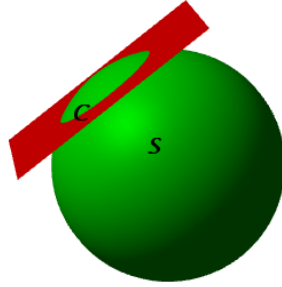


FIGURE 4

retto verso l'interno. Calcolare la curvatura normale della circonferenza  $C$  sapendo che la sfera  $S$  ha raggio  $R$  e che la circonferenza  $C$  ha raggio  $r$ .

Soluzione. La curvatura normale  $k_C^{(n)}(P)$  della circonferenza  $C$  in un suo qualunque punto è data dalla formula

$$k_C^{(n)}(P) = k_C \vec{N}_C \cdot \vec{n}_P,$$

dove  $k_C$  è la curvatura della circonferenza, che sappiamo essere  $1/r$  (non dipende dal punto). Mentre il prodotto scalare  $\vec{N}_C \cdot \vec{n}_P = \cos \theta$ , dove  $\theta$  è l'angolo tra il versore normale  $\vec{N}_C$  alla circonferenza e il versore normale  $\vec{n}_P$  alla sfera in  $P$ . Rappresentiamo la situazione in Fig. 5a evidenziando il versore normale alla circonferenza

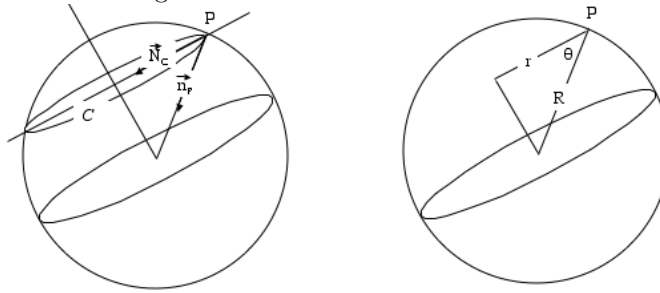


FIGURE 5. a - b

che è diretto verso il centro della stessa. Dalla Fig. 5b si evince che l'angolo  $\theta$  tra i due versori soddisfa:

$$R \cos \theta = r.$$

Pertanto

$$k_C^{(n)}(P) = k_C(P) \vec{N}_C \cdot \vec{n}_P = \frac{1}{r} \cos \theta = \frac{1}{R}.$$

Il risultato è interessante:

*la curvatura normale di una circonferenza su una sfera non dipende nè dal punto in cui è calcolata, nè dalla circonferenza ed è pari al reciproco del raggio della sfera.*

□

#### 4. Interpretazione fisica della curvatura normale.

Immaginiamo di avere costruito una superficie di vetro a due strati e che nella piccola intercapedine tra i due strati si muova una particella. Supponiamo che il moto della particella sia causato da una forza tangenziale alla superficie (ad es. mettiamo del liquido nell'intercapedine e provochiamo un moto nel liquido che a sua volta muove la particella). Per semplicità supponiamo che la velocità della particella sia unitaria e che la massa sia 1, in modo che forze e accelerazioni coincidano. Se la traiettoria non è rettilinea, allora necessariamente sulla particella agisce un'accelerazione che è data da (cfr. §1.5)

$$\vec{A}(t) = k_C(P(t)) \vec{N}_C(t).$$

Dunque l'accelerazione  $\vec{A}$  è diretta come il versore normale alla curva (è importante capire che dalla conoscenza della traiettoria e della velocità possiamo ricostruire quale sia l'accelerazione che agisce sulla particella). Da chi è causata questa accelerazione? Dall'accelerazione  $A_1$  dovuta alla spinta del liquido e diretta tangenzialmente alla superficie e dall'accelerazione  $A_2$  diretta perpendicolarmente alla superficie e dovuta al vincolo. Dunque

$$\vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \vec{A}.$$

Come si vede in Fig. 6  $\vec{A}_2$  è la proiezione  $\vec{A} \cdot \vec{n}_P$  di  $\vec{A}$  sulla normale alla superficie,

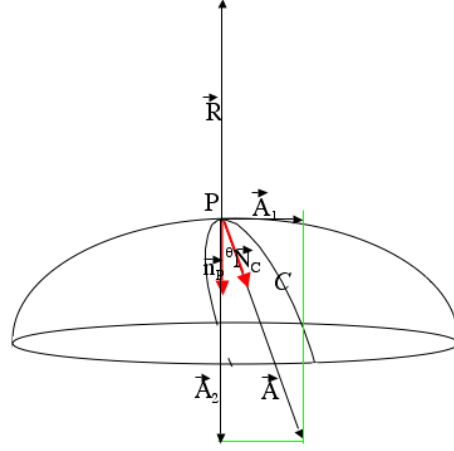


FIGURE 6

quindi

$$\vec{A}_2 = (\vec{A} \cdot \vec{n}_P) \vec{n}_P = (k_C(P(t)) \vec{N}_C(t) \cdot \vec{n}_P) \vec{n}_P = k_C^{(n)}(P(t)) \vec{n}_P.$$

Questo significa che il vincolo a stare tra le due superfici agisce in direzione normale alla superficie con un'intensità pari alla curvatura normale. Uguale ed opposta a questa è la reazione vincolare (il vettore  $\vec{R}$  in figura), cioè la forza esercitata dalla particella sulla superficie di vetro. In conclusione:

*se una particella di massa unitaria è vincolata a muoversi su una superficie, il moto avviene a velocità unitaria ed è causato da una forza tangenziale alla superficie, allora la curvatura normale è pari alla forza esercitata dalla particella sul vincolo*

Dovrebbe essere evidente che se la superficie è un paraboloide iperbolico e la traiettoria della particella è la curva rossa (rispettivamente blu) in Fig. 7 allora la

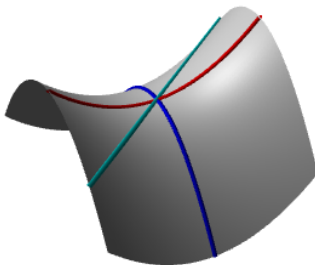


FIGURE 7

forza esercitata dalla particella sulla superficie è diretta verso il basso (risp. l'alto). Mentre se la particella si muove lungo la retta, che ha curvatura nulla, la relativa curvatura normale è nulla e quindi la particella non esercita nessuna forza sulla superficie.

### 5. La curvatura normale dipende solo dalla direzione tangente

Veniamo a un primo importante risultato:

**TEOREMA 5.1.** *Siano dati una superficie  $S$ , un suo punto  $P$  non singolare ed una retta tangente  $t$  alla superficie nel punto  $P$ . Tutte le curve che giacciono sulla superficie e passano per  $P$ , con tangente  $t$ , hanno la medesima curvatura normale nel punto  $P$ .*

Dimostrazione. Fissiamo un versore normale  $\vec{n}_P$  alla superficie in  $P$ . Sarà necessario qualche calcolo e perciò conviene scegliere un opportuno sistema di coordinate. Prendiamo il punto  $P$  come origine, gli assi  $x$  ed  $y$  sul piano  $\tau_P$  tangente alla superficie e l'asse delle  $z$  diretto come il versore normale  $\vec{n}_P$  (vedi Fig. 8).

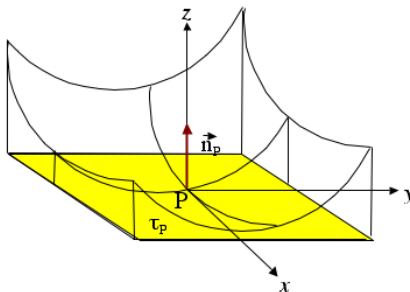


FIGURE 8

È ragionevole pensare che se  $Q$  è un punto, del piano tangente, sufficientemente vicino a  $P$ , allora sulla perpendicolare al piano condotta per  $Q$  ci sia uno ed un solo punto della superficie, almeno vicino a  $P$ . Questo perché il piano tangente, in una regione molto vicino a  $P$ , è, per

definizione, indistinguibile dalla superficie<sup>7</sup>. Si osservi anche che lontano dal piano tangente ci possono essere altri punti sulla perpendicolare condotta da  $Q$  come mostra la Fig. 9 . Dunque

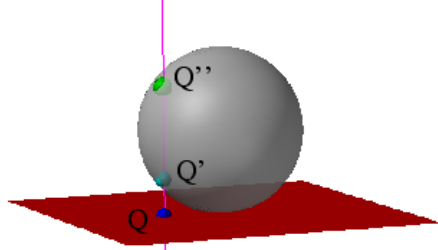


FIGURE 9

possiamo associare a ciascun punto  $Q$  di coordinate  $(x, y, 0)$  un unico punto  $Q'$  che sta sulla verticale di  $Q$  (pensiamo il piano  $xy$  come orizzontale) che avrà coordinante  $(x, y, f(x, y))$ . In altri termini stiamo descrivendo la superficie come grafico di una funzione

$$z = f(x, y).$$

Poiché i punti della superficie sono della forma  $(x, y, f(x, y))$ , una curva  $\mathcal{C}$  che giace sulla superficie e passa per  $P$ , può essere descritta dal moto di un punto con coordinate

$$P(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$$

dove  $x(0) = y(0) = 0$  (l'ultima condizione significa che all'istante 0 la curva passa per  $P$ ).

Calcoliamo il vettore velocità:

$$\vec{V}(t) = (\dot{x}, \dot{y}, f_x \dot{x} + f_y \dot{y}).$$

Si tratta di un vettore tangente alla superficie e dunque per  $t = 0$  deve stare sul piano  $xy$ , vale a dire la terza coordinata è nulla, cioè

$$(f_x \dot{x} + f_y \dot{y})|_{t=0} = 0.$$

Ma  $\dot{x}, \dot{y}$  sono le componenti del vettore tangente, che può essere qualsiasi, dunque

$$(5.1) \quad f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0.$$

Supponiamo che la velocità di  $P(t)$  sia unitaria, allora  $\vec{V}(t) = \vec{T}(t)$  e quindi

$$(5.2) \quad \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} = (\ddot{x}, \ddot{y}, f_{xx}\dot{x}^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}\dot{y}^2 + f_x\ddot{x} + f_y\ddot{y}).$$

Ma  $k_{\mathcal{C}}(P)\vec{N}_{\mathcal{C}} = \frac{d\vec{T}}{dt}|_{t=0}$  e, calcolando (5.2) nell'origine e usando (5.1), resta solo

$$k_{\mathcal{C}}(P)\vec{N}_{\mathcal{C}} = \frac{d\vec{T}}{dt}|_{t=0} = (\ddot{x}, \ddot{y}, f_{xx}\dot{x}^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}\dot{y}^2).$$

Ora il versore  $\vec{n}_P = (0, 0, 1)$ , quindi

$$k_{\mathcal{C}}^{(n)}(P) = k_{\mathcal{C}}(P)\vec{N}_{\mathcal{C}} \cdot \vec{n}_P = f_{xx}\dot{x}^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}\dot{y}^2.$$

Questa espressione dipende dalle derivate  $f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$  che dipendono dunque dalla superficie e dalle derivate  $\dot{x}, \dot{y}$  che coinvolgono solo la direzione tangente e non la curva stessa.  $\square$

**ESERCIZIO 5.2.** *Spiegare perché, data una curva  $\mathcal{C}$  che giace su una superficie  $\mathcal{S}$  e passa per un punto  $P$ , la curvatura normale  $k_{\mathcal{C}}^{(n)}(P)$  non dipende dalla curva ma dalla direzione tangente alla curva in  $P$ .*

<sup>7</sup>L'esempio della tazzina da caffè (Esercizio ??) mostra che questo non è vero se il punto  $P$  è singolare



Soluzione. La curvatura normale è data dalla formula

$$k_C^{(n)}(P) = k_C(P) \vec{N}_C \cdot \vec{n}_P,$$

dove

$$k_C(P) \vec{N}_C = \frac{d\vec{T}}{dt}.$$

Prendendo in modo opportuno le coordinate è possibile descrivere la superficie come grafico di una funzione  $z = f(x, y)$ , dove il piano  $xy$  coincide con il piano tangente. Un calcolo permette di concludere che

$$k_C^{(n)}(P) = f_{xx}\dot{x}^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}\dot{y}^2,$$

dove  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  sono le componenti del versore tangente alla curva nel punto  $P$  e  $f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$  sono le derivate seconde di  $f$  nel punto. Se ne ricava che la curvatura normale dipende da come è fatta la superficie (cioè dalla funzione  $f$ ) e dalla direzione tangente alla curva.  $\square$

Vale la pena di fare una piccola osservazione. Data una superficie  $\mathcal{S}$  ed un suo punto  $P$ , non singolare, fissiamo un versore normale  $\vec{n}_P$  alla superficie in  $P$ . Consideriamo il fascio di piani  $\mathcal{F}$  che ha per asse la retta normale alla superficie. Ciascuno di questi piani taglia sul piano tangente una retta tangente per  $P$  e sulla superficie una curva. In Fig. 10 vediamo un piano  $\alpha$  del fascio che taglia sul piano tangente

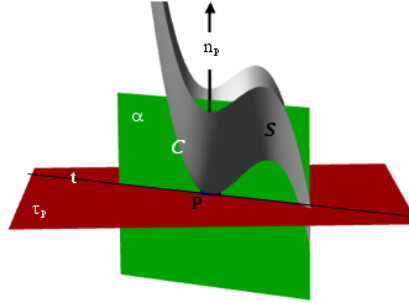


FIGURE 10. Apri il file per vedere il piano muoversi.

$\tau_P$  la retta  $t$  e sulla superficie  $\mathcal{S}$  la curva  $\mathcal{C}$ . Poiché il fascio  $\mathcal{F}$  è il fascio dei piani per  $P$  perpendicolari al piano tangente, le curve così ottenute si chiamano *sezioni normali* della superficie  $\mathcal{S}$  in  $P$ .

Il versore  $\vec{N}_C$  normale ad una sezione normale  $\mathcal{C}$  ha la stessa direzione del versore  $\vec{n}_P$  normale alla superficie, cioè

$$\vec{N}_C = \pm \vec{n}_P.$$

Infatti  $\vec{N}_C$  giace, come la curva  $\mathcal{C}$ , sul piano  $\alpha$  ed è perpendicolare alla retta  $t$  che è tangente alla curva.

Dunque

$$k_C^{(n)}(P) = k_C(P) \vec{N}_C \cdot \vec{n}_P = \pm k_C(P).$$

Ricordo che il versore  $\vec{N}_C$  è sempre diretto verso la concavità della curva, quindi:

*per le sezioni normali di una superficie in un punto  $P$  la curvatura normale e la curvatura sono uguali a meno del segno; precisamente sono uguali se il versore normale alla superficie è rivolto verso la concavità della curva, altrimenti sono opposte.*

**ESERCIZIO 5.3.** Abbiamo visto, vedi Esercizio 3.1 che la curvatura normale di una circonferenza tagliata da un piano su una sfera  $\mathcal{S}$  dipende solo dal raggio della sfera. Cosa ne possiamo dedurre circa la curvatura normale di una qualunque curva sulla sfera  $\mathcal{S}$ ?

Soluzione. Prendiamo una curva  $\mathcal{C}$  sulla sfera  $\mathcal{S}$  e fissiamo un punto  $P$  di  $\mathcal{C}$ .

Sia  $t$  la retta tangente alla curva  $\mathcal{C}$  nel punto  $P$ . Consideriamo un qualunque piano  $\alpha$  passante per  $t$  e diverso dal piano tangente  $\tau_P$  alla sfera in  $P$ . Tale piano  $\alpha$  taglia sulla sfera una circonferenza  $\mathcal{C}'$  che è tangente alla retta  $t$  (vedi Fig. 11).

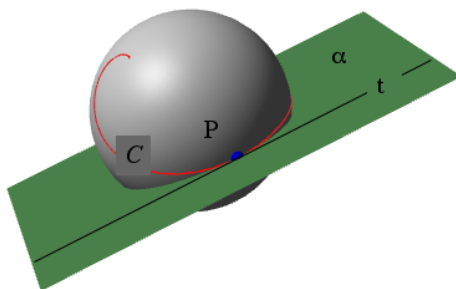


FIGURE 11

Le curve  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  giacciono entrambe sulla sfera  $\mathcal{S}$  e hanno nel punto  $P$  la stessa tangente, dunque possiedono la stessa curvatura normale.

Concludo che

*tutte le curve che giacciono sulla sfera  $\mathcal{S}$  hanno la stessa curvatura normale in ogni punto, pari al reciproco del raggio della sfera.*

In particolare un punto che si muove sulla faccia interna di una superficie sferica, a velocità unitaria, e che è sottoposto ad una forza viva tangenziale, esercita sulla superficie una pressione costante che non dipende dalla traiettoria da esso seguita.  $\square$

**ESERCIZIO 5.4.** Data una superficie di rotazione, calcolare la curvatura normale dei meridiani.

Soluzione. Sia  $P$  un punto della superficie di rotazione  $\mathcal{S}$ .

Il meridiano  $\mathcal{M}$ , passante per  $P$  giace, per definizione, sul piano  $\alpha$  che contiene l'asse  $a$  di rotazione e il punto  $P$  (cfr. Fig. 12).

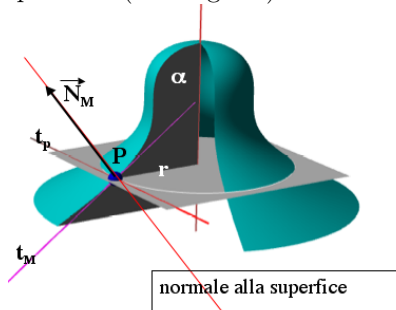


FIGURE 12

Il piano  $\alpha$  è un piano di simmetria di  $\mathcal{S}$ , dunque il versore normale  $\vec{n}_P$  giace su  $\alpha$  (altrimenti  $\vec{n}_P$  e il suo simmetrico, rispetto ad  $\alpha$ , sarebbero due versori normali non paralleli).

Allora  $\alpha$  è perpendicolare alla superficie e quindi il meridiano  $\mathcal{M}$  è una sezione normale, pertanto

$$k_{\mathcal{M}}^{(n)}(P) = \pm k_{\mathcal{M}}(P)$$

a seconda che il versore normale  $\vec{n}_P$  sia stato scelto con verso concorde o discorde con quello del versore normale  $\vec{N}_{\mathcal{M}}(P)$ . Quest'ultimo è diretto verso la concavità del meridiano, dunque

*curvatura normale e curvatura del meridiano coincidono a meno del segno. Precisamente se il versore normale  $\vec{n}_P$  è rivolto verso la concavità del meridiano  $\mathcal{M}$ , allora  $k_{\mathcal{M}}^{(n)}(P) = k_{\mathcal{M}}(P)$ ; in caso contrario  $k_{\mathcal{M}}^{(n)}(P) = -k_{\mathcal{M}}(P)$ .*

□

**ESERCIZIO 5.5.** *Data una superficie di rotazione, calcolare la curvatura normale dei paralleli.*

**Soluzione.** Si consideri la Fig. 13. A sinistra è rappresentata la sezione, della figura

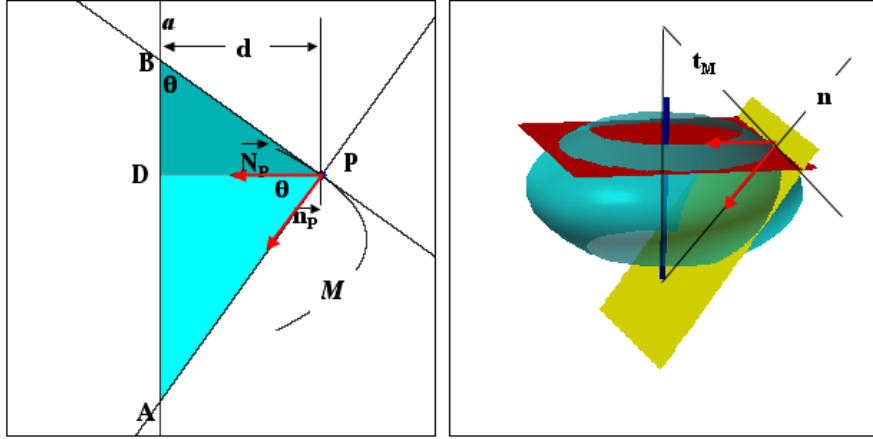


FIGURE 13

di destra, con il piano che passa per l'asse di rotazione e per il punto  $P$ . Sia  $d$  la distanza di  $P$  dall'asse, allora il parallelo  $\mathcal{P}$  passante per  $P$  è una circonferenza di raggio  $d$ ; dunque la curvatura  $k_{\mathcal{P}}$  del parallelo è  $1/d$ . La curvatura normale del parallelo è data dalla formula

$$k_{\mathcal{P}}^{(n)} = k_{\mathcal{P}} \vec{N}_{\mathcal{P}} \cdot \vec{n}_P = \frac{\cos \theta}{d},$$

ove  $\theta$  è l'angolo tra i versori normale alla curva e normale alla superficie.

Può essere preferibile vedere  $\theta$  come l'angolo tra la tangente e l'asse, i due ovviamente coincidono.

Per dare un senso intuitivo alla formula, si osservi che

$$\|A - P\| \cos \theta = d;$$

quindi

$$k_{\mathcal{P}}^{(n)} = \frac{\cos \theta}{d} = \frac{1}{\|A - P\|}.$$

Dunque

*la curvatura normale del parallelo che passa per  $P$  è la curvatura di una circonferenza che passa per  $P$  e ha centro sull'asse di rotazione nel punto  $(A)$  in cui questa è tagliata dalla normale al meridiano.*

□

## 6. Curvature normali in un punto di una superficie.

**6.1. Enunciato del teorema fondamentale.** Data una superficie  $\mathcal{S}$  ed un suo punto  $P$ , non singolare, fissiamo un versore normale  $\vec{n}_P$  alla superficie.

Ora consideriamo una curva  $\mathcal{C}$  che giace sulla superficie e passa per  $P$ . Come sappiamo (Teorema 5.1) la sua curvatura normale  $k_{\mathcal{C}}^{(n)}(P)$  in  $P$  dipende solo dalla retta  $t$ , tangente alla curva in  $P$ . Vale a dire  $\mathcal{C}$  ha la stessa curvatura normale (in  $P$ ) della sezione normale  $\mathcal{C}'$  ottenuta sezionando la superficie  $\mathcal{S}$  con il piano  $\alpha$  perpendicolare ad  $\mathcal{S}$  in  $P$  e che passa per  $t$ . In altri termini se vogliamo considerare tutte le possibili curvature normali in  $P$  non è necessario considerare tutte le possibili curve della superficie che passano per  $P$ , ma è sufficiente considerare solo le sezioni normali:

*ad ogni retta tangente  $t$  ad  $\mathcal{S}$  in  $P$  corrisponde una sezione normale  $\mathcal{C}$  la cui curvatura normale  $k_{\mathcal{C}}^{(n)}(P)$  dipende solo da  $t$ , pertanto talvolta la indicheremo con  $k_t^{(n)}$ .*

La cosa rilevante che vogliamo illustrare è che la funzione

$$t \mapsto k_t^{(n)}$$

che associa ad ogni direzione tangente in  $P$  la corrispondente curvatura normale gode di particolari proprietà. Cominciamo con il seguente teorema fondamentale:

**TEOREMA 6.1.** (Teorema fondamentale sulle curvature normali in un punto di una superficie). *In un punto  $P$  di una superficie*

• *tutte le curvature normali sono uguali, nel qual caso il punto  $P$  si dice ombelico*

*oppure*

• *le possibili curvature normali variano tra due valori, un valore minimo ed uno massimo. In tal caso esiste un'unica direzione in cui la curvatura normale è massima ed un'unica direzione in cui la curvatura normale è minima e queste due direzioni, dette direzioni principali, sono tra loro perpendicolari.*

*Le curvature delle direzioni principali - vale a dire i valori massimo e minimo - sono altresì dette curvature principali.*

**6.2. Dimostrazione del Teorema 6.1.** Ci serve il seguente lemma la cui dimostrazione è un calcolo algebrico elementare.

LEMMA 6.2. *La superficie di equazione*

$$(6.1) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = z$$

è - a seconda di come sono i coefficienti  $A, B, C$  - un piano, un paraboloide ellittico o iperbolico, un cilindro parabolico.

Dimostrazione del Lemma. Se  $A = B = C = 0$ , l'equazione (5.2) diventa:  $z = 0$  e rappresenta un piano.

Se  $A = C = 0$  e  $B \neq 0$ , allora resta

$$2Bxy = z$$

che (cfr. dimostrazione del Teorema ??) è l'equazione di un **paraboloide iperbolico**.

Altrimenti, considerato che nell'equazione (6.1)  $x$  ed  $y$  svolgono lo stesso ruolo, possiamo supporre  $A \neq 0$  e quindi scrivere

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A\left(x + \frac{By}{A}\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)y^2.$$

Allora considerando la trasformazione affine

$$\begin{cases} x' = x + \frac{By}{A} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

l'equazione (6.1) diventa:

$$(6.2) \quad Ax'^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)y'^2 = z'.$$

Quest'ultima equazione

- se  $A$  e  $(C - \frac{B^2}{A})$  hanno lo stesso segno rappresenta un **paraboloide ellittico** (cfr. Proposizione ??);
- se  $A$  e  $(C - \frac{B^2}{A})$  hanno segno opposto rappresenta un **paraboloide iperbolico** (cfr. Proposizione ??);
- se  $(C - \frac{B^2}{A}) = 0$  resta  $Ax^2 = z$  che rappresenta un **cilindro parabolico** (cfr. Fig. 14).

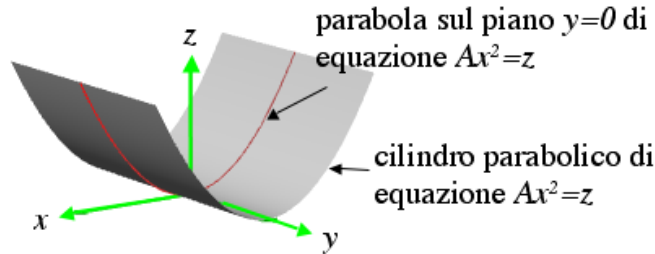


FIGURE 14

Si noti che la trasformazione affine che abbiamo considerato lascia invariata la variabile  $z$  e quindi piani verticali vanno in piani verticali e piani orizzontali in piani orizzontali. Ne segue che ad es. nel caso del paraboloide ellittico, le sezioni orizzontali dopo la trasformazione affine sono ellissi e quindi lo erano anche prima e le sezioni verticali, che sono parabole, lo erano anche prima della trasformazione, dunque la superficie era, prima della trasformazione affine, un paraboloide ellittico<sup>8</sup>.

La conclusione è che sono possibili solo i 4 casi previsti nell'enunciato.  $\square$

<sup>8</sup>Questo risultato corrisponde ad un fatto più generale che non abbiamo dimostrato: le trasformazioni affini mandano quadriche in quadriche senza alterarne il tipo, quindi parabolidi ellittici in parabolidi ellittici ecc.

Possiamo così passare alla

**PRIMA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 6.1. Primo passo: riformuliamo la soluzione dell'Esercizio 5.2.** Prendiamo coordinate cartesiane con origine in  $P$ , assi  $x$  ed  $y$  sul piano tangente  $\tau_P$  e asse  $z$  orientato come il versore normale  $\vec{n}_P$ .

Allora la curvatura normale  $k_C^{(n)}(P)$  di una curva  $C$  che giace su  $\mathcal{S}$  e passa per  $P$  con versore tangente  $(x, y)$  è, per l'Esercizio 5.2,

$$k_C^{(n)}(P) = f_{xx}x^2 + 2f_{xy}xy + f_{yy}y^2.$$

Notato che il punto  $(x, y)$  si trova sulla circonferenza unità<sup>9</sup>  $\mathcal{U}$  del piano tangente, possiamo riformulare diversamente la questione.

Sia  $t$  una retta tangente in  $P$  alla superficie  $\mathcal{S}$ . La curvatura normale  $k_t^{(n)}$  nella direzione  $t$  è, per definizione, la curvatura normale  $k_C^{(n)}$  della corrispondente sezione normale  $C$ . Le rette  $t$  taglia (cfr. Fig. 15) la circonferenza unità  $\mathcal{U}$  in

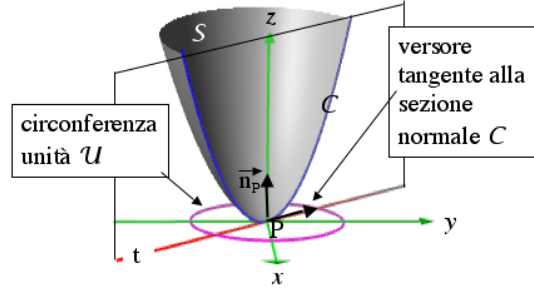


FIGURE 15

due punti diametralmente opposti:  $(x, y)$  e  $(-x, -y)$ . Poiché versore direzione di  $t$  e versore tangente della sezione normale  $C$  coincidono,  $(x, y)$  oppure  $(-x, -y)$  (dipende dal verso di percorrenza di  $C$ ) sono le coordinate del versore tangente a  $C$ . Ne concludiamo che

$$(6.3) \quad k_t^{(n)} = k_C^{(n)}(P) = f_{xx}x^2 + 2f_{xy}xy + f_{yy}y^2.$$

Il significato della formula (6.3) è:

*introdotta la funzione ausiliaria*

$$h(x, y) := f_{xx}x^2 + 2f_{xy}xy + f_{yy}y^2,$$

*la curvatura normale  $k_t^{(n)}$  della retta tangente  $t$  che passa per  $(x, y) \in \mathcal{U}$  è esattamente  $h(x, y)$ .*

**Secondo passo: comprendiamo geometricamente il significato della funzione ausiliaria  $h$ .** Si consideri la Fig. 16a. In essa è rappresentata la circonferenza unità  $\mathcal{U}$  e il grafico di una funzione (non è proprio  $h$ , ma solo un esempio); la retta  $t$  taglia la circonferenza unità in due punti diametralmente opposti ( $Q$  ed  $R$ ) sulla cui verticale stanno due punti ( $Q'$  e  $R'$ ) della superficie. Questi ultimi, al variare della retta  $t$ , descrivono la curva  $\mathcal{K}$  che non è altro che l'intersezione del grafico di  $h$  con il cilindro verticale (vedi Fig. 16b) costruito sopra la circonferenza  $\mathcal{U}$ . Il fatto decisivo è che la curvatura normale  $k_t^{(n)}$  della direzione  $t$  è la quota di  $Q'$  e di  $R'$ .

<sup>9</sup>Cioè la circonferenza con centro l'origine e raggio 1

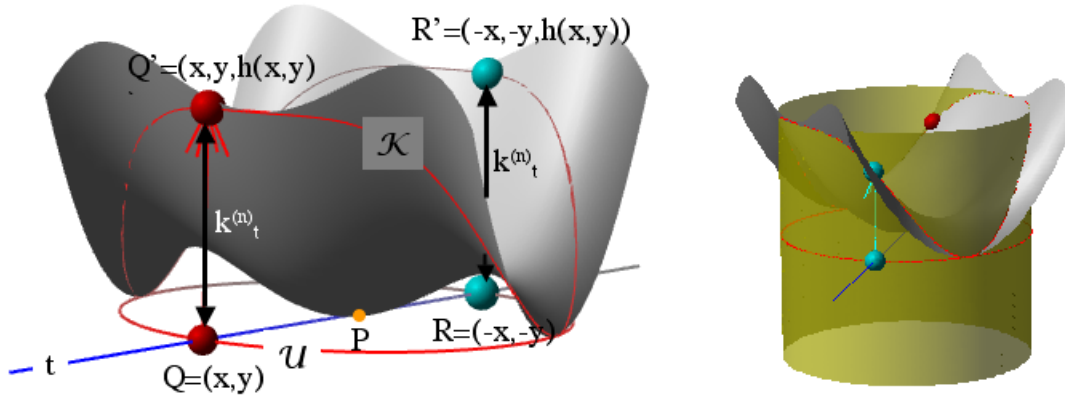


FIGURE 16. a - b. Apri il file per vedere la retta ruotare

**Ultimo passo: studio della superficie grafico della funzione  $h$ .** Per il Lemma 6.2 ci sono 4 possibilità:

- (1) il grafico della funzione  $h$  è il piano  $z = 0$  (cioè il piano tangente in  $P$ ). La curva  $\mathcal{K}$  coincide con la circonferenza unità  $\mathcal{U}$  e questo significa che, per ogni retta  $t$ , la curvatura normale  $k_t^{(n)}$  è nulla e il punto  $P$  è un ombelico.
- (2) il grafico della funzione  $h$  è un paraboloide ellittico. In Fig. 17 vediamo

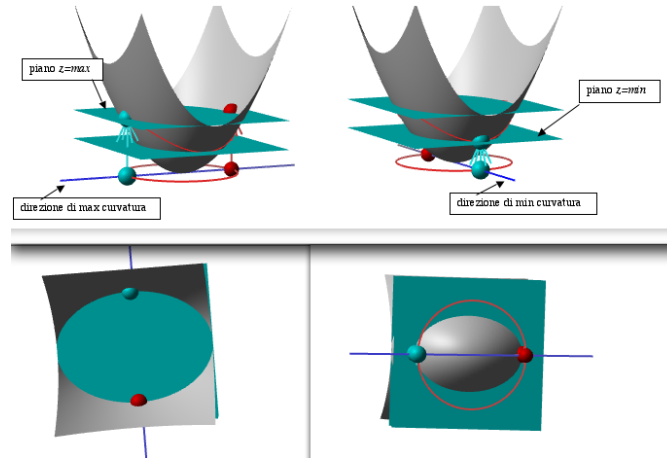


FIGURE 17. Apri i files per vedere ruotare la retta

riprodotta la stessa situazione di Fig. 16 nel caso particolare in cui il grafico di  $h$  è un paraboloide ellittico. In particolare si riconosce che la curva  $\mathcal{K}$  presenta due punti di massima quota e due punti di minima quota e ciascuna coppia di punti è diametralmente opposta. Dunque c'è un'unica direzione di massimo ed un'unica direzione di minimo. Nelle due immagini inferiori di Fig. 17 vediamo una vista dall'alto e una vista dal basso dello stesso oggetto; esse mostrano come le direzioni di massimo e di minimo siano quelle degli assi delle ellissi che i piani orizzontali tagliano sul paraboloide ellittico. Dunque esse sono perpendicolari tra loro.

Si può anche ragionare diversamente. La Fig. 18a; è una pianta grafico di  $h$  in cui sono evidenziate in rosso le curve di livello. Esse sono le ellissi  $\mathcal{E}_c$  tagliate

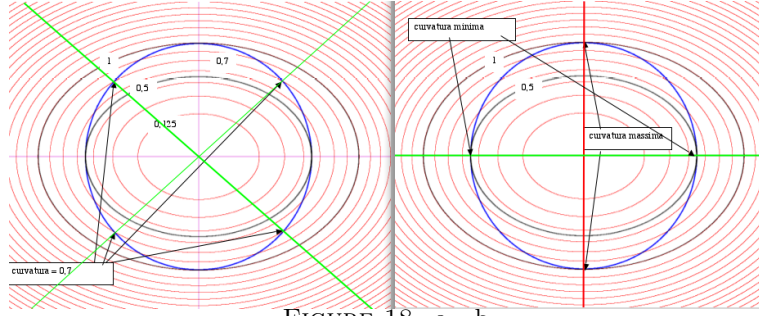


FIGURE 18. a - b

sul paraboloide ellittico dai piani  $z = c$  (ovviamente  $c > 0$ ). In particolare la circonferenza  $\mathcal{U}$  (in blu) taglia l'ellisse  $\mathcal{E}_{0,7}$  in 4 punti che individuano due rette incidenti nell'origine (rette verdi). In Fig. 18b si vede che le ellissi  $\mathcal{E}_c$  incontrano la circonferenza unità solo per valori di  $c$  compresi tra 0,5 e 1. I valori numerici dipendono dall'esempio rappresentato in figura, tuttavia un dato è evidente: la circonferenza unità  $\mathcal{U}$  taglia le ellissi  $\mathcal{E}_c$  quando  $c$  è compreso tra due valori  $0 < c_{min} < c_{max}$ ; in tal caso i punti di intersezione sono 4 e corrispondono a due rette la cui curvatura normale  $k_t^{(n)}$  è proprio  $c$ . Invece  $\mathcal{U}$  interseca l'ellisse  $\mathcal{E}_{c_{min}}$  in due soli punti (che individuano la direzione di curvatura minima) e l'ellisse  $\mathcal{E}_{c_{max}}$  in due soli punti (che individuano la direzione di curvatura massima). Inoltre la figura mostra che le direzioni di massimo e di minimo corrispondono rispettivamente agli assi minore e maggiore delle ellissi e quindi sono tra loro perpendicolari.

Se il paraboloide ellittico è di rotazione, allora la curva  $\mathcal{K}$  è una circonferenza e tutte le curvature normali nel punto sono uguali tra loro e il punto è un ombelico.

(3) il grafico della funzione  $h$  è un paraboloide iperbolico. La Fig. 19 è l'analogo

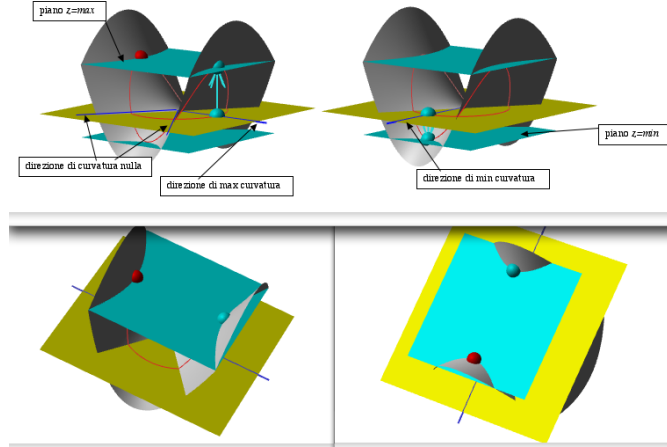


FIGURE 19. Apri i files per vedere ruotare la retta

della Fig. 17 nel caso in cui il grafico di  $h$  sia un paraboloide iperbolico. In particolare si riconosce che la curva  $\mathcal{K}$  presenta due punti di massima quota e due punti di minima quota e ciascuna coppia di punti è diametralmente opposta. Dunque c'è un'unica direzione di massimo ed un'unica direzione di minimo. Nelle due immagini inferiori di Fig. 19 vediamo una vista dall'alto e una vista dal basso dello stesso oggetto; esse mostrano come le direzioni di massimo e di minimo passino



per i vertici delle iperboli che i piani orizzontali tagliano sul paraboloide parabolico. Dunque esse sono perpendicolari tra loro.

Di nuovo possiamo usare l'argomento delle curve di livello (cfr. Fig. 20). Esse

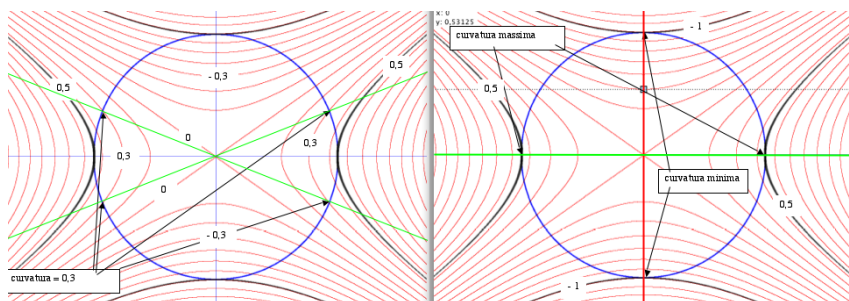


FIGURE 20. a - b

sono delle iperboli  $\mathcal{I}_c$  con  $c$  che può assumere anche valori negativi. Per  $c = 0$  abbiamo due rette (gli asintoti di tutte le iperboli); per  $c < 0$  otteniamo le iperboli che sono negli angoli sotto e sopra gli asintoti sono negative, per  $c > 0$  le iperboli che sono comprese nelle due angoli a lato degli asintoti<sup>10</sup>. Ci sono due valori  $m < 0 < M$  tali che le iperboli  $\mathcal{I}_c$  con  $m < c < M$  tagliano la circonferenza  $\mathcal{U}$  in 4 punti ed individuano due direzioni tangenti che hanno curvatura normale  $c$ . Invece le iperboli  $\mathcal{I}_m$  e  $\mathcal{I}_M$  sono tangenti a  $\mathcal{U}$  ed individuano ciascuna una sola direzione. Sono le due direzioni principali, che corrispondono agli assi delle iperboli e quindi sono tra loro perpendicolari.

(4) il grafico della funzione  $h$  è un cilindro parabolico. La Fig. 21 è l'analogo

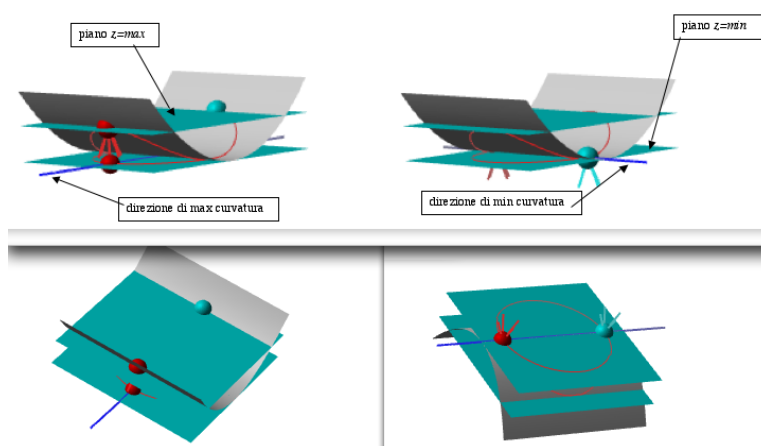


FIGURE 21. Apri i files per vedere ruotare la retta

della Fig. 17 nel caso (4). Come si vede dalle due figure di sotto la direzione di minimo è quella delle generatrici del cilindro mentre quella di massimo è ad essa perpendicolare.

Anche nel caso (4), possiamo trattare il problema per mezzo delle curve di livello del cilindro parabolico (cfr. Fig. 22) che sono coppie di rette parallele,

<sup>10</sup>Il centro delle iperboli è un passo di montagna. Muovendosi verso nord o verso sud si scende in valle, verso est o verso ovest si sale in montagna.

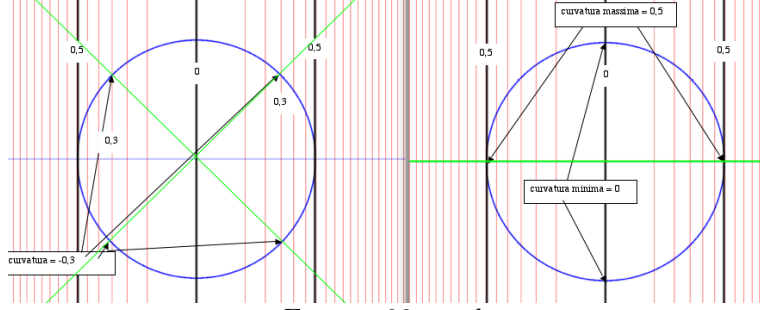


FIGURE 22. a - b

tranne per la sezione  $z = 0$  che è un'unica retta. Qui ci sono due valori 0 ed  $M > 0$  per cui se  $0 < c < M$  allora  $\mathcal{U}$  taglia la coppia di rette parallele in 4 punti e restano individuate due direzioni tangenti con curvatura normale  $c$ . Se invece  $c = 0$  (risp.  $c = M$ ) di direzioni ne resta individuata una sola (cfr. Fig. 22b); si tratta delle direzioni principali che di nuovo sono tra loro perpendicolari.  $\square$

Proponiamo una differente dimostrazione:

SECONDA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 6.1. Sviluppiamo in serie la funzione  $f(x, y)$ ; otteniamo<sup>11</sup>:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2) + \dots \simeq \frac{1}{2}h(x, y)$$

dove i termini trascurati sono di ordine maggiore a 2. Questa approssimazione non altera il calcolo delle derivate seconde di  $f$  nell'origine e quindi non compromette il calcolo delle curvature normali nell'origine. Dunque, ai fini del calcolo delle curvature normali nel punto  $P$ , possiamo supporre che la superficie  $\mathcal{S}$  sia il grafico della funzione  $\frac{1}{2}h$ . (Si noti che nella prima dimostrazione la funzione  $h$  era una funzione ausiliaria legata alle curvature normali nel punto  $P$ , qui la funzione  $\frac{1}{2}h$  fa le veci della funzione  $f$  e noi, invece di studiare la superficie  $\mathcal{S}$ , cioè il grafico di  $f$ , studiamo il grafico di  $\frac{1}{2}h$ . Il cambio è conveniente, perché il Lemma 6.2 ci dice come è fatta questa seconda superficie).

Di nuovo per il Lemma 6.2 ci sono 4 casi:

(1) la superficie  $z = \frac{1}{2}h(x, y)$  che approssima la nostra superficie  $\mathcal{S}$  è un piano, allora tutte le sezioni normali sono rette e dunque tutte le curvature normali sono nulle.

(2) la superficie  $z = \frac{1}{2}h(x, y)$  che approssima la nostra superficie  $\mathcal{S}$  è un paraboloide ellittico. Le sezioni normali sono le sezioni con piani verticali passanti per l'asse delle  $z$ , quindi sono parabole. Per costruzione il paraboloide è definito a partire da due parabole disposte su piani ortogonali, eventualmente diverse, una più "ampia" l'altra meno "ampia". Dunque esistono due sezioni normali, su piani perpendicolari tra loro, che sono queste due parabole. Le altre parabole hanno ampiezza intermedia tra queste. È intuitivo che tanto più una parabola è "ampia", tanto minore è la curvatura nel vertice della parabola. Per le sezioni normali curvatura coincide con curvatura normale, quindi esiste un'unica direzione di massimo e un'unica direzione di minima curvatura normale ed esse sono ortogonali tra loro. (In Fig. 23 sono rappresentate: la sezione normale di massima curvatura, quella di minima ed una di curvatura intermedia. Nell'ultima immagine di destra si vede il confronto tra le tre

<sup>11</sup>Tenuto conto che  $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$

sezioni). Si noti che nel caso rappresentato in figura entrambe le curvature principali

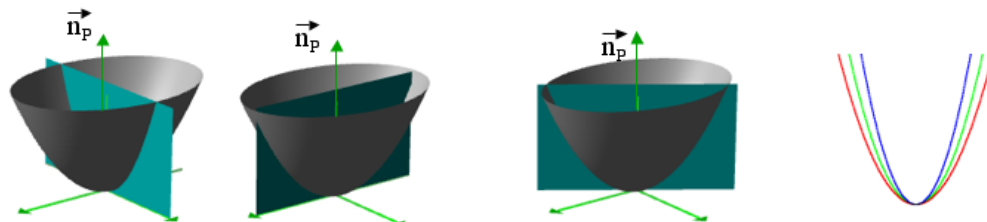


FIGURE 23. Apri il file per vedere variare la sezione normale

(e quindi tutte le curvature normali) sono positive infatti il versore normale  $\vec{n}_P$  ha verso concorde con il versore normale alle sezioni che hanno tutte la concavità rivolta verso l'alto. Se invertiamo il verso del versore normale  $\vec{n}_P$  tutte le curvature normali cambiano di segno e la direzione di massimo diventa di minimo e viceversa.

(3) La superficie  $z = \frac{1}{2}h(x, y)$  che approssima la nostra superficie  $\mathcal{S}$  è un paraboloide iperbolico. Le sezioni normali sono le sezioni verticali passanti per l'asse delle  $z$ , quindi sono parabole, tranne due che sono rette (cfr. Cap. VI). Le bisettrici di queste due rette sono le sezioni normali con curvatura massima e minima (si tratta di parabole con la concavità diretta da parti opposte). Ovviamente le due bisettrici sono perpendicolari tra loro. In Fig. 24 sono rappresentate: la sezione normale di massima curvatura, quella di minima ed una di curvatura intermedia. Nell'ultima immagine di destra si vede il confronto tra le tre sezioni).

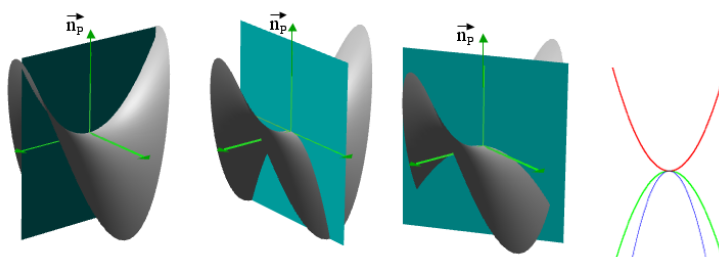


FIGURE 24. Apri il file per vedere variare la sezione normale

(4) La superficie  $z = \frac{1}{2}h(x, y)$  che approssima la nostra superficie  $\mathcal{S}$  è un cilindro parabolico. Le sezioni normali sono le sezioni verticali passanti per l'asse delle  $z$ , quindi sono parabole (con la concavità rivolta dalla stessa parte) tranne una che è una retta. In Fig. 25 sono rappresentate: la sezione normale di massima curvatura, quella di minima (ovviamente la retta) ed una di curvatura intermedia. Nell'ultima immagine di destra si vede il confronto tra le tre sezioni).

**ESERCIZIO 6.3.** *Enunciare il Teorema fondamentale sulle curvature normali in un punto di una superficie.*

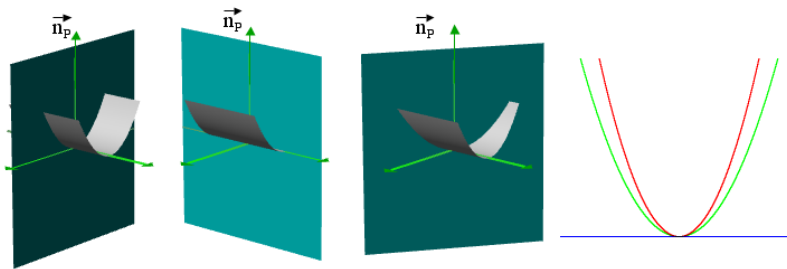


FIGURE 25. Apri il file per vedere variare la sezione normale

**6.3. Commenti al teorema fondamentale sulle curvature normali in un punto di una superficie.** Il fatto che le direzioni di massima e minima curvatura normale siano perpendicolari tra loro non è per nulla intuitivo. Immaginiamo una superficie realizzata in gomma, possiamo deformarla in mille modi diversi, eppure in ogni punto le due direzioni principali restano perpendicolari.

Tuttavia esistono esempi di superfici che sembrano contraddire il teorema.

ESEMPIO 6.4. Si consideri la curva  $\mathcal{D}$  in Fig. 26a; fissiamo un punto  $P$  sulla

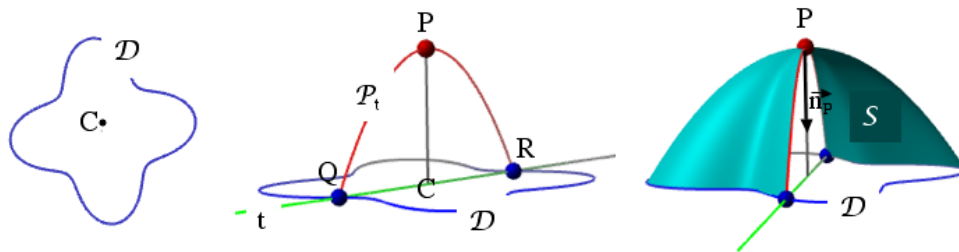


FIGURE 26. a - b. Apri il file per vedere la superficie generarsi.

verticale condotta per il centro  $C$  (cfr. Fig. 26b). Una retta  $t$  che passa per il centro  $C$  interseca  $\mathcal{D}$  in due punti  $Q$  e  $R$ . Costruiamo la parabola  $\mathcal{P}_t$  che passa per  $Q$  e  $R$  e ha vertice in  $P$ . Al variare della retta  $t$  le parabole  $\mathcal{P}_t$  descrivono una superficie  $\mathcal{S}$ .

Scelto il versore normale  $\vec{n}_P$  rivolto verso la concavità della superficie, consideriamo le curvature normali nel punto  $P$ . Le parabole  $\mathcal{P}_t$  sono sezioni normali (perché?) dunque la curvatura normale nella direzione<sup>12</sup> di  $t$  è la curvatura di  $\mathcal{P}_t$  nel vertice  $P$ . Essa dipende dalla lunghezza del segmento  $QR$ : curvatura grande se il segmento è piccolo e viceversa; comunque le curvature normali sono tutte positive.

Dunque (cfr. Fig. 27a) esistono due direzioni di curvatura normale massima e due direzioni di curvatura normale minima, contro il teorema.

A questo punto parrebbe che il teorema sia falso. Naturalmente le cose non stanno così. Il fatto è che già nel corso della dimostrazione del Teorema 5.1, quando nella formula (5.2) si esprime la curvatura normale in termini delle derivate seconde di  $f$ , come mostrerebbe un'analisi più attenta, si utilizza un'ipotesi che non abbiamo esplicitamente fatto, vale a dire che  $f$  sia differenziabile due volte con continuità. Condizione che nel nostro esempio non è soddisfatta. In conclusione

<sup>12</sup>Ben inteso  $t$  non è tangente alla superficie in  $P$ , ma evidentemente la sua parallela condotta per  $P$  è tangente alla parabola  $\mathcal{P}_t$  e quindi alla superficie  $\mathcal{S}$ .

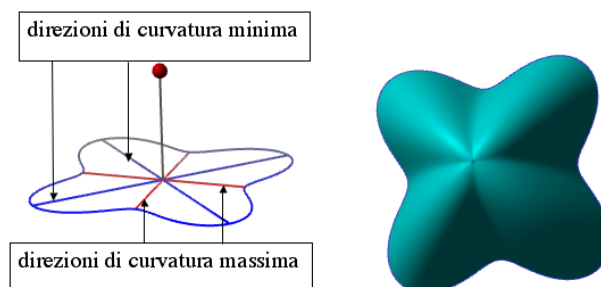


FIGURE 27

osserviamo che i Teoremi 5.1 e 6.1 sulla curvatura normale sono validi se la funzione  $f$ , il cui grafico è la superficie, è differenziabile due volte con continuità.

Sembra utile illustrare che questa condizione analitica ha un corrispettivo intuitivo.

ESEMPIO 6.5. Si consideri la superficie in Fig. 28a che presenta una linea con

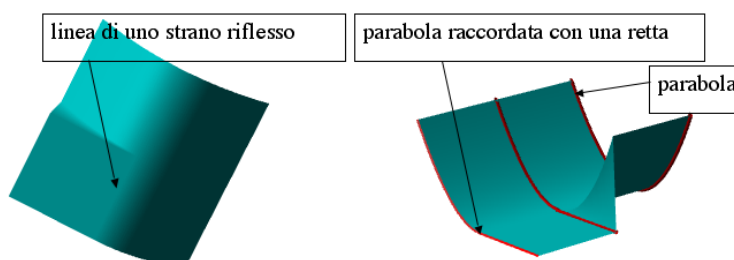


FIGURE 28

uno strano riflesso. Come illustrato in Fig. 28b la metà superficie che presenta lo strano riflesso è un cilindro la cui direttrice è una curva  $\mathcal{C}$  ottenuta raccordando una parabola ed una retta, mentre l'altra metà di superficie è un cilindro la cui direttrice è una parabola.

In effetti la curva  $\mathcal{C}$  è il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 0 \\ 0, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Risulta che  $\frac{df}{dx}(0) = 0$ , mentre la derivata seconda per  $x = 0$  non esiste.

Esercizio 6.6. Si illustri un esempio di superficie che contiene un punto  $P$  in cui le direzioni di minima e massima curvatura non sono uniche. Spiegare perché questo non contraddice il teorema che ne afferma l'unicità. (Suggerimento. Si utilizzi l'Esempio 6.4).

### 7. Ulteriori proprietà della curvatura normale

Dalla dimostrazione del Teorema 6.1 non sarebbe difficile dedurre che,

**PROPOSIZIONE 7.1.** *Indichiamo con  $k_1$  e  $k_2$  le curvature principali. La curvatura normale  $k_{t(\theta)}^{(n)}$  nella direzione della retta tangente  $t(\theta)$  che forma un angolo  $\theta$  con la direzione di  $k_1$  è data da*

$$k_{t(\theta)}^{(n)} = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

*In particolare questo dice che: (i) la curvatura normale in ogni direzione è determinata dai valori della curvature nelle direzioni principali, (ii) passando dalla direzione di minimo a quella di massimo la curvatura normale è strettamente crescente (ogni valore viene assunto una ed una sola volta), (iii) direzioni simmetriche rispetto alle curvature principali hanno la stessa curvatura normale.*

**ESERCIZIO 7.2.** *Mostrare che in un punto  $P$  di una superficie di rotazione le curvature principali sono le tangenti al parallelo e al meridiano che passano per  $P$ .*

Soluzione. Il piano che passa per l'asse di rotazione e per  $P$  è un piano di simmetria della superficie, quindi le direzioni tangenti in  $P$  e simmetriche rispetto al meridiano hanno la stessa curvatura normale. Dunque se una certa direzione  $t$  è di massimo, lo sarà anche la sua simmetrica  $t'$ . Ma per il Teorema 6.1 esiste una sola direzione di massimo, dunque  $t = t'$ ; cioè  $t$  è tangente al meridiano oppure al parallelo. Lo stesso argomento vale per il minimo.  $\square$