CAPITOLO VI

1. Un esempio di superfice: l'ellissoide

1.1. Definizione di ellissoide e sue proprietà di simmetria.

Definizione 1.1. *Fissati tre numeri $a \geq b \geq c > 0$ e tre diametri di una sfera $\mathcal{S}$ di raggio 1, diametri due a due ortogonali tra loro* (ad es. si consideri la sfera con centro nell'origine e si prendano i diametri determinati dagli assi coordinati) *si dilati*[1] *la sfera di un fattore* a *nella direzione del primo diametro, di un fattore* b *nella direzione del secondo e di un fattore* c *nella direzione del terzo diametro. La superfice $\mathcal{E}$ che così si ottiene si chiama* ellissoide *con semiassi* a,b *e* c.

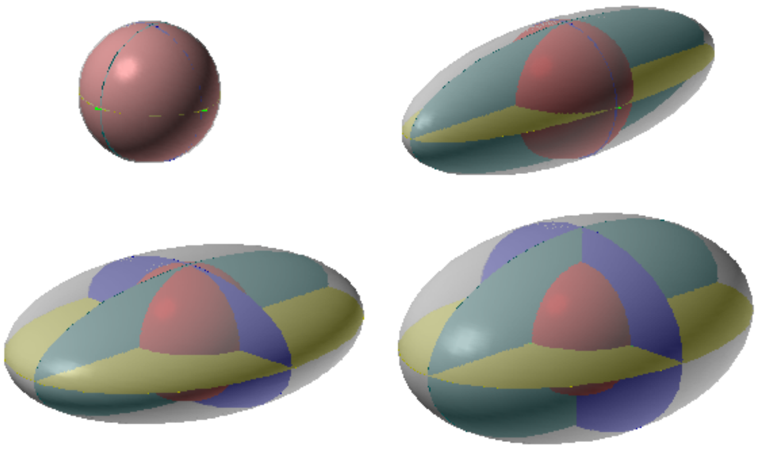

Figure 1. Apri il file

In Fig.1 è rappresentata la costruzione dell'ellissoide. In questo caso le dilatazioni sono fatte una dopo l'altra:

$$(x, y, z) \mapsto (ax, y, z) \mapsto (ax, by, z) \mapsto (ax, by, cz).$$

Tuttavia si può procedere in una sola volta:

$$(x, y, z) \mapsto (ax, by, cz).$$

Osservazione 1.2. In Fig.**??** sono messe in evidenza le intersezioni della superfice con i tre piani coordinati. È evidente che essi sono piani di simmetria per la superfice. Precisamente:

- *i tre piani individuati dagli assi dell'ellissoide sono piani di simmetria di $\mathcal{E}$. Gli assi sono assi di simmetria. Il punto d'incontro degli assi è centro di simmetria.*

Queste tre piani tagliano sull'ellissoide delle ellissi.

[1] Il termine dilatazione è improprio, perché se uno o più tra a, b e c è < 1, si ha a che fare con delle contrazioni. Il termine tecnico appropriato è *omotetia* che si può usare indifferentemente nei due casi.

1.2. **Sezioni piane di un'ellisse.** Meno ovvio, ma credibile, è che:

Proposizione 1.3. *Ogni sezione piana di un'ellissoide è un'ellisse.*

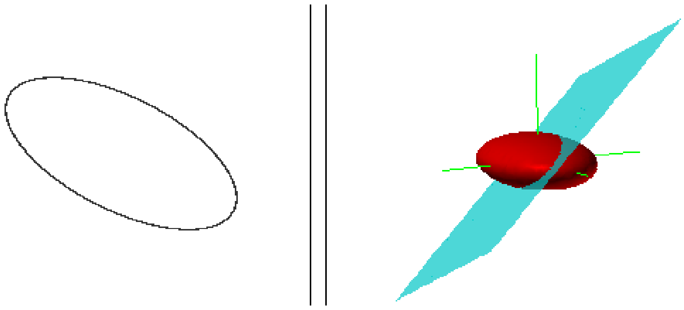

FIGURE 2. Apri il file

In Fig. 2 è rappresentata una sezione piana di un ellissoide.

1.3. **Equazione cartesiana della sfera e dell'ellissoide.**

Osservazione 1.4. *La distanza del punto $P = (x, y, z)$ dall'origine O è:*

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

L'equazione cartesiana della sfera di centro l'origine e raggio 1 è:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

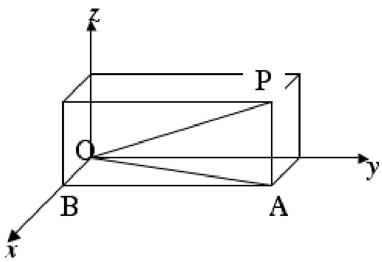

FIGURE 3

Dimostrazione. Si consideri la Fig. 2b. Se il punto P h coordinate x, y e z, allora

$$x = |OB|, \ y = |BA| \text{ e } z = |AP|.$$

Il triangolo OBA è rettangolo, quindi:

$$|OB|^2 + |BA|^2 = |OA|^2.$$

Anche il triangolo OAP è rettangolo, quindi:

$$|OA|^2 + |AP|^2 = |OP|^2.$$

Dunque la distanza $|OP|$ di P dall'origine O soddisfa:

$$|OP|^2 = |OA|^2 + |AP|^2 = |OB|^2 + |BA|^2 + |AP|^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

da cui

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Il punto P sta sulla sfera $\mathcal{S}$ di centro l'origine O e raggio 1 se e solo se la sua distanza da O è 1. $\square$

Proposizione 1.5. *Equazione cartesiane dell'ellissoide. L'equazione cartesiana dell'ellissoide $\mathcal{E}$ che ha semiassi di lunghezza $a \geq b \geq c > 0$ disposti come gli assi cartesiani e centro nell'origine è*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Dimostrazione. Contrendo l'ellissoide $\mathcal{E}$ in direzione degli assi coordinati di un fattore $1/a, 1/b$ e $1/c$, si ottiene una sfera di centro l'origine e raggio 1. Dunque un punto $P = (x, y, z)$ sta sull'ellissoide $\mathcal{E}$ se e solo se il punto

$$Q = (\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c})$$

sta sulla sfera $\mathcal{S}$ di centro l'origine O e raggio 1. Questo significa che le coordinate di Q soddisfano l'equazione di questa sfera, cioè

$$\big(\frac{x}{a}\big)^2 + \big(\frac{y}{b}\big)^2 + \big(\frac{z}{c}\big)^2 = 1.$$

$\square$

2. Piano tangente ad una superfice

2.1. **Definizione di piano tangente.**

Osservazione 2.1. La teoria delle curve *gobbe*, cioè delle curve dello spazio che non sono contenute in nessun piano è - come si intuisce - più complessa e evitiamo di trattarla al momento. Tuttavia, per una curva nello spazio, la nozione di retta tangente non presenta difficoltà, potendosi ripetere con ovvie modifiche quanto detto per una curva piana.

La nozione di piano tangente ad una superfice in un punto può essere introdotta con argomenti analoghi a quelli usati per la retta tangente ad una curva.

Definizione 2.2. *Data una superfice $\mathcal{S}$ ed un suo punto P diremo che un piano τ passante per P* è il piano tangente *ad $\mathcal{S}$ se, comunque fissato il formato $L \times L$ della "fotografia", a patto di prendere un ingrandimento di un fattore N abbastanza grande centrato in P, la regione della superfice in fotografia appare indistinguibile dal piano τ.*

In Fig. 4 vediamo una serie di immagini ingrandite, con fattore sempre maggiore, fino a quando ellissoide e piano non coincidono. Una conseguenza importante di questa definizione è che:

Proposizione 2.3. *Sia τ il piano tangente ad una superfice $\mathcal{S}$ in un suo punto P. La retta tangente in P ad una curva $\mathcal{C}$ della superfice che passa per P, giace anch'essa sul piano τ.*

In altri termini: le rette, tangenti - in un punto di una superfice - alle curve della superfice che passano per quel punto, giacciono tutte su un piano: il piano tangente alla superfice in quel punto.

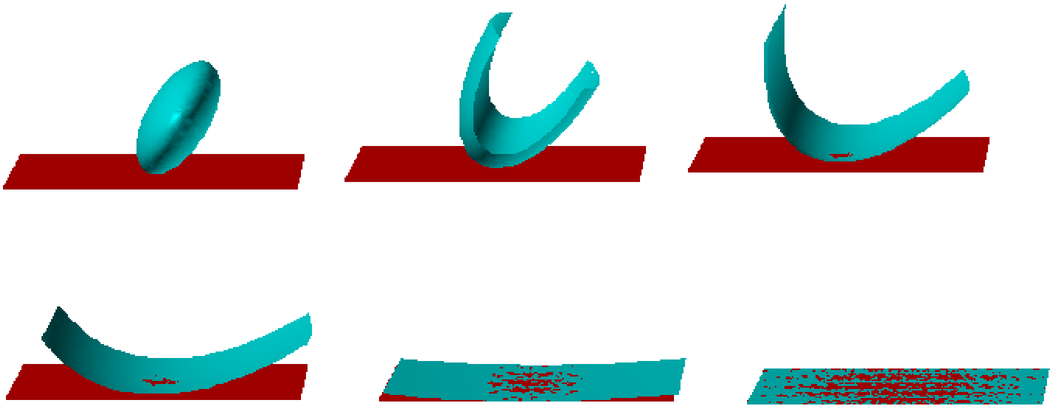

FIGURE 4. Aprendo il file è possibile modificare il punto di tangenza

<u>Dimostrazione</u>. Fissiamo un formato $L \times L$ e scattiamo una fotografia della superfice con centro in P e ingrandimento molto grande. Allora la porzione di superfice $\mathcal{S}$ visibile in fotografia apparirà coincidente con il piano τ. Dunque tutte le curve della superfice che passano per P appariranno come curve del piano τ. Vale a dire presa una curva $\mathcal{C}$ che sta sulla superfice e passa per P, la porzione di curva contenuta nell'immagine apparirà giacente sul piano τ. Se già la curva non appare coincidere con la propria tangente t nel punto P, tuttavia (per definizione di tangente ad una curva piana) questo avverrà con un ulteriore ingrandimento e dunque anche t giace su τ. $\square$

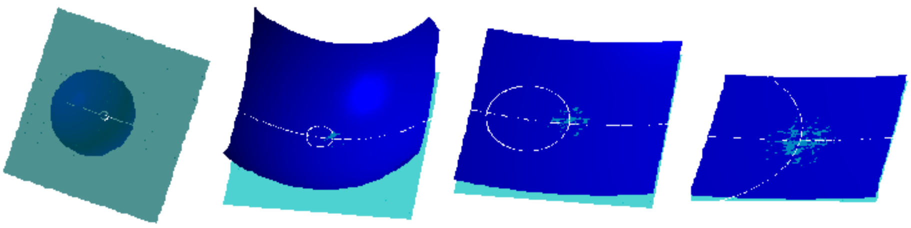

FIGURE 5. Apri il file

In Fig. 5 si vede la sequenza di ingrandimenti che porta ad identificare una porzione di sfera al suo piano tangente. Si vedono anche due curve sulla sfera e si nota come, a seconda della curva considerata, sia necessario un diverso fattore d'ingrandimento per ridurre la curva alla sua retta tangente. Si potrebbe dimostrare (ma è intuitivo) che il fattore d'ingrandimento necessario dipende dalla curvatura k della curva.

2.2. **Descrizione matematica di una superfice.** Da questo risultato segue che se conosco le rette tangenti a due curve della superfice $\mathcal{S}$ in un punto P e queste sono distinte il piano tangente alla superfice è il piano da esse individuato.

Per rendere più preciso il discorso dobbiamo discutere il modo in cui possiamo descrivere una superfice. Immaginiamo di avere un foglio quadrato $\mathcal{F}$ di materiale plastico molto duttile e di modificarlo in modo da ottenere la superfice voluta. In

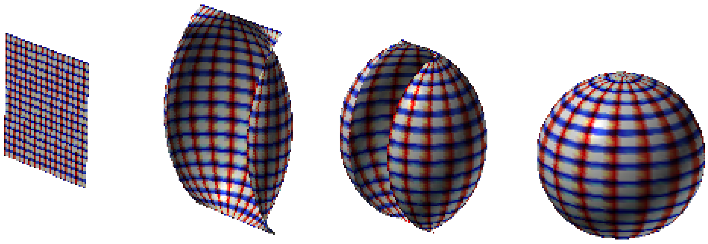

FIGURE 6. Aprire il file per vedere il filmato

Fig. 6 si vede come si può costruire una sfera. Sul foglio $\mathcal{F}$ possiamo fissare un sistema di coordinate cartesiane per cui ogni punto del quadrato sia individuato da una coppia

$$(u, v), \text{ con } 0 \leq u, v \leq 1$$

e a ciascun punto (u, v) del foglio $\mathcal{F}$ corrisponde un punto $X(u, v)$ della sfera $\mathcal{S}$. La quadrettatura che compare nella prima immagine di Fig. 6 è data dalle rette $u =$costante e $v =$costante; cioè dalle rette parallele ai lati del foglio. Queste linee si trasformano nei paralleli e meridiani della sfera.

Esistono superfici molto più complicate; ad es. si consideri la Fig. 7 in cui le

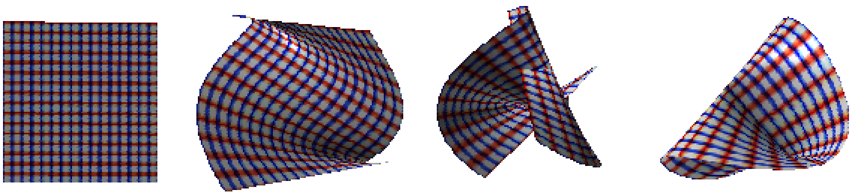

FIGURE 7. Aprire il file per vedere il filmato

linee sulla superfice che corrispondono alle rette $u =$costante e $v =$costante del foglio sono molto più complesse di meridiani e paralleli. Nel caso della Fig.7 il foglio è disposto in modo da autointersecarsi e quindi la corrispondenza

$$\mathcal{F} \ni (u, v) \mapsto X(u, v) \in \mathcal{S}$$

tra punti del foglio e superfice non è iniettiva. Del resto questo accade anche nel caso della sfera, perché due lati del foglio sono ridotti ai soli poli, mentre gli altri due si incollano lungo un meridiano.

Ritronando alla sfera in Fig. 8 si vede come ad ogni retta $u =$cost corrisponda un meridiano e $v = cost$ corrisponda un parallelo.

Vale anche la pena di capire come sono fatte le coordinate del punto $X(u, v)$ della sfera:

Proposizione 2.4. *La corrispondenza tra il foglio $\mathcal{F}$ e la sfera $\mathcal{S}$ di centro l'origine e raggio 1 è defnta da:*

$$X(u, v) = \big(cos(2\pi u)sin(\pi v),\ sin(2\pi u)sin(\pi v),\ cos(\pi v)\big).$$

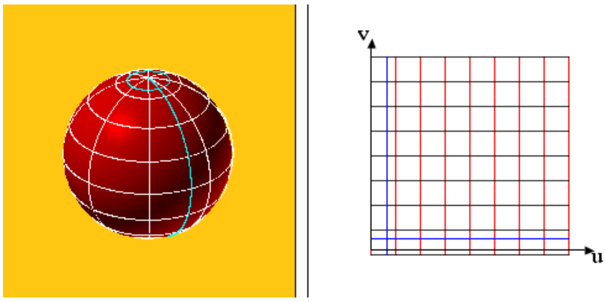

FIGURE 8. Aprire il file per muovere un parallelo e un meridiano

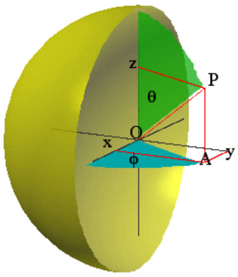

FIGURE 9

<u>Dimostrazione</u>. Nella Fig. 9 il punto P sta sulla sfera, le sue coordinate sono x, y e z. Vale

$$z = |OP|cos(\theta) = cos(\theta)$$

infatti la distanza di P dall'origine è 1. Inoltre

$$|OA| = |OP|sin(\theta) = sin(\theta).$$

Infine

$$x = |0A|cos(\phi) = cos(\phi)sin(\theta)$$

e

$$y = |OA|sin(\phi) = sin(\phi)sin(\theta).$$

Resta infine da osservare che ϕ varia tra 0 e 2π (deve fare tutto il giro) e quindi possiamo scriverlo:

$$\phi = 2\pi u, \text{ con } 0 \leq u \leq 1;$$

mentre θ varia tra 0 e π (da polo nord a polo sud) e quindi possiamo scriverlo:

$$\theta = \pi v.$$

□

3. SUPERFICI DI ROTAZIONE

Definizione 3.1. *Nello spazio fissiamo una retta* a *ed una curva* $\mathcal{C}$ (la curva può anche essere una curva gobba) *facciamo ruotare la curva* $\mathcal{C}$ *attorno all'asse* a*. Così otteniamo una superfice di rotazione* $\mathcal{S}$*.*

Precisamente, per ogni punto P *di* $\mathcal{C}$*, consideriamo la circonferenza passante per* P *che giace sul piano perpendicolare all'asse* a *e ha centro sull'asse. L'insieme di queste circonferenze forma la superfice* $\mathcal{S}$*.*

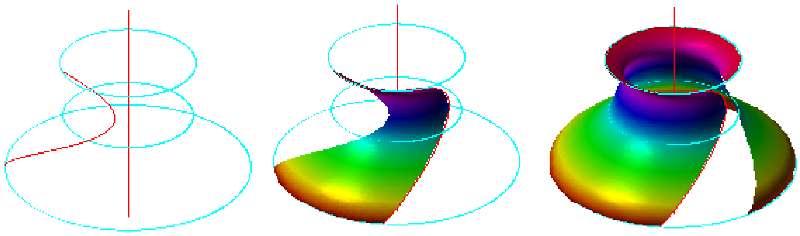

FIGURE 10. Apri il filmato

In Fig. 10 a sinistra vediamo una curva $\mathcal{C}$, l'asse di rotazione a e alcune delle circonferenze lungo cui ruotano i punti di $\mathcal{C}$. Nelle altre immagini vediamo il processo con cui viene generata la superfice.

Osservazione 3.2. Preso un qualunque semipiano uscente dall'asse di rotazione (vedi Fig. 11a), questo taglia sulla superfice una curva $\mathcal{C}'$ che genera la stessa superfice e in più è piana. Ciò mostra che

- *una superfice di rotazione può essere sempre generata da una curva piana.*

In Fig. 11b sono evidenziate le circonferenze descritte dai punti della generatrice intorno all'asse. *Tali circonferenze si chiamano paralleli.* Sono inoltre evidenziate le curve che si ottengono tagliando la superfice con un semipiano uscente dall'asse. *Tali curve si chiamano meridiani.*

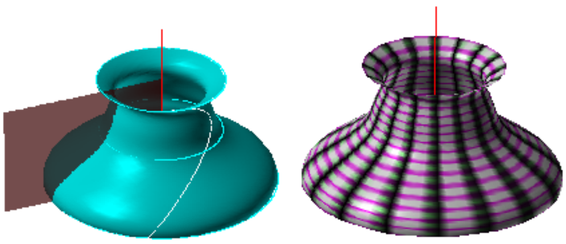

FIGURE 11. a - b

Definizione 3.3. *L'angolo formato da due curve nello spazio che si incontrano in un punto è, per definizione, l'angolo formato dalle loro tangenti in quel punto*

Teorema 3.4. *Meridiani e paralleli di una superfice di rotazione sono tra loro perpendicolari.*

<u>Dimostrazione</u>. Si consideri la Fig. 12a. Il parallelo passante per il punto P è la circonferenza su cui ruota il punto P e per costruzione essa giace sul piano π passante per P e perpendicolare all'asse r. Il meridiano passante per P è per definizione la sezione della superfice con il semipiano π' uscente dall'asse e passante per P.

Dobbiamo dimostrare che le tangenti t_m, t_p al meridiano e al parallelo che passano per P sono tra loro perpendicolari. La tangente t_m a tale meridiano giace,

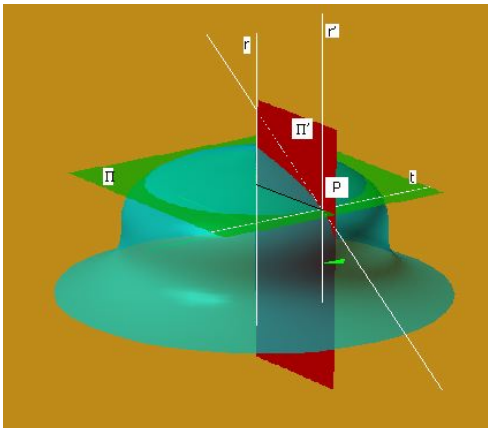

FIGURE 12

come tutto il meridiano, sul semipiano π'. Per concludere è sufficiente osservare che la tangente t_p al parallelo è perpendicolare a tale piano e quindi a tutte le sue rette e in particolare a t_m. □

Esempio 3.5. *Una sfera è una superfice di rotazione e come asse di rotazione può essere preso un suo qualunque diametro. Un ellissoide è una superfice di rotazione se due dei suoi tre assi sono uguali; in tal caso il terzo asse è l'asse di rotazione.*

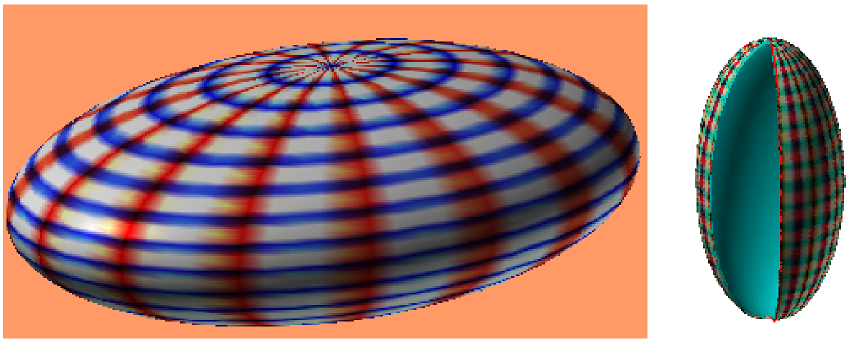

FIGURE 13. a - b Apri i files

In Fig. 13a vediamo un ellissoide di rotazione in cui i due assi uguali sono maggiori del terzo, in Fig. 13b vediamo il caso opposto.

Osservazione 3.6. *In un ellissoide di rotazione le sezioni con piani passanti per l'asse sono ellissi tutte uguali tra loro (queste ellissi sono unione di due meridiani) che hanno fuochi in due punti F, F' sull'asse. Un'onda sonora prodotta in F viene riflessa dalla superfice in F' e la lunghezza del percorso compiuto non dipende dalla direzione.*

In un ellissoide di rotazione è i paralleli e meridiani, come in tutte le superfici di rotazione, sono le sezioni della superfice, con i piani perpendicolari all'asse (paralleli) e con i semipiani uscenti dall'asse (meridiani). In un ellissoide qualsiasi, fissato uno dei tre assi, è possibile ugualmente definire queste due famiglie di curve.

Osservazione 3.7. *In un ellissoide in cui i tre assi hanno lunghezze diverse tra loro (dunque l'ellissoide non è di rotazione) i paralleli e i meridiani non sono sempre perpendicolari tra loro.*

Solo per fissare le idee conviene prendere un sistema di coordinate in cui gli assi coordinati coincidono con gli assi dell'ellissoide. Per definire paralleli e meridiani prendiamo l'asse verticale delle z. Allora i paralleli sono le ellissi che si ottengono tagliando l'ellissoide con piani orizzontali e i meridiani sono gli archi di ellisse che si ottengono tagliando l'ellissoide con semipiani uscenti dall'asse verticale. Dalla Fig.

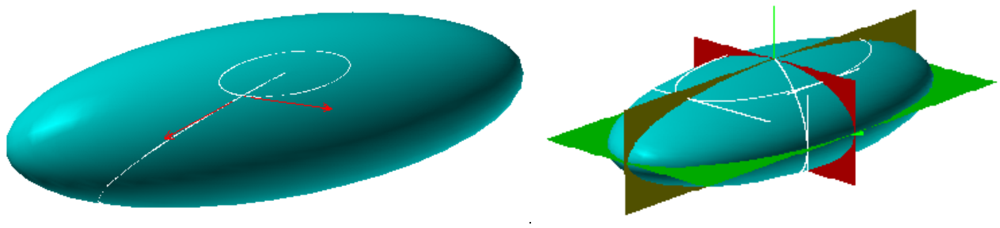

Figure 14

14a è piuttosto evidente che non c' è perpendicolarità.

L'ellissoide taglia i piani coordinati lungo tre ellissi e su queste c'è perpendicolarità tra paralleli e meridiani (vedi Fig. 14b). Infatti i meridiani sono archi di ellissi per i cui vertici passa l'equatore. Dunque la tangente ad un meridiano nel punto dell'equatore è verticale e perciò perpendicolare all'equatore stessa. I paralleli sono a loro volta ellissi i cui vertici stanno su i 4 meridiani determinati dai piani xz e yz e dunque le tangenti ai paralleli in questi vertici sono perpendicolari ai meridiani stessi.

4. Esempio: il paraboloide ellittico

Definizione 4.1. *Consideriamo una parabola che giace sul piano xz e ha per asse l'asse delle z. Facendola ruotare attorno al proprio asse si ottiene una superfice di rotazione (vedi Fig. 15). Possiamo poi dilatare tale superfice di un fattore* a *nella*

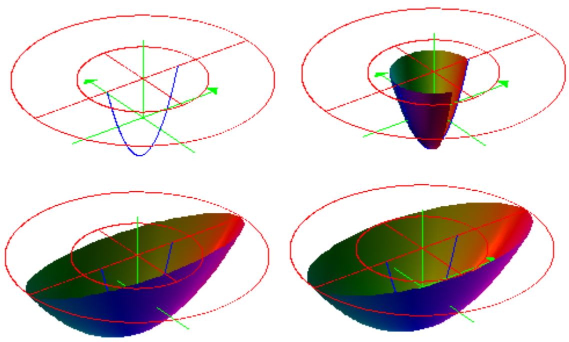

Figure 15. Apri il file

direzione dell'asse delle x e di un fattore b *nella direzione dell'asse delle y. La superfice così ottenuta si chiama* paraboloide ellittico.

Dalla costruzione segue che

Proposizione 4.2. *Un paraboloide ellittico possiede due piani di simmetria che si tagliano lungo un asse di simmetria.*

<u>Dimostrazione</u>. Si consideri la Fig. 16a.

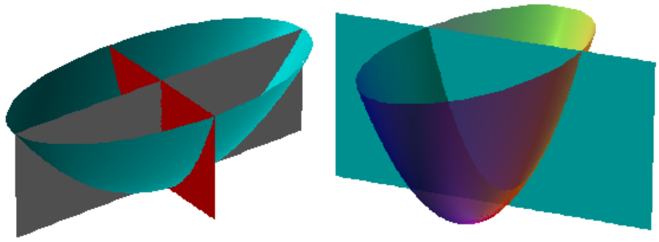

FIGURE 16. Apri il file

Le sezioni piane di un paraboloide ellittico sono parabole o ellissi. Questa affermazione merita un approfondimento.

Osservazione 4.3. *Le sezioni piane di un paraboloide ellittico sono parabole se il piano è parallelo all'asse del paraboloide. Altrimenti sono ellissi*

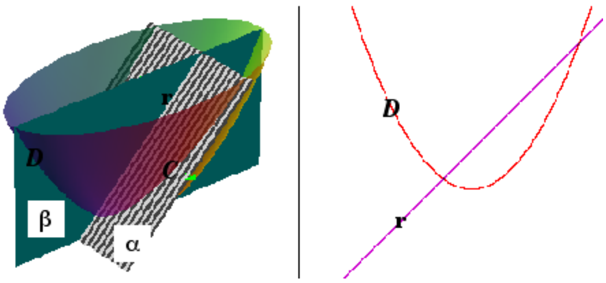

FIGURE 17. a - b Apri il file

La Fig. 16b fornisce una giustificazione del primo fatto. La seconda affermazione è meno evidente, perchè dalla Fig. 17a potrebbe restare il dubbio che il piano α inclinato tagli la superfice lungo una curva $\mathcal{C}$ che è una parabola o comunque una curva aperta. Ma prendiamo un piano β parallelo all'asse del paraboloide; questo taglia il paraboloide lungo una parabola $\mathcal{D}$ e il piano α lungo una retta r. La retta non è parallela all'asse della parabola, dunque la taglia in due punti (vedi Fig. 17b) e dunque, nonostante le apparenze, il piano α taglia il paraboloide lungo una curva chiusa $\mathcal{C}$.

5. Iperboloide ellittico o a due falde

Definizione 5.1. *La superfice generata dalla rotazione di un'iperbole $\mathcal{I}$ attorno al proprio asse focale è una superfice a due falde. Presa una retta r perpendicolare all'asse di rotazione procediamo ad una dilatazione di un fattore* a *nella dirazione di r. La superfice che così si ottiene si chiama* iperboloide ellittico *o* iperboloide a due falde.

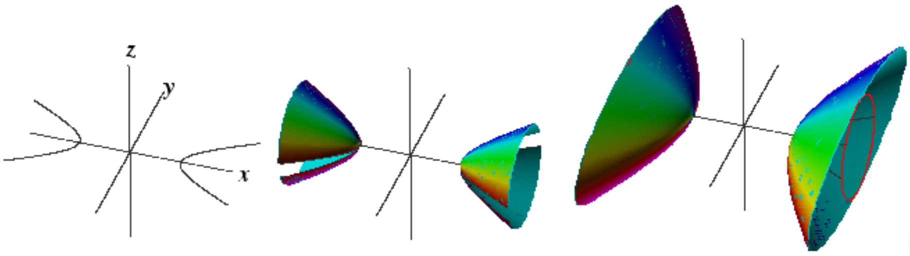

FIGURE 18. Apri il file

In Fig. 18 si vede la costruzione. Per fissare le idee si sono prese coordinate in modo che l'iperbole $\mathcal{I}$ giaccia sul piano xy e gli assi coordinati siano gli assi di simmetria dell'iperbole; in particolare l'asse delle x è l'asse focale attorno cui ruota la curva. La dilatazione è fatta in direzione dell'asse delle y.

L'iperboloide ellittico possiede tre piani di simmetria che si tagliano lungo tre assi di simmetria, questi ultimi si incontrano nel centro di simmetria (vedi Fig. 19). Le sezioni piane sono ellissi iperboli o parabole.

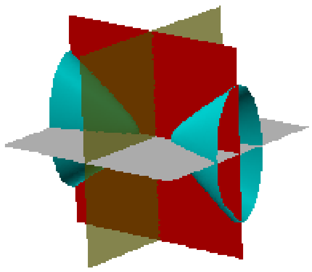

FIGURE 19

6. Iperboloide iperbolico o ad una falda

Definizione 6.1. *Data un'iperbole $\mathcal{I}$, invece di farla ruotare attorno alla retta che congiunge i fuochi F e F', la ruotiamo attorno all'altro asse di simmetria: l'asse del segmento FF'. Poi, fissata una retta r perpendicolare all'asse di rotazione, dilatiamo la superfice di rotazione di un fattore* a *nella direzione di r. La superfice che così si ottiene si chiama* iperboloide iperbolico *o* iperboloide a una falda.

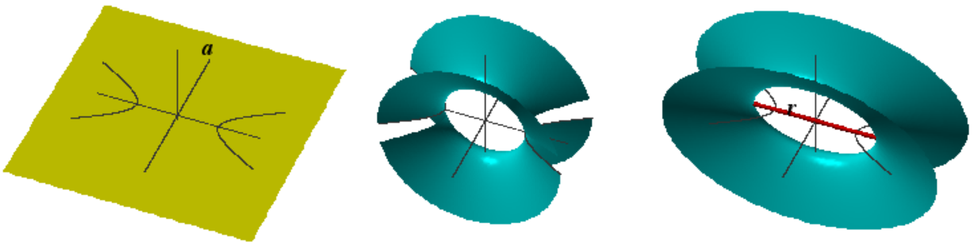

FIGURE 20. Apri il file

In Fig: 20 si vede la costruzione: a sinistra è evidenziato l'asse a di rotazione; a destra è evidenziato l'asse r (che in questo caso coincide con l'asse focale) nella direzione del quale avviene la dilatazione. Può essere interessante vedere i due iperboloidi, costruiti a partire dalla stessa iperbole, contemporaneamente in Fig. 21a:

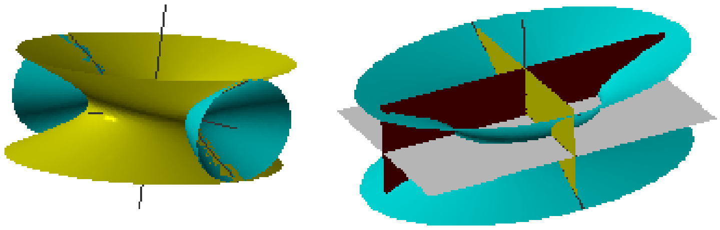

FIGURE 21. a - b Apri il file

Osservazione 6.2. *Anche l'iperboloide ad una falda possiede tre piani di simmetria* vedi Fig. 21b *che si tagliano lungo tre assi di simmetria che, a loro volta, sono incidenti nel centro di simmetria.*

6.1. **Sezioni piane di un iperboloide iperbolico.** . Le sezioni piane di un iperboloide iperbolico sono coniche. Rinunciamo a dimostrare questo fatto, che però utilizzeremo, per dedicare la nostra attenzione a vedere quali tipi di coniche si ottengono sezionando un'iperboloide iperbolico con un piano π e come la sezione dipenda dalla posizione del piano.

Il problema non è del tutto facile e conviene limitarsi a considerare un iperboloide iperbolico di rotazione (costruito ruotando un'iperbole) ed è opportuno tenere presente anche il cono generato dalla rotazione degli asintoti (vedi Fig. 22).

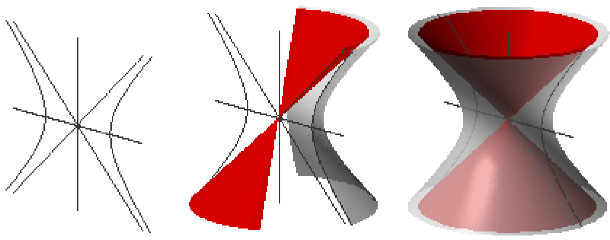

FIGURE 22. Apri il file

Preso un qualunque piano π si presentano due casi: **a)** π contiene l'asse di rotazione dell'iperboloide, **b)** π non contiene l'asse di rotazione.

Nel caso a) è sufficiente osservare che il piano π taglia sull'iperboloide una curva $\mathcal{C}$ che è formata da due meridiani: esattamente i due rami dell'iperbole da cui siamo partiti.

Nel caso b) esiste un piano α passante per l'asse di rotazione e perpendicolare al piano π. Possiamo allora immaginare che il piano α sia il piano della lavagna su cui è tracciata l'iperbole; inoltre il piano π taglia sul piano α una retta r e *fuoriesce* (vedi Fig. 23) da questa retta in direzione normale al piano α (della lavagna).

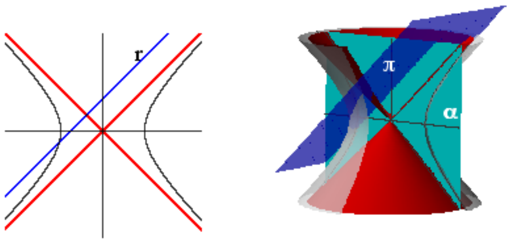

FIGURE 23

I) Cominciamo a trattare il caso in cui il piano π è parallelo ad una delle generatrici del cono. In questo caso la retta r è parallela ad uno degli asintoti. Muoviamo il piano π parallelamente a se stesso.

Per fissare le idee cominciamo (vedi Fig. 24) da una posizione in cui la retta r taglia il ramo di sinistra dell'iperbole. La retta r taglia l'iperbole in un solo

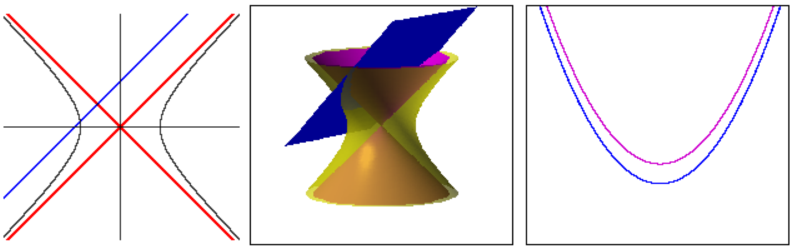

FIGURE 24

punto (è secante, ma l'altro punto d'intersezione è all'infinito); il piano π taglia sul cono generato dagli asintoti una parabola e ugualmente taglia una parabola sull'iperboloide di rotazione.

Poi il piano π si muove fino ad essere tangente al cono generato dagli asintoti, la retta r quindi coincide con un asintoto e sorprendentemente (vedi Fig. 25) il piano

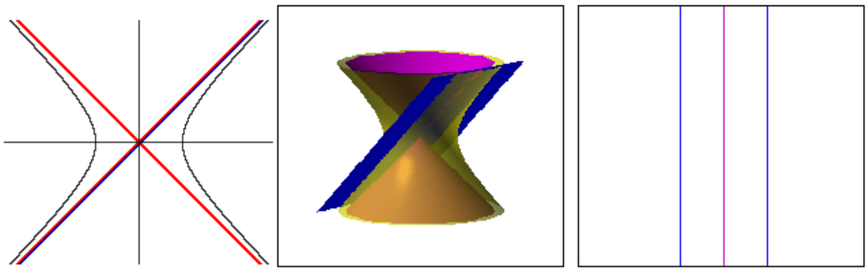

FIGURE 25

π taglia sull'iperboloide una coppia si rette parallele!

Infine il piano π si muove ancora, la retta r ora taglia il ramo di destra dell'iperbole (ovviamente sempre in un solo punto) e il piano π torna a tagliare (vedi Fig. 26) il

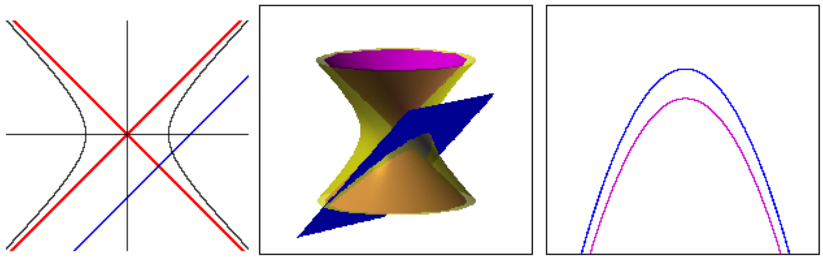

FIGURE 26. Apri il file

cono generato dagli asintoti e l'iperboloide lungo delle parabole (la cui concavità è diretta nel verso opposto a quelle precedenti).

II) Consideriamo ora il caso in cui il piano π taglia un'ellisse sul cono generato dagli asintoti e quindi la retta r taglia entrambi i rami dell'iperbole (vedi fig. 27). Il piano π taglia un'ellisse anche sull'iperboloide.

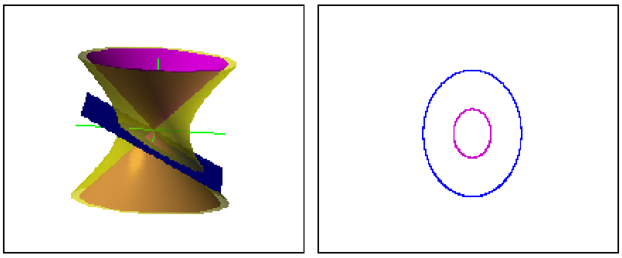

FIGURE 27. Apri il file

III) Infine resta il caso in cui il piano π taglia sul cono generato dagli asintoti un'iperbole e la retta r taglia uno dei due rami in due punti. (Vedi Fig. 28) Come

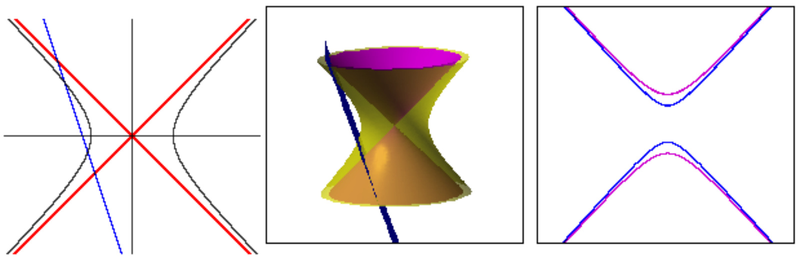

FIGURE 28

prima muoviamo il piano π parallelamente a se stesso. Inizialmente il piano π è disposto come in Fig. 28 e taglia anche sull'iperboloide un'iperbole.

Poi, muovendo il piano parallelamente a se stesso, la retta r viene ad essere esterna all'iperbole e il piano π taglia il cono e l'iperboloide lungo due iperboli che però hanno i rami disposti da parti opposte rispetto gli asintoti (vedi Fig. 29)

Dunque passando dall'una all'altra di queste due posizioni del piano π, la sezione piana dell'iperboloide transita da un'iperbole con le concavità rivolte verso l'alto

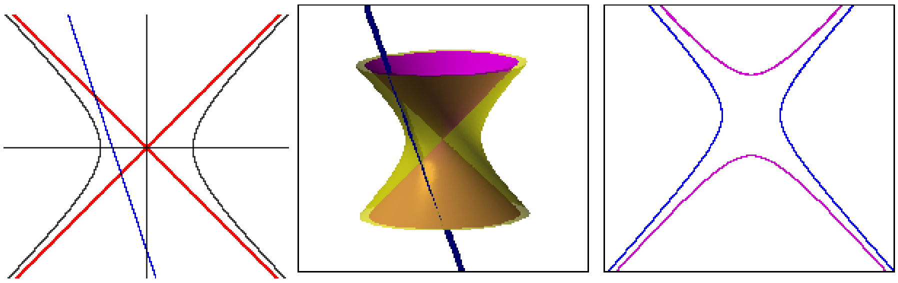

Figure 29

e il basso, ad un'iperbole che ha le concavità rivolte lateralmente. Dunque c'è una posizione mediana di transizione. Questa evidentemente è raggiunta quando la retta r è tangente all'iperbole (vedi Fig. 30) e il piano π taglia la superfice lungo

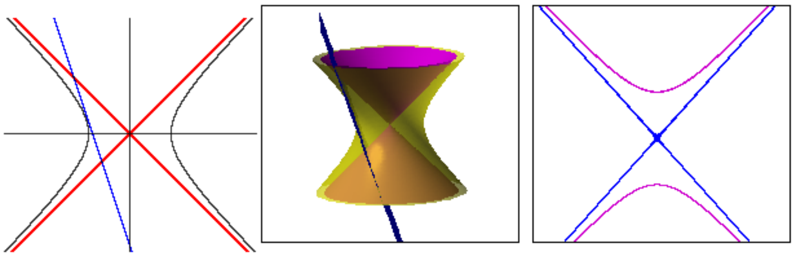

Figure 30

una coppia di rette incidenti (asintoti dell'iperbole che il piano taglia sul cono). Se ci si pensa questo è l'unico modo in cui la curva sezione può trasformarsi da un tipo di iperbole all'altro, visto che comunque la sezione deve continuare ad essere una conica.

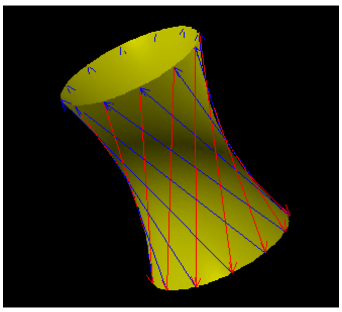

Figure 31

Osservazione 6.3. L'ultimo caso considerato in cui il piano taglia l'iperboloide lungo due rette incidenti è di grande interesse. Infatti le due rette r, r' si tagliano in un punto P e giacciono sulla superfice; dunque le loro tangenti, cioè le rette stesse, giacciono sul piano tangente all'iperboloide nel punto P. La stessa conclusione vale nel caso di un iperboloide qualsiasi, cioè non di rotazione. Possiamo così affermare che *il piano tangente ad un iperboloide iperbolico in un suo punto P taglia l'iperboloide lungo due rette incidenti. In particolare la superfice dell'iperboloide è tutta ricoperta da rette.*

Esercizio 6.4. *Si descrivano sinteticamente le possibili sezioni piane di un iperboloide iperbolico di rotazione.*

Soluzione. Le sezioni piane di un iperboloide iperbolico di rotazione sono ellissi, parabole, iperboli, coppie di rette incidenti o coppie di rette parallele.

La sezione piana è un'ellisse se l'angolo θ, formato dal piano con l'asse di rotazione, è maggiore di quello che gli asintoti formano con lo stesso asse.

Se θ è uguale all'angolo che gli asintoti formano con l'asse, allora la sezione è una parabola; a meno che il piano non passi per il centro di simmetria dell'iperbolide, nel qual caso la sezione è una coppia di rette parallele.

Infine se θ è minore dell'angolo tra asintoti e asse di rotazione la sezione è un'iperbole; a meno che il piano non sia tangente all'iperboloide, nel qual caso la sezione è una coppia di rette incidenti.

Osservazione 6.5. Equazione cartesiana dell'iperboloide iperbolico *In effetti sarebbe importante ricavare questa equazione, ma richiede qualche calcolo di troppo. L'equazione è*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}$$

dove $a \geq b > 0$ e $c > 0$. Se $a = b$ allora l'iperboloide è di rotazione attorno all'asse delle z.