Corso 2007-08

CHAPTER 1

Curvatura di Gauss

1. Introduzione

Abbiamo visto che i cilindri, i coni, le rigate delle tangenti ad una curva (con curvatura mai nulla) sono tutte superfici che si possono far rotolare su un piano e in questo modo possono essere sviluppate, cioè sono superfici localmente isometriche al piano. In altri termini per queste superfici è possibile costruire una cartografia che riproduca esattamente su una pianta piana le distanze tra i punti (questa affermazione va presa cum grano salis, ad esempio per sviluppare un cono circolare tagliamo la superfice lungo una generatrice e la stendiamo sul piano e due punti vicini ma separati dal taglio, sul piano saranno distanti. Dunque meglio dire che possibile riprodurre piccole porzioni di questa superfice in mappe cartografiche esatte). Per stabilire se altre superfici godono di questa proprietà e più in generale quando è possibile che due superfici siano isometriche conviene introdurre una nuova nozione.

xii.1 Definizione 1.1. *Sia $\mathcal{S}$ una superfice. La curvatura di Gauss K in un suo punto P è il prodotto delle curvature principali in P.*

xii.2 Osservazione 1.2. **(1)** Ricordo che, in un punto di una superfice, il segno delle curvature normali nelle direzioni tangenti dipende dalla scelta del verso del versore normale alla superfice. Tuttavia la curvatura di Gauss è indipendente da questa scelta, perché se cambiamo il verso del versore normale, allora cambiano di segno entrambe le curvature principali e il loro prodotto non cambia.

(2) Il segno della curvatura di Gauss dice qualcosa sul punto: se $K > 0$ il punto è ellittico, se $K = 0$ il punto è parabolico o planare, se $K < 0$ è iperbolico.

(3) Esiste una formula per calcolare la curvatura di Gauss. Se $\Omega \xrightarrow{X} \mathcal{S}$ è un'applicazione che definisce la superfice $\mathcal{S}$, allora la curvatura di Gauss K nel punto $X(u, v)$ è data da:

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}.$$

(4) Apparentemente la curvatura di Gauss non ha nulla a che fare con le isometrie. Consideriamo ad esempio un cilindro circolare retto: le direzioni principali in un suo qualunque punto sono quelle della generatrice e quella della sezione circolare e le rispettive curvature sono 0 e $1/R$, dove R è il raggio del cilindro. Invece in tutti i punti del piano tutte le curvature direzionali sono nulle, quindi le curvature principali sono nulle. Il cilindro è localmente isometrico al piano. Questo mostra che due superfici possono essere isometriche senza avere le stesse curvature principali. Del resto le curvature principali, in un dato punto della superfice, sono il massimo e il minimo delle curvature normali nelle direzioni tangenziali in quel punto. E la curvatura normale in una certa direzione dipende in modo essenziale dalla direzione della normale alla superfice. Ora evidente che cilindro e piano sono molto diversi quanto a normale: nel primo la normale cambia da punto a punto su ogni direttrice, nel secondo è costante su tutto il piano. Dunque non c'è in effetti nessun motivo apparente per dire che, dal fatto che due superfici siano isometriche, nasce una relazione tra le curvature principali delle due superfici.

Invece, miracolosamente vale il seguente

xii.3 TEOREMA 1.3. **Teorema Egregium di Gauss**. *Se due superfici $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'$ sono isometriche, allora hanno la stessa curvatura di Gauss.*

Poiché, in generale, la curvatura di Gauss può cambiare da punto a punto della superfice è opportuno esprimersi con maggior precisione. Sia $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ un'isometria e siano P un punto di $\mathcal{S}$, P' il suo corrispondente su $\mathcal{S}'$; allora la curvatura di Gauss $K(P)$ di $\mathcal{S}$ in P è uguale alla curvatura di Gauss $K(P')$ di $\mathcal{S}'$ in P'.

Dimostrazione. La prova non è molto interessante. Si mostra (con molti calcoli) che possibile esprimere la curvatura di Gauss utilizzando le quantità E, F e G e le loro derivate. Poiché, se le superfici sono isometriche, le funzioni E, F e G sono le stesse, anche le curvature di Gauss sono le stesse. □

2. Superfici con curvatura di Gauss $K = 0$

Cerchiamo di capire quali sono le superfici con curvatura di Gauss nulla in tutti i punti. Già sappiamo che

(a) una superfice $\mathcal{S}$ ha curvatura di Gauss nulla in tutti i punti se e solo se i suoi punti sono parabolici o planari.

(b) Tutti i punti di un piano sono punti planari (quindi un piano ha curvatura di Gauss identicamente nulla) e viceversa se una superfice S è composta di soli punti planari, allora S è una porzione di un piano (Proposizione 8.14 **??**).

(c) Il Teorema Egregium di Gauss ci assicura che ogni superfice localmente isometrica al piano ha curvatura di Gauss nulla e quindi cilindri, coni e rigata delle tangenti ad una curva (la cui curvatura sempre $\neq 0$), che possono essere sviluppati su un piano, hanno curvatura di Gauss nulla.

Per vedere che quelle elencate - piano, cilindri, coni e rigate delle tangenti ad una curva - sono essenzialmente le uniche superfici con curvatura di Gauss identicamente nulla, abbiamo bisogno del seguente risultato preliminare:

xii.4 LEMMA 2.1. *La curvatura di Gauss di una superfice rigata non-cilindrica in un suo punto* P *è*

$$K = -\frac{p^2}{(p^2 + d^2)^2}$$

dove p *è il parametro di stringimento della generatrice che passa per* P *e* d *è la distanza di* P *dal punto centrale di tale generatrice.*

Questo risultato dice che:

xii.5 OSSERVAZIONE 2.2. **(i)** *In generale la curvatura di Gauss di una superfice rigata non-cilindrica è negativa e quindi tutti i suoi punti sono iperbolici; in particolare in ogni punto* P *della superfice, oltre alla direzione della generatrice che passa per* P*, esiste un'altra direzione tangente con curvatura normale nulla.*

Inoltre, in ogni generatrice, la curvatura ha minimo nel punto centrale e allontanandosi dal punto centrale, lungo la generatrice, la curvatura di Gauss cresce verso 0.

(ii) *Possono esistere alcune generatrici il cui parametro di stringimento* $\mathrm{p} = 0$*. In tal caso i punti centrali di queste generatrici sono singolari* (cioè privi di piano tangente, cfr. Teorema 10.34 **??**) *e in tutti gli altri punti di queste generatrici la curvatura di Gauss è nulla. Questi punti possono essere parabolici o planari.*

(iii) *Esiste infine il caso in cui la curvatura di Gauss è identicamente nulla su tutta la superfice; questo si verifica quando il parametro di stringimento di tutte le generatrici è nullo, cioè quando la superfice è un cono oppure la rigata delle tangenti di una curva (con curvatura sempre* $\neq 0$*),* cfr. Proposizione 10.29 **??**.

Possiamo aggiungere che nel caso (iii) i punti possono essere parabolici o planari.

xii.6 Esercizio 2.3. *Mostrare l'esempio di un cono a punti parabolici e di un cono che possiede punti planari.*

Soluzione. Un cono è la superfice descritta da una retta r che si muove passando per un punto fisso V, vertice del cono e toccando sempre una certa curva $\mathcal{C}$ detta direttrice. Si tratta di una superfice rigata non cilindrica la cui curva di stringimento è il vertice e il cui parametro di stringimento è identicamente nullo. Dunque, a parte il vertice che è un punto singolare (privo di piano tangente), in tutti gli altri punti la curvatura di Gauss è nulla. Pertanto i punti di un cono sono planari o parabolici.

Se la curva $\mathcal{C}$ è una circonferenza e il vertice V si trova sulla perpendicolare (al piano della circonferenza) condotta per il vertice, caso del cono circolare retto, allora il cono $\mathcal{K}$ è una superfice di rotazione. Le curvature principali in un punto P di $\mathcal{K}$ sono la curvatura normale del meridiano e la curvatura normale del parallelo. Il meridiano è una retta (una delle generatrici) e dunque ha curvatura nulla, mentre la curvatura normale del parallelo è pari a $1/d$ dove d è la lunghezza del segmento che unisce il punto P all'asse in direzione normale alla superfice. Pertanto la curvatura normale del parallelo è $\neq 0$ e il punto P non è planare. Dunque *i punti di un cono circolare retto sono tutti parabolici.*

Si consideri invece come curva $\mathcal{C}$ una curva piana che possiede un punto con curvatura nulla. Ad esempio un punto di flesso come nel caso della la cubica

$$y = x^3.$$

Prendiamo V fuori dal piano di $\mathcal{C}$ e costruiamo il cono $\mathcal{K}$ che ha vertice V e direttrice $\mathcal{C}$. Sia P_0 il punto di flesso di $\mathcal{C}$.

Mostriamo che tutti i punti P della generatrice r_0 che passa per P_0 (tranne ovviamente il vertice V che è singolare) sono planari. Sia P un punto di r_0 e sia α il piano per P parallelo al piano che contiene $\mathcal{C}$; tagliamo il cono $\mathcal{K}$ con il piano α (vedi Fig. fxii.1 1); otteniamo come sezione una curva $\mathcal{C}'$ che è evidentemente molto

Figure 1 fxii.1

simile a $\mathcal{C}$. In effetti non sarebbe difficile dimostrare, ma lo si intuisce facilmente, $\mathcal{C}'$ è una copia in scala di $\mathcal{C}$. Dunque P è un punto di flesso per $\mathcal{C}'$ e pertanto la curvatura $k_{\mathcal{C}'}(P) = 0$.

Allora la curvatura normale nel punto P nella direzione tangente alla curva $\mathcal{C}'$ è nulla. Ma in P esiste già una direzione tangente con curvatura normale nulla, quella della generatrice r_0; dunque ci sono due direzioni con curvatura normale nulla e P non può essere parabolico (ce ne dovrebbe essere una sola), dunque P è necessariamente planare. □

Come detto le superfici rigate non-cilindriche con curvatura di Gauss identicamente nulla sono i coni e le rigate delle tangenti. Per i primi l'esercizio precedente ci ha mostrato come esistano coni fatti tutti di punti parabolici e coni in cui ci sono generatrici i cui punti sono planari (evidentemente non tutti i punti del cono possono essere planari, altrimenti la superfice sarebbe un pezzo di piano). La stessa cosa vale per le rigate delle tangenti. Vale a dire è possibile mostrare che

xii.7 Proposizione 2.4. *Se $\mathcal{C}$ è una curva, con curvatura*[1] *sempre $\neq 0$, i punti planari della rigata delle tangenti a $\mathcal{C}$ sono i punti delle rette tangenti a $\mathcal{C}$ nei punti di torsione nulla.*

La cosa non è poi così strana se pensiamo che quando la torsione di $\mathcal{C}$ è identicamente nulla, la curva $\mathcal{C}$ è piana e la sua rigata delle tangenti è una porzione di piano (dunque è tutta fatta di punti planari).

xii.8 Esercizio 2.5. *Sia $\mathcal{S}$ la rigata delle tangenti ad una curva $\mathcal{C}$ (la cui curvatura è sempre $\neq 0$). Di che tipo sono i punti di $\mathcal{S}$?*

Soluzione. Poiché $\mathcal{C}$ ha sempre curvatura $\neq 0$ la superfice $\mathcal{S}$ è non-cilindrica. Le uniche superfici non-cilindriche con curvatura di Gauss nulla sono i coni e le rigate delle tangenti; dunque la curvatura di Gauss di $\mathcal{S}$ è identicamente nulla. Pertanto i suoi punti sono parabolici o planari. Sia t una generatrice di $\mathcal{S}$, cioè t è la retta tangente a $\mathcal{C}$ in un certo punto P. Fatto salvo il punto P stesso, che è punto centrale di t ed è singolare (cioè privo di piano tangente) gli altri punti di t sono planari se e solo se la torsione di $\mathcal{C}$ è nulla in P. □

Discusso il Lemma xii.4 2.1, passiamo a caratterizzare le superfici con curvatura di Gauss nulla in tutti i punti. Per meglio comprendere consideriamo il seguente

xii.9 Esempio 2.6. La superfice $\mathcal{S}$ raffigurata in Fig. fxii.2 2 è ottenuta raccordando,

Figure 2 fxii.2

[1] Altrimenti la sua rigata delle tangenti non è più una superfice non-cilindrica.

lungo i lati del triangolo indicato in figura, un cilindro e due coni. Non è possibile scegliere una rigatura del pezzo di piano (il triangolo) in modo che tale rigatura sia coerente con la rigatura dei coni e del cilindro; in altri termini la superfice $\mathcal{S}$ in figura non è parte di una superfice rigata. In effetti, per ottenere una superfice rigata bisogna eliminare i punti planari (cioè il triangolo).

Questo esempio spiega un po' il senso del seguente

xii.10 TEOREMA 2.7. **(i)** *Se $\mathcal{S}$ è una superfice con curvatura di Gauss nulla in tutti i punti, allora - tolti gli eventuali punti planari - $\mathcal{S}$ è contenuta in una superfice rigata che, precisamente, è un cilindro, oppure un cono, oppure una rigata delle tangenti o è composta di pezzi di questi tre tipi.*
(ii) *Una superfice ha curvatura di Gauss nulla in tutti i punti se e solo se è localmente isometrica al piano.*

Dimostrazione. **(i)** Con un ragionamento non facile si mostra che se la curvatura di Gauss di una superfice $\mathcal{S}$ è nulla in tutti i punti, allora, tolti gli eventuali punti planari, $\mathcal{S}$ è contenuta in una superfice rigata. Ora (si veda la discussione al termine del paragrafo §IX.2) la superfice $\mathcal{S}'$, così ottenuta, tolte eventualmente alcune generatrici (che corrispondono ai valori di s, per cui $\frac{d\vec{v}}{ds} = 0$, senza però che $\vec{v}$ sia costante), sarà composta di cilindri e di superfici non-cilindriche. Resta da vedere che queste superfici non cilindriche sono coni o rigate delle tangenti. Chiamiamo $\mathcal{W}$ uno di questi pezzi. Per ipotesi $\mathcal{W}$ ha curvatura di Gauss 0, ma allora, per il Lemma 2.1, il parametro di stringimento deve essere identicamente nullo. Ma se $\mathcal{W}$ ha parametro di stringimento nullo, allora è un cono oppure la rigata delle tangenti ad una curva.

(ii) Segue subito da (i). Infatti se $\mathcal{S}$ ha curvatura di Gauss nulla in tutti i punti essa è fatta come descritto in (i) e dunque è localmente isometrica al piano; viceversa se è $\mathcal{S}$ è localmente isometrica la piano, per il Teorema Egregium, ha curvatura di Gauss nulla in tutti i punti. □

xii.11 ESEMPIO 2.8. In Fig. 3 vediamo una superfice ottenuta attaccando un cilindro

FIGURE 3 fxii.3

ed un cono.

xii.12 ESERCIZIO 2.9. *Determinare le superfici di rotazione che hanno curvatura gaussiana nulla in tutti i punti.*

Soluzione. **a)** Comiciamo con l'osservare che
• La curvatura gaussiana è, per definizione, il prodotto delle curvature principali.
• In una superfice di rotazione $\mathcal{S}$ le direzioni principali sono le direzioni tangenti ai meridiani e paralleli.

Perciò cerchiamo tutte le superfici $\mathcal{S}$ di rotazione tali che, in ogni punto P di $\mathcal{S}$ almeno una delle curvature principali, la curvatura normale $k_{\mathcal{P}}$ del parallelo o la curvatura normale $k_{\mathcal{M}}$ del meridiano, sia nulla.

b) Vediamo che *la curvatura normale del parallelo $k_{\mathcal{P}}$ è nulla se e solo se la tangente al meridiano è perpendicolare all'asse di rotazione.*

Figure 4 fxii.4

Sia P un punto di $\mathcal{S}$; tracciamo la retta normale ad $\mathcal{S}$ nel punto P (è la retta perpendicolare al piano tangente), essa taglia l'asse di rotazione in un punto C (cfr. Fig. fxii.4 4). La curvatura principale $k_{\mathcal{P}}$ relativa al parallelo che passa per P è la curvatura di una circonferenza di centro C che passa per P. Dunque

$$k_{\mathcal{P}} = \frac{1}{R}$$

dove $R = |CP|$ è il raggio di questa circonferenza.

Pertanto $k_{\mathcal{P}} \neq 0$ salvo nel caso in cui (cfr. Fig. fxii.5 5) la normale alla superfice è parallela all'asse di rotazione e quindi $R = \infty$ e $k_{\mathcal{P}} = 1/\infty = 0$. In conclusione

Figure 5 fxii.5

$k_{\mathcal{P}} = 0$ se e solo se la normale alla superfice è parallela all'asse di rotazione, se e solo se la tangente al meridiano è perpendicolare all'asse di rotazione.

c) Vediamo che *la curvatura normale $k_{\mathcal{M}}$ del meridiano è nulla se e solo se il meridiano $\mathcal{M}$ che passa per P ha curvatura nulla in P.*
Infatti in un punto P di $\mathcal{S}$ la curvatura principale $k_{\mathcal{M}}$ relativa al meridiano $\mathcal{M}$ che passa per P è (a meno del segno) la curvatura del meridiano, cioè è la curvatura della curva $\mathcal{M}$ nel punto P.

d) Concludiamo: *la curvatura di Gauss è nulla in tutti i punti di* $\mathcal{S} \Leftrightarrow$ *il meridiano è una retta o un segmento.*
$\Leftarrow$ Se il meridiano è una retta (o un segmento) allora ha curvatura nulla in tutti i punti, quindi $k_{\mathcal{M}} = 0$ in tutti i punti della superfice e la curvatura gaussiana $K = k_{\mathcal{P}} k_{\mathcal{M}} = 0$.
$\Rightarrow$ La curvatura di Gauss sia nulla in tutti i punti e supponiamo, per assurdo, che il meridiano $\mathcal{M}$ non sia contenuto in una retta. Allora esiste un punto P di $\mathcal{M}$ in cui la curvatura, di $\mathcal{M}$, è non nulla, cioè $k_{\mathcal{M}}(P) \neq 0$. Dunque la curvatura $k_{\mathcal{M}}$ si mantiene $\neq 0$ in tutti i punti vicini a P. Questo significa che la curva $\mathcal{M}$ vicino a P cambia direzione e quindi la sua tangente, in tutti i punti vicini a P, non potrà essere perpendicolare all'asse di rotazione; pertanto, per il punto b), in qualcuno di questi punti anche la curvatura $k_{\mathcal{P}}$ è $\neq 0$; cioè entrambe le curvature principali sono non nulle, e dunque anche la curvatura gaussiana $K = k_{\mathcal{P}} k_{\mathcal{M}} \neq 0$. Assurdo.

e) Passiamo a descrivere le diverse possibili superfici di rotazione che hanno per meridiano una retta o un segmento. Se tale retta è perpendicolare all'asse allora la

FIGURE 6 fxii.6

superfice $\mathcal{S}$ è piana; se è parallela, allora $\mathcal{S}$ è un cilindro, se il meridiano è incidente all'asse di rotazione in un punto V, allora la superfice è un cilindro di vertice V. In Fig. fxii.6 6 vediamo le superfici di rotazione e curvatura gaussiana nulla che si ottengono facendo ruotare tre segmenti differentemente disposti rispetto all'asse di rotazione.

In conclusione possiamo dire che *una superfice con curvatura nulla che sia di rotazione è piana, oppure è un cilindro o un cono.* $\square$

3. Superfici con curvatura di Gauss $K =$ costante

Ora ci interessiamo delle superfici che hanno curvatura di Gauss costante, vale a dire uguale in tutti i loro punti. Come sappiamo le superfici con curvatura di Gauss nulla sono localmente isometriche al piano e dunque sono localmente isometriche tra loro. Quest'ultimo risultato si estende alle superfici con curvatura di Gauss costante, come stabilisce il seguente

xii.13 TEOREMA 3.1. *Se due superfici $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'$ hanno curvatura di Gauss costante ed uguale tra loro, allora sono localmente isometriche.*

Osservazioni. a) Il Teorema dice che posso "disegnare" su $\mathcal{S}'$ una mappa di una regione abbastanza piccola di $\mathcal{S}$ in modo che la mappa riproduca esattamente le distanze. b) Non si può sperare in un risultato globale. Ad esempio un cilindro circolare non è isometrico ad una striscia di piano, perché bisogna quantomeno tagliarne via una retta per stenderlo sul piano.

Vogliamo mostrare alcuni esempi di superfici con curvatura costante (non nulla).

xii.14 Esercizio 3.2. *Determinare la curvatura di Gauss di una sfera di raggio R.*

Soluzione. Mostriamo che la sfera di raggio R ha curvatura di Gauss costante uguale a $1/R^2$. Sia $\mathcal{S}$ una sfera di raggio R e P un suo punto. Fissiamo una direzione t

Figure 7 fxii.7

tangente alla sfera in P e calcoliamo la curvatura normale k_t ad essa relativa. Si tratta di prendere il piano α che contiene la retta t e il versore normale $\vec{n}_P$ alla sfera in P (vedi Fig. fxii.7 7). Poiché tale versore si trova sulla retta (raggio) che congiunge P al centro della sfera, il piano α passa per il centro della sfera e dunque taglia su di essa una circonferenza $\mathcal{C}$ di raggio R. Come sappiamo la curvatura $K_\mathcal{C}$ di $\mathcal{C}$ è pari a $\frac{1}{R}$. Dunque la curvatura normale k_t alla sfera nel punto P secondo la direzione t è

$$k_t = \pm\frac{1}{R}.$$

Il segno $+$ si ha quando il verso del versore $\vec{n}_P$ è stato scelto verso l'interno e quindi concorda con il verso del versore $\vec{N}_C$ normale alla curva (che per definizione è sempre rivolto verso la concavità della curva). Se $\vec{n}_P$ è diretto verso l'esterno, allora vale il segno $-$. Tutto questo si ricava dalla formula

$$k_t = K_\mathcal{C}\vec{N}_\mathcal{C}.\vec{n}_P = \frac{1}{R}cos\theta = \pm\frac{1}{R}$$

dove θ è l'angolo tra i due versori (in questo caso $\theta = 0$, oppure $\theta = \pi$ e quindi $cos\theta = \pm 1$).

Dunque la curvatura normale k_t non dipende dalla direzione t scelta e pertanto la funzione $t \mapsto k_t$ è costante e il suo massimo e il suo minimo (vale a dire le curvatura principali k_1, k_2) sono uguali:

$$k_1 = k_2 = \pm\frac{1}{R}.$$

In particolare abbiamo ritrovato che tutti i punti di una sfera sono ombelichi.

Ne viene che la curvatura gaussiana $K = k_1k_2$ è pari a

$$K = (\pm\frac{1}{R})(\pm\frac{1}{R}) = \frac{1}{R^2}.$$

□

xii.15 Esercizio 3.3. *È possibile realizzare una pianta di una regione terrestre che rispetti perfettamente le distanze? Vale a dire una pianta tale che la distanza tra due punti P e Q di quella regione e la distanza tra i corrispondenti punti P' e Q' sulla pianta siano legate da un rapporto di proporzionalità (la scala della pianta)?*

Soluzione. No, non è possibile realizzare quanto richiesto. Sia $\mathcal{R}$ la regione della sfera terrestre che è rappresentata nella pianta $\mathcal{P}$ che è una regione piana. Sia $F : \mathcal{R} \to \mathcal{P}$ l'applicazione che fa corrispondere ad ogni punto P di $\mathcal{R}$ la sua immagine $F(P)$ in $\mathcal{P}$; se la richiesta fosse soddisfatta, esisterebbe una certa costante $C > 0$ tale che, comunque presi P, Q in $\mathcal{R}$:

$$||F(P) - F(Q)|| = C\ d_{\mathcal{R}}(P, Q).$$

Dilatiamo di un fattore $1/C$ la pianta, otteniamo una nuova applicazione $\mathcal{R} \to \mathbb{R}^2$ nel piano che soddisfa

$$||P' - Q'|| = d_{\mathcal{R}}(P, Q),$$

dove P', Q' corrispondono a P e Q. Dunque questa è un'isometria, vale a dire $\mathcal{R}$ sarebbe isometrica ad una regione piana; assurdo perché $\mathcal{R}$ ha curvatura di Gauss costante pari a $1/R^2$, dove R è il raggio terrestre e, per il Teorema Egregium di Gauss, se due superfici sono isometriche hanno la stessa curvatura di Gauss. □

L'esercizio mostra che non esistono "mappe piane ed esatte" della sfera.

xii.16 Esercizio 3.4. *Chiarire il significato della seguente affermazione e giustificarla. "Ogni superfice di curvatura gaussiana costante K* **positiva** *è localmente isometrica ad una sfera di raggio $\frac{1}{\sqrt{K}}$".*

Soluzione. L'affermazione significa che se la curvatura gaussiana K di una superfice $\mathcal{S}$ è costante (cioè è la stessa in tutti i punti) e positiva, allora, preso un qualunque punto P di $\mathcal{S}$, esiste una regione $\mathcal{U}$ di $\mathcal{S}$ (eventualmente molto piccola) che contiene P ed è isometrica ad un pezzettino $\mathcal{V}$ di una sfera di raggio $\frac{1}{\sqrt{K}}$.

Il fatto che $\mathcal{U}$ sia isometrica a $\mathcal{V}$ significa che esiste una corrispondenza biunivoca $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ tale che, comunque presi due punti A, B in $\mathcal{U}$ la loro distanza è pari alla distanza tra $f(A)$ e $f(B)$ in $\mathcal{V}$. È anche opportuno ricordare che la distanza tra A e B è la lunghezza del più breve arco di curva che li congiunge e sta sulla superfice $\mathcal{S}$.

Quanto alla giustificazione, sappiamo che se due superfici hanno curvatura gaussiana costante ed uguale, allora sono localmente isometriche (cfr. Teorema 3.1). xii.13

In particolare sia $\mathcal{S}$ una superfice con curvatura costante $K > 0$. Sia $\mathcal{S}'$ una sfera di raggio R, allora la curvatura gaussiana di $\mathcal{S}'$ è $K' = \frac{1}{R^2}$. Dunque scegliendo $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$ le superfici $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'$ hanno la stessa curvatura gaussiana e dunque sono localmente isometriche. □

Prima di cercare altri esempi di superfici con curvatura costante conviene osservare che dilatando una sfera (di raggio R e curvatura di Gauss $K = 1/R^2$) di un fattore $C > 0$ si ottiene una sfera di raggio CR e curvatura $(1/C^2)K$. Lo stesso avviene in generale, come mostra il seguente

xii.17 Esercizio 3.5. *Sia $\mathcal{S}$ una superfice e sia $\mathcal{S}'$ la superfice ottenuta dilatando la prima di un fattore $C > 0$. Allora, in punti corrispondenti delle sue superfici, la curvatura di Gauss viene modificata per un fattore $1/C^2$.*

Soluzione. Sia P un punto di $\mathcal{S}$ e siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due sezioni normali nella direzione delle curvature principali. Se dilatiamo una curva di un fattore $C > 0$, allora in ogni punto il cerchio osculatore verrà dilatato dello stesso fattore e dunque la curvatura (che è il reciproco del raggio del cerchio osculatore) viene modificata di un fattore $1/C$. Quindi le curvature delle curve $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, passando da $\mathcal{S}$ ad $\mathcal{S}'$ sono modificate di un fattore $1/C$. Ma la curvatura di Gauss è il prodotto delle curvature principali, quindi viene modificata di un fattore $1/C^2$. □

Alla luce di questo risultato ci basta trovare superfici con curvatura costante uguale a 1 e -1; altri esempi di curvatura K qualsiasi possiamo trovarli dilatando/contraendo queste superfici.

xii.18 Esercizio 3.6. *Assegnata $K > 0$ descrivere le superfici di rotazione che hanno curvatura costante K.*

<u>Soluzione</u>. Sia $K > 0$. Oltre alla sfera di raggio $\frac{1}{\sqrt{K}}$ esistono infinite altre superfici $\mathcal{S}$ di rotazione che hanno curvatura gaussiana costante K (cioè in tutti i punti di $\mathcal{S}$ la curvatura di gauss è K).

Precisamente, per ogni $a > 0$ esiste una superfice $\mathcal{S}_a$ di rotazione che ha curvatura gaussiana costante $K = 1$ e i cui paralleli hanno al massimo raggio uguale ad a. Per $a = 1$ otteniamo la sfera. Per $0 < a < 1$ la superfice $\mathcal{S}_a$ ha la forma illustrata in Fig. fxii.8 8 a sinistra; questa superfice possiede dei punti singolari (che assomigliano ai vertici di un cono). Per $a > 1$ la superfice $\mathcal{S}_a$ ha la forma dell'immagine di destra; i paralleli lungo cui le "palle" si incollano sono punti singolari. Nei punti singolari non esiste il piano tangente e nemmeno è definita la curvatura di Gauss.

Figure 8 fxii.8

Tutte queste superfici hanno la stessa curvatura $K = 1$, quindi sono localmente isometriche tra loro.

Per ottenere superfici con curvatura $0 < K \neq 1$ è sufficiente ingrandire/rimpicciolire queste superfici di un fattore $1/\sqrt{K}$. □

Ora vediamo esempi di superfici con curvatura di Gauss costante e negativa.

xii.19 Esercizio 3.7. *Descrivere la pseudosfera.*

<u>Soluzione</u>. Immaginiamo che un bambino si tiri dietro un trenino legato con un filo. Il bambino si muove in linea retta e perpendicolare alla posizione iniziale del caretto così come illustrato in Fig. fxii.9 9, dove si vede a sinistra la posizione iniziale e a destra la posizione in un istante successivo.

Si tratta di determinare la traiettoria descritta dal trenino. La tangente alla traiettoria è nella direzione del filo. Quindi tale tangente taglia la retta percorsa

FIGURE 9 fxii.9

dal bambino esattamente nel punto in cui si trova il bambino. E il segmento TB deve avere sempre la stessa lunghezza.

Queste condizioni si traducono in un'equazione differenziale la cui soluzione è la funzione $f(x)$ il cui grafico è la curva cercata. La curva così descritta si chiama *trattrice*[2]. In Fig. fxii.10 10 vediamo alcune immagini successive del moto. Si osservi che

FIGURE 10. Apri il filmato fxii.10

la circonferenza ha sempre lo stesso raggio, cioè la lunghezza del filo resta costante.

Ruotando la trattrice attorno alla retta verticale percorsa da B si ottiene una superfice di rotazione $\mathcal{S}$ (cfr. Fig. fxii.10 10).

La concavità del meridiano è opposta a quella del parallelo, quindi le curvature principali $k_{\mathcal{P}}$ e $k_{\mathcal{M}}$ rispettivamente di parallelo e meridiano sono di segno discorde e il loro prodotto, cioè la curvatura di Gauss, è negativo. Risulta in effetti che la curvatura di Gauss è $K = k_{\mathcal{P}}.k_{\mathcal{M}} = -1$. Questa superfice è detta *pseudosfera.*

Sia $K < 0$; per ottenere una superfice con curvatura di Gauss costante uguale a K è sufficiente dilatare/contrarre la pseudosfera di un fattore $-1/\sqrt{-K}$. $\square$

4. Elicoide

Per illustrare un importante esempio, che riguarda le superfici con curvatura di Gauss non costante, conviene introdurre una superfice interessante: l'elicoide.

xii.20 ESERCIZIO 4.1. *Descrivere l'elicoide.*

Soluzione. **a)** La pala dell'elica di un aeroplano che si muove in direzione retta e in assenza di vento descrive una superfice detta elicoide (cfr. Fig. fxii.11 11) . La richiesta che il moto sia rettilineo è fatta perché il centro dell'elica descriva una retta detta *asse dell'elicoide.* L'assenza di vento è richiesta affinché il rapporto tra la velocità

[2]Se il filo è lungo 1 essa è il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{1-x^2} - acosh\frac{1}{x}$.

FIGURE 11. Apri il filmato fxii.11

di rotazione della pala e la velocità dell'aereoplano sia costante (questa costante dipende solo dall'inclinazione della pala che stabilisce quanto l'elica *mangia* l'aria). Ne segue che la distanza tra le spire è costante. Naturalmente per ottenere la

FIGURE 12. Apri il filmato fxii.12

superfice matematica bisogna sostituire alla pala una retta; dunque l'elicoide è una superfice rigata.

Possiamo anche descrivere l'elicoide come la superfice ottenuta da un foglio di materiale duttile che venga deformato come in Fig. fxii.12 12

b) Altrimenti possiamo anche descrivere l'elicoide come una doppia scala a chiocciola, le cui due rampe sono sfasate di 180^o.

c) Si osservi infine che le rette bianche e nere evidenziate in Fig. fxii.13 13 e che corrispondono alle rette verticali del foglio sono eliche. In altri termini ogni punto della pala dell'elica dell'aereo descrive un'elica. Come sappiamo[3] in ogni punto

FIGURE 13 fxii.13

[3]Corso di Geometria.

dell'elica la normale alla curva è diretta verso l'asse in direzione perpendicolare . Dunque possiamo anche dire che l'elicoide è la superfice generata dalle rette normali ad un'elica. □

xii.21 Esercizio 4.2. *Scrivere l'equazione parametrica dell'elicoide.*

Soluzione. Ricordo che per descrivere una superfice rigata $\mathcal{S}$ si può procedere come segue. Si sceglie su $\mathcal{S}$ una direttrice $\mathcal{C}$, cioè una curva che incontra tutte le generatrici. Si descrive la direttrice $\mathcal{C}$ come traiettoria di un punto mobile $P(s)$ e si indica con $\vec{V}(s)$ un vettore direzione della generatrice r_s che passa per $P(s)$. I punti di r_s sono della forma

$$P(s) + u\,\vec{V}(s)$$

al variare di $u \in \mathbb{R}$. Quindi l'equazione parametrica di $\mathcal{S}$ è

$$X(s,u) = P(s) + u\,\vec{V}(s).$$

Nel caso dell'elicoide conviene scegliere come direttrice $\mathcal{C}$ l'asse dell'elicoide e prendere le coordinate in modo che tale asse coincida con l'asse delle z. La generatrice che passa per il punto

$$P = (0,0,z)$$

di $\mathcal{C}$ ha vettore direzione $\vec{V}$ orizzontale e possiamo anche sceglierlo di lunghezza 1. Dunque

$$\vec{V} = (cos\theta, sin\theta, 0).$$

Si tratta di stabilire il legame tra la quota z del punto P e l'angolo θ. Immaginiamo che mentre il punto P percorre l'asse delle z il vettore direzione $\vec{V}$ ruoti. Sappiamo che il rapporto tra la quota guadagnata da P e l'angolo percorso da $\vec{V}$ rimane costante, cioè se $\theta = s$, allora $z = hs$ dove h è una costante. Dunque

$$\vec{V}(s) = (\cos s, \sin s, 0), P(s) = (0,0,hs).$$

E l'equazione parametrica cercata è

$$X(s,u) = P(s) + u\,\vec{V}(s) = (u\cos s, u\sin s, hs).$$

□

xii.22 Esercizio 4.3. *Determinare la linea di stringimento di un'elicoide.*

Soluzione. Nel caso dell'elicoide la situazione è particolarmente semplice: l'asse dell'elicoide è perpendicolare a tutte le generatrici e quindi prese due generatrici r ed s che tagliano l'asse rispettivamente nei punti P e Q, il segmento PQ dell'asse è il segmento perpendicolare ad entrambe le generatrici r ed s. All'avvicinarsi di s ad r il piede P su r della perpendicolare non cambia, dunque P è centrale e la linea di stringimento è l'asse (cfr. Fig. 14 in cui si vede che al variare della generatrice s il punto P resta sempre lo stesso). Dunqe P è il punto centrale, cioè i punti centrali sono i punti dell'asse dell'elicoide.

Altra soluzione. Consideriamo l'equazione parametrica dell'elicoide:

$$X(s,u) = P(s) + u\,\vec{V}(s) = (0,0,hs) + u(\cos s, \sin s, 0).$$

Il punto $P(s)$ descrive l'asse dell'elicoide e il vettore $\vec{V}(s)$ è il vettore direzione della generatrice che esce da $P(s)$ (cfr. Fig. 15).

FIGURE 14 fxii.14

FIGURE 15 fxii.15

Allora

$$\frac{dP}{ds} = (0, 0, h)$$

e

$$\frac{d\vec{V}}{ds} = (-\sin s, \cos s, 0),$$

quindi i vettori $\frac{dP}{ds}, \frac{d\vec{V}}{ds}$ sono ortogonali e perciò i punti $P(s)$, cioè i punti dell'asse dell'elicoide, sono i punti centrali. □

xii.23 ESERCIZIO 4.4. *Calcolare la curvatura di Gauss dell'elicoide.*(Suggerimento: si ricordi la formula $K = -\frac{p^2}{(p^2+d^2)^2}$ per la curvatura di Gauss di una superfice rigata).

Soluzione. Per la formula ricordata, dato un punto P dell'elicoide, la curvatura di Gauss in P è

$$K(P) = -\frac{p^2}{(p^2 + d^2)^2},$$

dove p è il parametro di stringimento della generatrice che passa per P e d è la distanza di P dal punto centrale di tale generatrice. Come sappiamo la linea di stringimento dell'elicoide è l'asse e le generatrici sono perpendicolari all'asse; pertanto d è la distanza di P dall'asse. Per evidenti ragioni di simmetria il parametro di stringimento è lo stesso per tutte le generatrici, dunque p è una costante. Si tratta di calcolarla.

Primo modo. Ricordo che il valore assoluto de parametro di stringimento della generatrice r è (cfr. Proposizione 10.24 ??)

$$|p(r)| = \lim_{r' \to r} \frac{D}{\phi},$$

dove r' è un'altra generatrice vicina a r, D è la distanza tra le due generatrici e ϕ è l'angolo tra di esse.

Sia dunque P un punto dell'asse dell'elicoide e P' un punto dell'asse ad esso vicino. Le generatrici r ed r' che passano per P e P' sono entrambe perpendicolari all'asse (per costruzione dell'elicoide), quindi la loro distanza

$$D = ||P' - P||$$

è pari alla distanza tra i due punti. D'altra parte, nell'elicoide, il rapporto tra la velocità con cui la generatrice si muove in direzione dell'asse e la velocità con cui ruota attorno all'asse è una certa costante h, cioè

$$h = \frac{||P' - P||}{\phi}.$$

Ma allora $h = \frac{D}{\phi}$, e non è neppure necessario passare al limite per concludere che

$$|p| = h.$$

<u>Altra soluzione</u>. L'equazione dell'elicoide è

$$X(s,u) = P(s) + u\,\vec{V}(s)$$

dove

$$P(s) = (0,0,hs)$$

è la curva di stringimento e

$$\vec{V}(s) = (\cos s, \sin s, 0)$$

è il versore direzione della generatrice che passa per $P(s)$.

Ricordo (Definizione 10.23 ??) che il parametro di stringimento soddisfa la relazione

$$\frac{dP}{ds} \times \vec{V} = p\frac{d\vec{V}}{ds}.$$

Risulta

$$\frac{dP}{ds} \times \vec{V}(s) = (0,0,h) \times (\cos s, \sin s, 0) = h(-\sin s, \cos s, 0) = h\frac{d\vec{V}}{ds},$$

quindi h è il parametro di stringimento.

<u>Conclusione</u>. La curvatura di Gauss in un punto P dell'elicoide che dista d dall'asse è

$$K(P) = -\frac{h^2}{(h^2+d^2)^2},$$

dove h è la costante che caratterizza l'elicoide (il rapporto tra la velocità della generatrice in direzione dell'asse e la sua velocità di rotazione).

Ovvero descrivendo l'elicoide con l'equazione

$$X(s,u) = P(s) + u\,\vec{V}(s) = (0,0,hs) + u(\cos s, \sin s, 0),$$

risulta

$$K(X(s,u)) = -\frac{h^2}{(h^2+u^2)}.$$

□

5. Superfici con curvatura di Gauss K non costante

Gli ellissoidi, i paraboloidi ad una falda, gli iperboloidi a due falde sono superfici costituite da punti ellittici, quindi con curvatura positiva ed evidentemente che varia da punto a punto. I paraboloide a sella e gli iperboloidi ad una falda sono superfici i cui punti sono iperbolici e quindi sono a curvatura negativa ed evidentemente che varia da punto a punto. Un toro ha punti ellittici, parabolici e iperbolici, quindi la sua curvatura di Gauss assume valori positivi, nulli e negativi.

Se due superfici hanno la stessa curvatura di Gauss (non costante) allora sono localmente isometriche? È bene comprendere che la domanda, per quanto appaia come una naturale generalizzazione del Teorema 3.1, sia mal posta. Per esemplificare che cosa significa la frase “ieri, per tutta la giornata, a Parma e a Pechino, c’è stata la medesima temperatura”? Evidentemente nelle ore centrali la temperatura è salita ed è scesa di notte, quindi il senso deve essere: alla stessa ora (orario locale) le temperatura a Parma e Pechino era la stessa. Per stabilire l’uguaglianza della funzione T temperatura di Parma, con la temperatura T' di Pechino, dobbiamo stabilire una corrispondenza tra i domini. Un altro esempio: che senso ha domandarsi se le funzioni $\arcsin x$ definita in $(-1, 1)$ e la funzione $\log(x-1)$ che è definita per $x > 1$ sono uguali? Se non sono definite nello stesso dominio la cosa non ha senso.

Torniamo alle nostre superfici: la curvatura di Gauss della superfice $\mathcal{S}$ è una funzione $K : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, mentre la curvatura di Gauss della superfice $\mathcal{S}'$ è una funzione $K' : \mathcal{S}' \to \mathbb{R}$. Se le due funzioni sono costanti posso dire che sono uguali se assumono lo stesso valore, in ogni altro caso, non potendo confrontare i rispettivi domini di definizione, la domanda è senza senso. Bisogna riformulare il problema.

Sia data una corrispondenza biunivoca $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ tale che punti corrispondenti hanno la stessa curvatura (cioè se P è un punto di $\mathcal{S}$ allora la curvatura $K(P)$ di $\mathcal{S}$ in P è uguale alla curvatura $K(f(P))$ di $\mathcal{S}'$ in $f(P)$). Posso dedurne che f è un’isometria ? La risposta è no. In Fig. 11 fxii.11 a destra vediamo due superfici che sono in corrsipondenza biunivoca (basta proiettarle verticalmente una sull’altra). In effetti a sinistra vediamo come possibile deformare la superfice rossa in quella celeste. Le due superfici hanno la stessa curvatura, ma non sono isometriche. Ad esempio le sezioni orrizzontali sulla superfce celeste sono delle circonferenze e le corrispondenti curve sulla superfice rossa sono delle eliche. Poich il raggio della circonferenza pari al raggio del cilidro su cui sta l’elica evidente che l’elica pi lunga della corrispondente circonferenza.

fig.1

In fig. 2 vediamo due cilindri di diversa lunghezza tappati da emisfere. L’allungamento del cilindro permette di stabilire una corrispondenza biunivoca tra le due superfici che l’dentit sulle semisfere. Quindi in punti corrispondenti la curvatura la sessa, ma le due superfici non sono evidentemente isometriche.

fig. 2

Esistono tuttavia dei teoremi globali molto interessanti. Una superfice completa se e possibile prolungare indefinitamente ogni geodetica. Ad esempio una sfera completa (posso immaginare di riavvolgere infinite volte un cerchio massimo su se stesso) un sfera meno un punto no (se ad esempio tolgo il polo nord, se mi muovo da Parma lungo il meridiano, giunto al polo nord mi devo fermare, perch manca il punto). Un pezzo limitato di cilindro non completo, perch le generatrici sono geodetiche e quindi dovrebbero essere tutte comprese nel cilindro. Si pu dimostrare che

a) le sfere sono le uniche superfici completa prive di punti singolari e prive di autointersezioni che abbiano curvatura costante positiva. b) Una superfice completa, priva di punti singolari e autointersezioni con curvatura nulla necessariamente un cilindro. c) Una superfice completa e priva di punti singolari e limitata (cio che si pu mettere dentro una scatola abbastanza grande) con curvatura positiva (anche non costante) allora la buccia di un corpo convesso d) Se due superfci complete e prive di punti singolari ed autointersezioni e che hanno curvatura positiva sono isometriche, allora si ottengono l'una dall'altra con una trasfomazione rigida dello spazio.