

## CORSO DI CURVE E SUPERFICI 2007-08

Per aprire i files collegati ad alcune figure è necessario installare un programma gratuito scaricabile dalla pagina <http://www.pacifict.com/FreeStuff.html>. Sono disponibili versioni sia per Mac che per Windows.

### 1. PIANO TANGENTE AD UNA SUPERFICE

**1.1. Definizione di piano tangente.** La nozione di piano tangente ad una superficie in un punto può essere introdotta con argomenti analoghi a quelli usati per la retta tangente ad una curva.

**Definizione 1.1.** *Data una superficie  $S$  ed un suo punto  $P$  diremo che un piano  $\tau$  passante per  $P$  è il piano tangente ad  $S$  se, **comunque** fissato il formato  $L \times L \times L$  della copia, esiste un ingrandimento di un fattore  $N_0$  abbastanza grande per cui, in ogni copia  $L \times L \times L$ , centrata in  $P$ , realizzata con fattore di ingrandimento **almeno**  $N_0$ , la superficie e il piano  $\tau$  sono indistinguibili.*

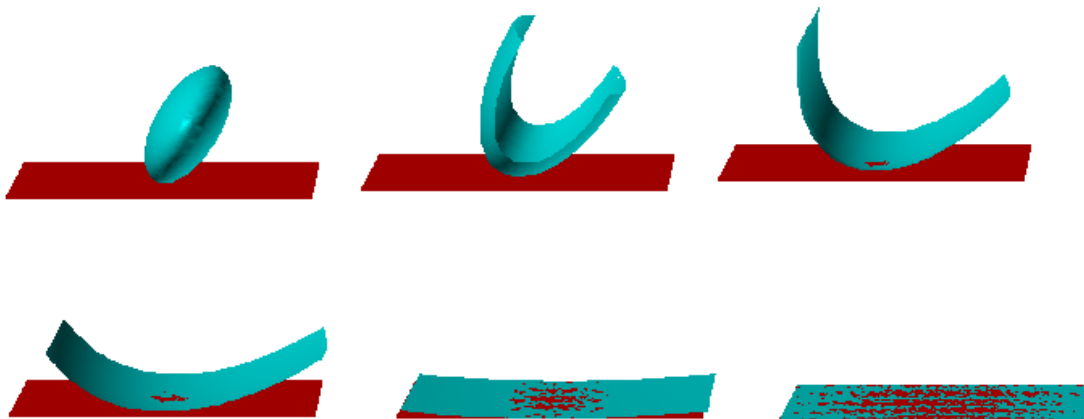


FIGURE 1. Aprendo il file è possibile modificare il punto di tangenza

In Fig. 1 vediamo una serie di immagini ingrandite, con fattore sempre maggiore, fino a quando superficie e piano non coincidono. Una conseguenza importante di questa definizione è che:

**Proposizione 1.2.** *Sia  $\tau$  il piano tangente ad una superficie  $S$  in un suo punto  $P$ . Se  $C$  è una curva che giace sulla superficie  $S$ , passa per  $P$  e possiede la tangente in  $P$ , allora tale tangente appartiene al piano  $\tau$ .*

*In altri termini: le rette tangenti - in un punto di una superficie - alle curve della superficie che passano per quel punto, giacciono tutte su un piano: il piano tangente alla superficie in quel punto.*

Dimostrazione. Fissiamo un formato  $L \times L \times L$  e prendiamo una copia della superficie con centro in  $P$  e ingrandimento molto grande. Allora la porzione di superficie  $\mathcal{S}$  visibile in fotografia apparirà coincidente con il piano  $\tau$ . Dunque tutte le curve della superficie che passano per  $P$  appariranno come curve del piano  $\tau$ . Vale a dire presa una curva  $\mathcal{C}$  che sta sulla superficie e passa per  $P$ , la porzione di curva contenuta nell'immagine apparirà giacere sul piano  $\tau$ . Pertanto anche la tangente a questa curva apparirà essere sul piano  $\tau$ .  $\square$

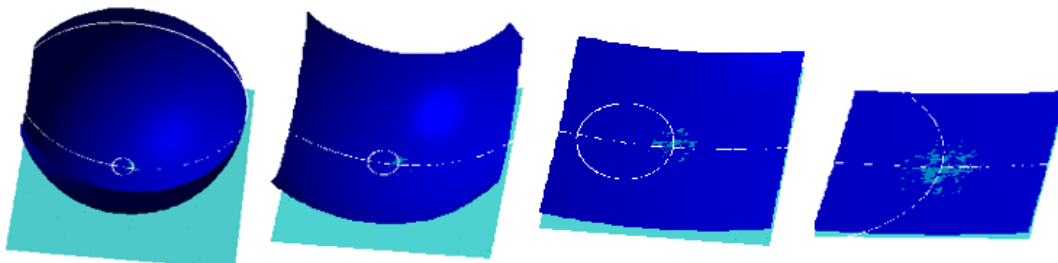


FIGURE 2. Apri il file

In Fig. 2 si vede la sequenza di ingrandimenti che porta ad identificare una porzione di sfera al suo piano tangente. Si vedono anche due curve sulla sfera e si nota come, a seconda della curva considerata, sia necessario un diverso fattore d'ingrandimento per ridurre la curva alla sua retta tangente. Si potrebbe dimostrare (ma è intuitivo) che il fattore d'ingrandimento necessario dipende dalla curvatura  $k$  della curva nel punto.

**Esempio 1.3.** La superficie  $\mathcal{S}$  in Fig. 3a nel punto  $P$  evidenziato non possiede piano

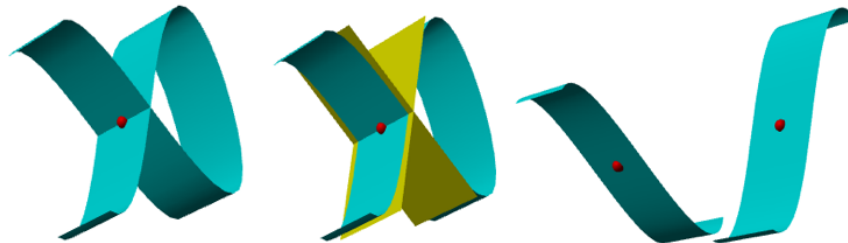


FIGURE 3. a - b - c

tangente o meglio ne possiede due (visibili, in giallo, in Fig. 3b). Pertanto diremo che  $P$  è un *punto singolare* di  $\mathcal{S}$ . Tuttavia possiamo suddividere una porzione di superficie vicina a  $P$  in due pezzi (vedi Fig. 3c) in modo tale che in ciascuno di questi due pezzi ogni punto abbia un unico piano tangente.

Mostreremo degli esempi che presentano problemi maggiori di questo e che non possono essere così facilmente superati. Per esporre questi esempi introduciamo le superfici di rotazione.

## 2. SUPERFICI DI ROTAZIONE

**Definizione 2.1.** Una superficie di rotazione è la superficie generata dalla rotazione di una curva  $\mathcal{C}$  (eventualmente gobba<sup>1</sup>) attorno ad una retta  $a$ , detta asse di rotazione.

Precisamente, per ogni punto  $P$  di  $\mathcal{C}$ , consideriamo la circonferenza passante per  $P$  che giace sul piano perpendicolare all'asse  $a$  e ha centro sull'asse. L'insieme di queste circonferenze forma la superficie  $\mathcal{S}$ .

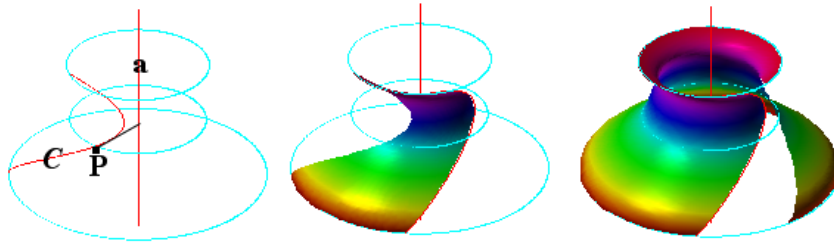


FIGURE 4. Apri il filmato

**Esempio 2.2.** In Fig. 4a vediamo una curva  $\mathcal{C}$ , l'asse di rotazione  $a$  e alcune delle circonferenze lungo cui ruotano i punti di  $\mathcal{C}$ . Nelle Figg. 4b-c vediamo il processo con cui viene generata la superficie.

In Fig. 5b sono evidenziate le circonferenze descritte dai punti della generatrice

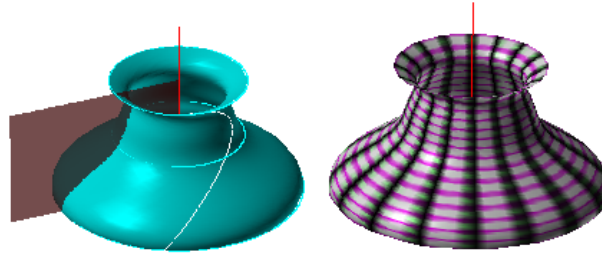


FIGURE 5. a - b

intorno all'asse e le curve che si ottengono tagliando la superficie con un semipiano uscente dall'asse (cfr. Fig. 5a). A proposito di queste curve possiamo dire qualcosa che vale per una qualunque superficie di rotazione.

**Osservazione 2.3.** Sia  $\mathcal{S}$  una superficie di rotazione.

(i) Ogni piano ortogonale all'asse taglia sulla superficie una circonferenza, detta parallelo.

(ii) Ogni semipiano uscente dall'asse taglia sulla superficie una curva detta meridiano (vedi Fig. 5a). I meridiani sono tutti uguali tra loro e la rotazione attorno all'asse di un qualunque meridiano genera la stessa superficie  $\mathcal{S}$ . In particolare possiamo sempre vedere una superficie di rotazione come generata da una curva piana.

<sup>1</sup>Cioè non piana.

**Esempio 2.4.** Si confronti la curva gobba  $\mathcal{C}$  che genera la superficie di Fig. 4 con un meridiano della stessa.

Per stabilire un'importante proprietà di meridiani e paralleli, diamo la seguente

**Definizione 2.5.** Date due curve  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  nello spazio che si tagliano in un punto  $P$ , l'angolo da esse formato in  $P$  è, per definizione, l'angolo formato dalle rette tangenti<sup>2</sup>.

**Proposizione 2.6.** Meridiani e paralleli di una superficie di rotazione sono tra loro perpendicolari<sup>3</sup>.

Dimostrazione. Sia  $P$  un punto di una superficie di rotazione  $\mathcal{S}$  (cfr. Fig. 6). Il

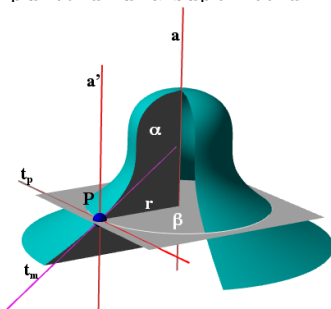


FIGURE 6

parallelo passante per  $P$  giace su un piano  $\beta$  ortogonale all'asse di rotazione  $a$  e dunque, condotta per  $P$  la parallela  $a'$  all'asse, risulta anch'essa perpendicolare a questo piano. Cioè  $a'$  è perpendicolare a tutte le rette di questo piano che passano per  $P$ , in particolare è perpendicolare alla tangente  $t_p$  al parallelo.

D'altro canto, quest'ultima è perpendicolare al raggio  $r$  (del parallelo) passante per  $P$ . Dunque  $t_p$  è perpendicolare ad  $a'$  e ad  $r$  in  $P$  e dunque a tutte le rette del piano  $\alpha$  che contiene  $a'$  ed  $r$ . Ma  $\alpha$  è il piano che contiene l'asse  $a$  di rotazione e il punto  $P$ , dunque  $\alpha$  contiene anche il meridiano e la sua tangente  $t_m$ .

Pertanto  $t_p$  è perpendicolare a  $t_m$ . □

**Esercizio 2.7.** Dimostrare la Proposizione 2.6.

**Osservazione 2.8.** Immaginiamo di realizzare una superficie di rotazione, ad es. quella in Fig.5b costruendo i paralleli e i meridiani con del fil di ferro. Per collegare tra loro i paralleli con i meridiani possiamo usare dei giunti tutti uguali perché l'angolo da essi formato è sempre retto. Consideriamo invece la superficie in Fig. 7; si tratta di un ellissoide su cui si possono individuare, impropriamente perché non è una superficie di rotazione, meridiani e paralleli come in figura. Tuttavia, in questo caso, gli angoli da essi formati non sono né retti, né tutti uguali tra loro; pertanto, per una simile realizzazione della superficie, sarebbero necessari giunti diversi a seconda del punto in cui colleghiamo un meridiano con un parallelo.

<sup>2</sup>Stiamo supponendo che entrambe le curve posseggano tangente in  $P$ .

<sup>3</sup>I paralleli, che sono circonferenze, hanno tangente in ogni punto. Qui stiamo supponendo che anche il meridiano, che può essere una qualunque curva piana, abbia tangente in ogni punto.

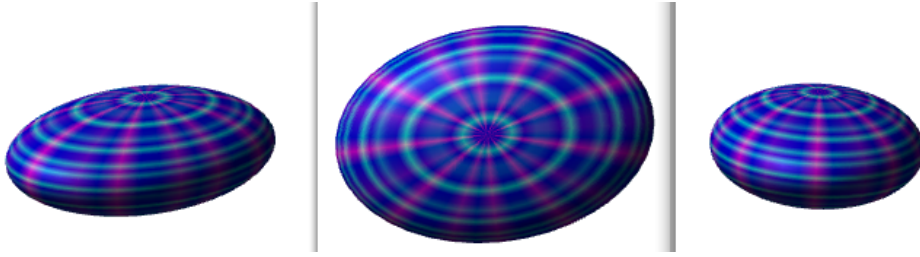


FIGURE 7

**Osservazione 2.9.** Data una superficie di rotazione  $\mathcal{S}$ , i piani del fascio che ha per asse l'asse di rotazione sono piani di simmetria per  $\mathcal{S}$  e l'asse di rotazione è asse di simmetria.

Ciò significa che se  $\alpha$  è un piano che contiene l'asse  $a$  di rotazione e  $P \in \mathcal{S}$ , allora il simmetrico  $P'$  di  $P$  rispetto ad  $\alpha$  appartiene ad  $\mathcal{S}$ . Inoltre anche il simmetrico  $P''$  di  $P$  rispetto all'asse appartiene alla superficie  $\mathcal{S}$  (vedi Fig. 8).

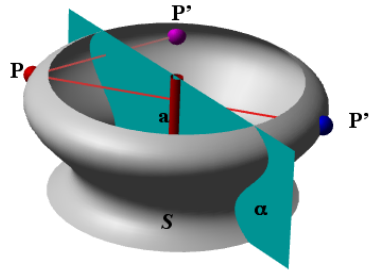


FIGURE 8

**2.1. Tangente ad una superficie di rotazione.** In questo paragrafo vogliamo studiare l'esistenza del piano tangente in un punto di una superficie di rotazione e, quando esso non è ben definito, che cosa esattamente può succedere.

**Esempio 2.10.** Consideriamo la superficie  $\mathcal{S}$  generata dalla rotazione del meridiano



FIGURE 9. a - b Apri il file se vuoi vedere la superficie da un altro punto di vista.

in Fig. 9a. Si tratta di un arco di cuspidi con vertice in  $P$  e che tocca l'asse di rotazione in  $Q$ . Il vertice  $P$  ruotando genera il parallelo  $\mathcal{C}$  (vedi Fig. 9b) i cui punti

sono tutti singolari (i.e. privi di piano tangente) per la superficie  $\mathcal{S}$ . Gli altri punti della cuspidale - diversi da  $P$  e da  $Q$  - generano punti di  $\mathcal{S}$  in cui il piano tangente è ben definito. Problemi invece insorgono nel punto  $Q$  in cui la curva generatrice taglia l'asse di rotazione; al punto  $Q$  corrisponde, su  $\mathcal{S}$ , il punto  $V$  che è singolare.

La situazione esemplificata rispecchia un fatto generale:

**Proposizione 2.11.** *Sia  $\mathcal{S}$  una superficie di rotazione il cui meridiano  $\mathcal{C}$  non ha punti singolari<sup>4</sup>. Allora in tutti i punti  $P$  di  $\mathcal{S}$ , tranne al più quelli in comune con l'asse di rotazione, esiste il piano tangente.*

*Precisamente il piano tangente è il piano che contiene le rette  $t_p$  e  $t_m$  tangenti in  $P$  al parallelo e al meridiano che passano per  $P$ .*

**Osservazione 2.12.** È opportuno rimarcare il fatto che nella Proposizione 2.11 si parla di meridiano e non di una superficie generata dalla rotazione di una curva. E con ragione, perché ruotando una curva priva di punti singolari si possono generare delle singolarità fuori dall'asse di rotazione. Ad esempio si consideri l'arco di senoide in Fig. 10a; come si vede in Fig. 10b, i punti  $P$  e  $Q$  dell'arco di senoide

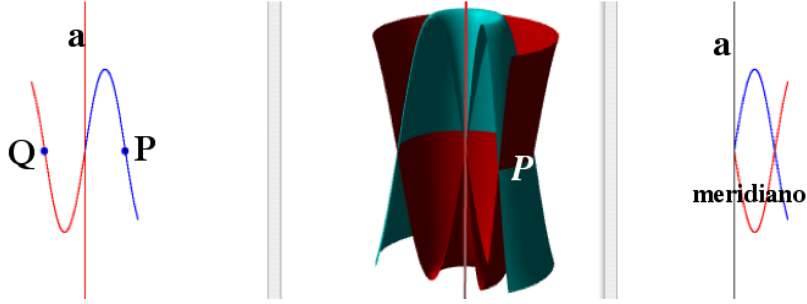


FIGURE 10. a - b - c

generano lo stesso parallelo  $\mathcal{P}$  tutto costituito di punti singolari per la superficie (sono del tipo considerato nell'Esempio 1.3 con due piani tangenti), benché l'arco di senoide non contenga punti singolari. Il fatto è che il meridiano (vedi Fig. 10c) ha un punto singolare!

**Esercizio 2.13.** *Giustificare l'ultima affermazione della Proposizione 2.11.*

**Soluzione.** La Proposizione 1.2 afferma che le rette, tangenti - in un punto  $P$  di una superficie  $\mathcal{S}$  - alle curve di  $\mathcal{S}$  che passano per  $P$ , giacciono tutte su un piano: il piano  $\tau$  tangente alla superficie in quel punto.

Nel caso particolare di una superficie  $\mathcal{S}$  di rotazione, per un punto  $P$  di  $\mathcal{S}$  che non sta sull'asse, passano due curve della superficie: un parallelo  $\mathcal{P}$  ed un meridiano  $\mathcal{M}$ . Dunque le tangenti  $t_p, t_m$  in  $P$  a queste due curve stanno sul piano tangente  $\tau$ .  $\square$

Resta da studiare cosa accade per i punti in cui la superficie di rotazione taglia l'asse di rotazione:

<sup>4</sup>Vale a dire in ogni punto di  $\mathcal{C}$  è ben definita la retta tangente

**Proposizione 2.14.** *Sia  $\mathcal{S}$  la superficie di rotazione generata da una curva piana  $\mathcal{C}$ , complanare all'asse di rotazione  $a$ , che taglia l'asse in un punto  $P$ . Supponiamo che in  $P$  esista la retta tangente  $t$  alla curva.*

(i) *Se l'asse  $a$  è tangente alla curva  $\mathcal{C}$  nel punto  $P$  (i.e.  $a = t$ ) allora  $P$  è un punto singolare e il piano tangente alla superficie nel punto  $P$  degenera ad una retta, l'asse  $a$  stesso (nel senso che, ingrandendo - con centro in  $P$  - di un fattore sufficientemente grande, superficie e asse risultano indistinguibili).*

(ii) *Se l'asse  $a$  non è nè tangente nè perpendicolare alla curva  $\mathcal{C}$  in  $P$ , allora il piano tangente ad  $\mathcal{S}$  in  $P$  degenera nel cono generato dalla rotazione della retta  $t$  attorno ad  $a$  (nel senso che, ingrandendo - con centro in  $P$  - di un fattore sufficientemente grande, superficie e cono risultano indistinguibili).*

(iii) *Se l'asse  $a$  è perpendicolare alla curva  $\mathcal{C}$  in  $P$ , e, vicino a  $P$ ,  $\mathcal{C}$  è simmetrica rispetto all'asse, allora esiste il piano tangente ad  $\mathcal{S}$  in  $P$  ed è il piano perpendicolare all'asse di rotazione.*

(iv) *Se l'asse  $a$  è perpendicolare alla curva  $\mathcal{C}$  in  $P$ , ma, vicino a  $P$ ,  $\mathcal{C}$  non è simmetrica rispetto all'asse, allora  $P$  è un punto singolare, intersezioni di due fogli di superficie che hanno entrambi lo stesso piano tangente, il piano per  $P$  perpendicolare all'asse di rotazione.*

Non diamo una dimostrazione di questa Proposizione, ma nei seguenti esercizi esemplifichiamo i diversi casi.

**Esercizio 2.15.** *Si consideri la superficie  $\mathcal{S}$  ottenuta ruotando una circonferenza  $\mathcal{C}$  attorno ad una retta  $a$  ad essa complanare, distinguendo i seguenti casi: (i) la retta è esterna, (ii) la retta è tangente, (iii) la retta è secante, ma non passa per il centro, (iv) la retta passa per il centro della circonferenza.*

*Si faccia uno schizzo della superficie nei diversi casi, si individuino i punti singolari e si descriva in questi punti il comportamento tangenziale di  $\mathcal{S}$ .*

**Soluzione.** (i) La superficie  $\mathcal{S}$  è a forma di ciambella e si chiama toro (vedi Fig. 11). Poiché la circonferenza non interseca l'asse, per la Proposizione 2.11,  $\mathcal{S}$  è priva di

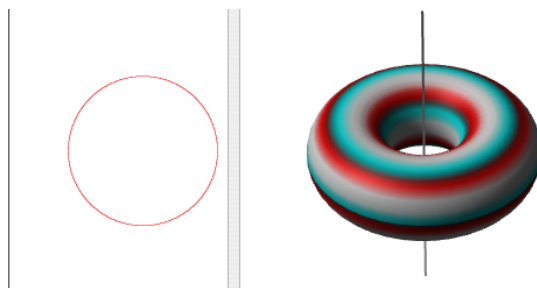


FIGURE 11

punti singolari e in ogni suo punto il piano tangente è ben definito.

(ii) Come si vede dalla Fig. 12b la superficie  $\mathcal{S}$  è una specie di toro senza buco (in figura, per maggior chiarezza, si è trascurato di disegnare uno spicchio della superficie). C'è un unico punto singolare che corrisponde al punto di tangenza tra circonferenza  $\mathcal{C}$  e asse  $a$ . Ingrandendo molto la superficie  $\mathcal{S}$  con centro in  $P$  si ottiene (vedi Figg. 12c-d) una retta (precisamente l'asse di rotazione) e non un piano tangente (esattamente come prevede la Proposizione 2.14(i)).

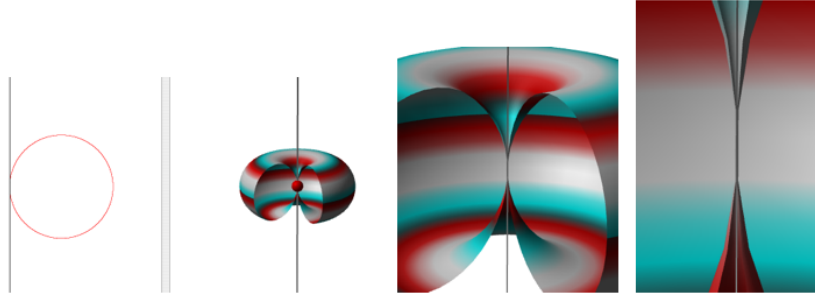


FIGURE 12. a - b - c - d. Aprendo il file è possibile ingrandire l'immagine centrale e vedere la retta *tangente*.

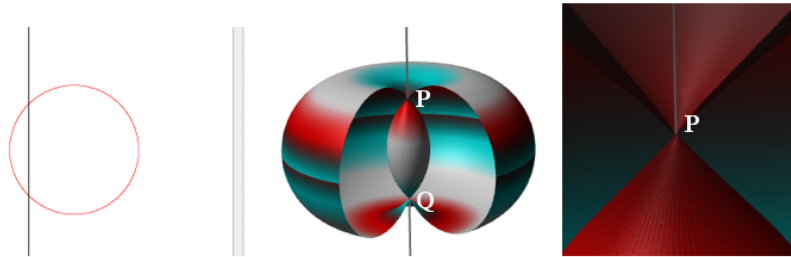


FIGURE 13. Aprendo il file è possibile ingrandire l'immagine centrale e vedere il cono *tangente*.

(iii) Come si vede dalla Fig. 13 nel caso che l'asse sia secante (ma non passi per il centro) si ottiene una superficie con due involucri che si toccano nei punti  $P$  e  $Q$  che sono singolari. Ingrandendo molto la superficie con centro in  $P$  o in  $Q$  si ottiene un cono (così come prevede la Proposizione 2.14(ii)).

Naturalmente l'apertura del cono dipende dalla distanza dell'asse dal centro della circonferenza. Tale apertura è tanto più grande quanto più l'asse è vicino al centro della circonferenza (vedi Fig. 14)

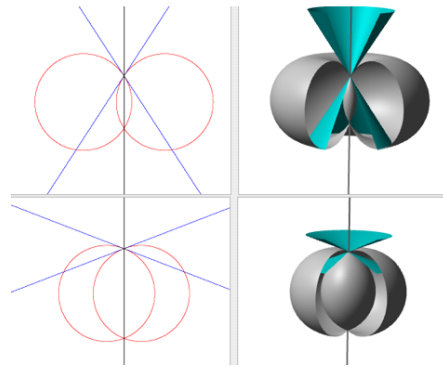


FIGURE 14. Apri il file per vedere l'asse avvicinarsi al centro e il cono aprirsi.

(iv) Infine Fig. 15 se l'asse passa per il centro della circonferenza la superficie di rotazione è una sfera e non ci sono punti singolari e il piano tangente è perpendicolare all'asse (così come prevede la Proposizione 2.14(iii)).  $\square$



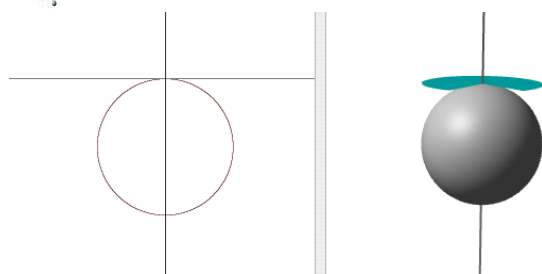


FIGURE 15

**Esercizio 2.16.** Sia  $\mathcal{S}$  la superficie ottenuta ruotando la curva  $\mathcal{C}$  in Fig. 16a attorno all'asse  $a$ . Si faccia uno schizzo della superficie  $\mathcal{S}$ , si individuino gli eventuali punti singolari e si descriva in questi punti il comportamento tangenziale di  $\mathcal{S}$ .

Soluzione. In Fig. 16b vediamo un'immagine della superficie  $\mathcal{S}$ . La curva è perpen-

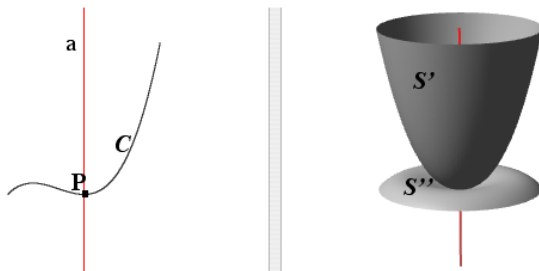


FIGURE 16. a - b

dicolare all'asse in  $P$ , ma non è simmetrica rispetto ad essa, quindi - come prevede la Proposizione 2.14(iv) - la superficie vicino a  $P$  è composta di due fogli  $\mathcal{S}'$  e  $\mathcal{S}''$  che hanno entrambi lo stesso piano tangente in  $P$ : il piano perpendicolare all'asse.  $\square$

**Esercizio 2.17.** Sia  $\mathcal{S}$  la superficie di rotazione generata da una curva piana  $\mathcal{C}$ , complanare all'asse di rotazione  $a$ , che taglia l'asse in un punto  $P$ . Supponiamo che in  $P$  esista la retta tangente  $t$  alla curva. Descrivere i diversi casi possibili e il comportamento tangenziale della superficie  $\mathcal{S}$  in  $P$ .

*Suggerimento.* Si tratta di riportare l'enunciato della Proposizione 2.11. Per ricordarselo basta tenere presente gli esempi contenuti nell'Esercizio 2.15 e l'esempio della “tazzina con piattino” dell'Esercizio 2.16.

## 2.2. Equazione cartesiana di una superficie di rotazione.

**Proposizione 2.18.** L'equazione cartesiana della superficie  $\mathcal{S}$ , generata dalla rotazione di una curva  $\mathcal{C}$  attorno alla retta  $a$ , si può scrivere utilizzando la seguente procedura.

(i) Si prede un sistema di coordinate cartesiane ortogonali che ha come asse delle  $z$  l'asse  $a$  di rotazione.

(ii) Si scrivono le equazioni

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

del moto di un punto  $P(t)$  che descrive la curva  $\mathcal{C}$ .

(iii) Il punto  $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$  ha distanza dall'asse a pari a

$$R(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}.$$

Il parallelo che passa per  $P(t)$  è una circonferenza che giace sul piano  $z = z(t)$ , ha centro sull'asse a nel punto  $(0, 0, z(t))$  e raggio  $R(t)$ ; dunque ha equazione

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R(t)^2 \\ z = z(t) \end{cases}$$

(iv) Si elimina il parametro  $t$  in quest'ultima equazione e si ottiene l'equazione cartesiana di  $\mathcal{S}$ .

**Esercizio 2.19.** Scrivere l'equazione cartesiana della superficie  $\mathcal{S}$  generata dalla rotazione di una parabola attorno al proprio asse (questa superficie si chiama paraboloide di rotazione).

Soluzione. Seguiamo la procedura descritta nella Proposizione 2.18.

(i) Prendiamo come asse delle  $z$  l'asse di rotazione e, per semplificare, prendiamo gli altri assi in modo che la parabola abbia vertice nell'origine, concavità rivolta verso le  $z$  positive e giaccia sul piano  $xz$  (vedi Fig. 17a).

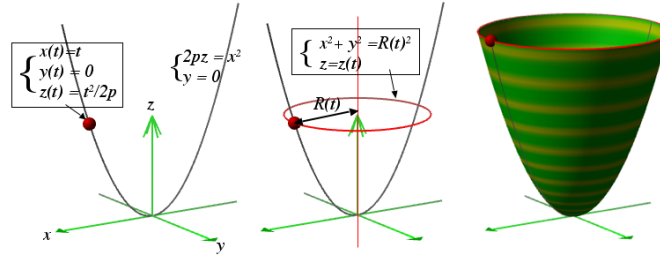


FIGURE 17. a - b - c

(ii) Allora l'equazione nel piano  $xz$  della parabola è della forma  $2pz = x^2$  (cfr. Corso di geometria, cap. III, Proposizione 4.1) e le equazioni del moto di un punto che percorre la parabola saranno (Fig. 17b)

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = t^2/2p \end{cases} ;$$

(possiamo supporre  $t > 0$ , perché basta ruotare metà parabola).

(iii) La distanza del punto  $P(t)$  dall'asse è

$$R(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{t^2 + 0^2} = |t| = t.$$

Dunque il parallelo che passa per  $P(t)$  ha equazione (Fig. 17b)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R(t)^2 \\ z = z(t) \end{cases}.$$

Vale a dire

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = t^2 \\ z = t^2/2p \end{cases}.$$

(iv) Eliminiamo il parametro  $t$  da quest'ultima equazione. Ricaviamo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = t^2 \\ t^2 = 2pz \end{cases}$$

e quindi resta

$$x^2 + y^2 = 2pz$$

che è l'equazione della superficie  $\mathcal{S}$  (cfr. Fig. 17c). □

### 3. TRASFORMAZIONI AFFINI

Non possiamo in questa sede trattare l'argomento con la dovuta accuratezza, ci limitiamo a un'esposizione sommaria.

#### 3.1. Definizione e primi esempi (isometrie).

**Definizione 3.1.** Una trasformazione affine del piano è un'applicazione biunivoca  $\alpha \xrightarrow{F} \beta$  di un piano  $\alpha$  in un piano  $\beta$  che trasforma rette in rette. Una trasformazione affine dello spazio è un'applicazione biunivoca  $F$  dello spazio in sé che trasforma rette in rette.

Vediamo alcuni esempi di trasformazioni affini. Innanzi tutto consideriamo i *moti rigidi*, che consistono nel movimento di tutto il piano come se fosse un foglio rigido (ad es. di compensato) o di tutto lo spazio come se fosse un blocco rigido (ad es. un pezzo di pietra). Ci sono due esempi fondamentali di moti rigidi:

**a)** La *rotazione* del piano attorno ad un punto ovvero la rotazione dello spazio attorno ad una retta.

**b)** Con il termine *traslazione* si intende la trasformazione che sottopone tutti i punti del piano (o dello spazio) ad un medesimo spostamento. In altri termini, fissato un vettore  $\vec{v}$ , consideriamo l'applicazione  $T_{\vec{v}}$  del piano (dello spazio) in se stesso definita da

$$T_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v}.$$

In Fig. 18a si vede l'effetto di una traslazione su un triangolo.

Come detto questi due esempi di moti rigidi sono fondamentali perché è possibile provare che

*tutti i moti rigidi del piano (dello spazio) si ottengono componendo rotazioni intorno ad un punto (intorno ad un asse) e traslazioni.*

**Esercizio 3.2.** Mostrare che dati due piani paralleli, esistono infinite traslazioni che mandano il primo nel secondo piano.

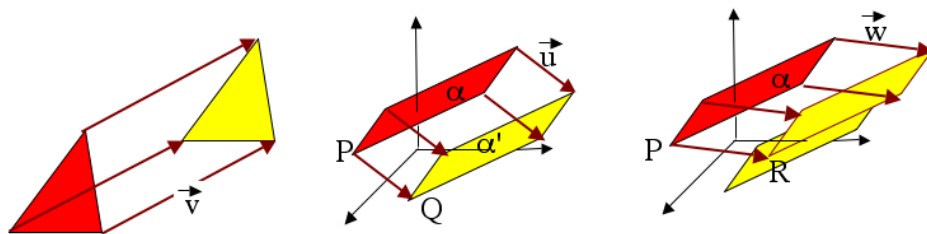


FIGURE 18. a - b - c

Soluzione. In Fig. 18b si vede l'effetto della traslazione  $T_{\vec{u}}$  su un certo piano  $\alpha$ . In particolare  $P$  viene mandato in  $Q$  e dunque  $Q = T_{\vec{u}}(P) = P + \vec{u}$ , pertanto

$$\vec{u} = Q - P.$$

Il piano  $\alpha$  viene così mandato nel piano  $\alpha'$ .

Se, invece di  $Q$ , prendo un altro punto  $R$  del piano  $\alpha'$  e considero il vettore

$$\vec{w} := R - P$$

ottengo, come mostra la Fig. 18c, che la traslazione  $T_{\vec{w}}$  manda il piano  $\alpha$  ancora nel piano  $\alpha'$  (i due parallelogrammi gialli in Fig. 18c sono complanari).

La conclusione è che

*dati due piani paralleli  $\alpha, \alpha'$  e comunque scelti un punto  $P$  di  $\alpha$  e un punto  $Q$  di  $\alpha'$ , la traslazione  $T_{\vec{v}}$ , dove  $\vec{v} = Q - P$ , manda il piano  $\alpha$  nel piano  $\alpha'$ .*

□

Lo stesso discorso vale per le rette:

*date due rette parallele  $r, r'$  e comunque scelti un punto  $P$  di  $r$  e un punto  $Q$  di  $r'$ , la traslazione  $T_{\vec{v}}$ , dove  $\vec{v} = Q - P$ , manda la retta  $r$  nella retta  $r'$ .*

Altri esempi importanti di trasformazioni affini sono date dalle *riflessioni*: la riflessione del piano rispetto ad una retta e la riflessione dello spazio rispetto ad un piano. Precisamente, fissata una retta  $r$  del piano, la riflessione rispetto ad  $r$  è la trasformazione che manda ciascun punto  $P$  del piano nel suo simmetrico  $P'$  rispetto alla retta  $r$ . Fissato un piano  $\alpha$  nello spazio, la riflessione rispetto ad  $\alpha$  è la trasformazione che manda ciascun punto  $P$  dello spazio nel suo simmetrico  $P'$  rispetto al piano  $\alpha$ .

Tutte queste applicazioni (rotazioni, traslazioni, riflessioni) sono trasformazioni affini, infatti è evidente che mandano rette in rette e inoltre sono tutte biunivoche. Per verificare quest'ultimo aspetto basta osservare che posseggono un'inversa: l'inversa di una rotazione in senso antiorario di un angolo  $\theta$  è la rotazione (intorno allo stesso punto o asse) in senso orario dello stesso angolo; l'inversa della traslazione  $T_{\vec{v}}$  è  $T_{-\vec{v}}$ ; ogni riflessione è l'inversa di se stessa, perchè se  $P'$  è il simmetrico di  $P$  rispetto alla retta  $r$  (rispetto al piano  $\alpha$ ), allora  $P$  è il simmetrico di  $P'$ .

Mentre i moti rigidi trasformano ogni figura in una figura uguale, ma diversamente dislocata nel piano (o nello spazio), una riflessione del piano trasforma la suola

della scarpa destra nella suola di una scarpa sinistra e una riflessione nello spazio trasforma la mano destra nella mano sinistra.

Tuttavia tutte queste trasformazioni non mutano la distanza tra due punti e perciò si chiamano *isometrie*. Si potrebbe dimostrare che

*tutte le isometrie del piano (dello spazio) si ottengono componendo rotazioni, traslazioni e riflessioni.*

**Esercizio 3.3.** *Che cos'è un moto rigido?*

(Suggerimento di soluzione.) Dare la definizione di moto rigido, dare esempi (rotazioni e traslazioni) e concludere dicendo che ogni moto rigido si può descrivere come composizione di ...  $\square$

**Esercizio 3.4.** *Che cos'è un'isometria?*

Soluzione. Un'isometria tra piani (risp. dello spazio) è una trasformazione  $\alpha \xrightarrow{F} \beta$  tra due piani (risp. una trasformazione dello spazio in sè) che non altera la distanza tra due punti, vale a dire presi due punti  $P$  e  $Q$  qualsiasi, vale

$$\|F(P) - F(Q)\| = \|P - Q\|.$$

I moti rigidi e le riflessioni sono isometrie. Ogni isometria si ottiene come composizione di moti rigidi e riflessioni.  $\square$

**3.2. Altri esempi, più generali, di trasformazioni affini.** Ora consideriamo un altro tipo di trasformazione affine che non è un'isometria<sup>5</sup>.

**Definizione 3.5.** *Un cambiamento di scala in direzione di tre assi ortogonali è una mappa della forma*

$$(3.1) \quad \begin{cases} x' = k_1 x \\ y' = k_2 y \\ z' = k_3 z \end{cases}$$

dove  $k_1, k_2, k_3 > 0$ .

Questa applicazione lascia fissa l'origine e dilata o contrae tutti i segmenti paralleli all'asse delle  $x$  di un fattore  $k_1$ , tutti i segmenti paralleli all'asse delle  $y$  di un fattore  $k_2$  e tutti i segmenti paralleli all'asse delle  $z$  di un fattore  $k_3$ .

Analogamente si possono considerare nel piano cambiamenti di scala in direzione di due assi ortogonali.

Si dimostra il seguente

**Teorema 3.6.** *Una trasformazione affine dello spazio (o del piano) si può sempre descrivere nel modo seguente:*

- prima un'isometria
- poi un cambiamento di scala nella direzione di tre (due) assi ortogonali per opportuni fattori di scala
- infine un'altra isometria.

---

<sup>5</sup>Salvo nel caso in cui  $k_1 = k_2 = k_3 = \pm 1$

Per illustrare questo risultato consideriamo il seguente esempio. Identifichiamo il piano con una piantina di Parma distesa sul tavolo<sup>6</sup>. Dapprima ruotiamo la piantina in senso orario (cfr. Fig. 19) poi fissiamo due rette ortogonali (ad es. via

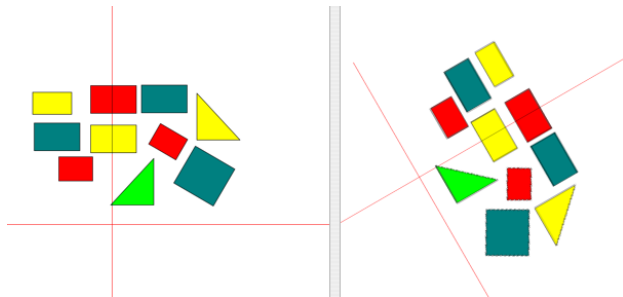


FIGURE 19

Repubblica e via Garibaldi) e facciamo un cambiamento di scala dilatando di un fattore 2 in direzione di via Repubblica e contraiamo di un fattore  $1/2$  in direzione di via Garibaldi (cfr. Fig. 20). Infine riflettiamo rispetto ad una retta verticale

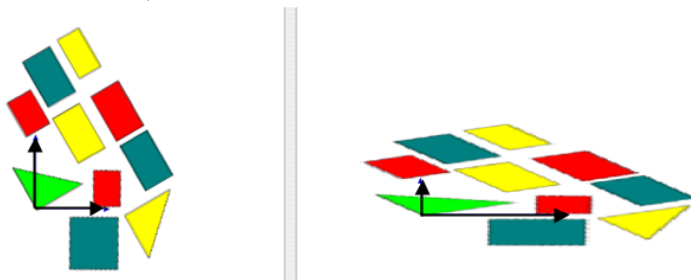


FIGURE 20

(vale a dire ribaltiamo la piantina sul tavolo, tenendo fissa la retta verticale, cfr. Fig. 21).

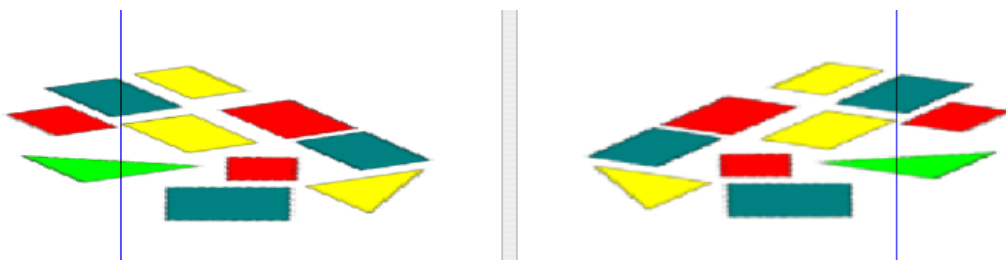


FIGURE 21

Descriviamo alcune proprietà delle trasformazioni affini. In primo luogo, poichè le trasformazioni affini sono biunivoche, se due figure  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  (ad esempio due curve) hanno un numero finito di punti in comune, esse vengono mandate in due figure  $\mathcal{F}'$

<sup>6</sup>La cosa evidentemente non è possibile perché il piano è illimitato e la piantina no, ma ci intendiamo.

e  $\mathcal{G}'$  che hanno lo stesso numero di punti in comune. In particolare nel piano rette incidenti (un solo punto in comune) vanno in rette incidenti e rette parallele (nessun punto in comune) in rette parallele. Due rette incidenti nello spazio individuano un piano che contiene tutte le rette incidenti ad entrambe, ne segue che piani vanno in piani. In particolare piani incidenti (hanno in comune una retta) vanno in piani incidenti e piani paralleli vanno in piani paralleli.

**Esercizio 3.7.** *Provare che una trasformazione affine dello spazio manda coppie di rette parallele in coppie di rette parallele e coppie di rette sghembe in coppie di rette sghembe.*

Soluzione. Sia  $F$  una trasformazione affine dello spazio e siano  $r$  ed  $r'$  due rette parallele. (Già sappiamo che, nel caso di trasformazioni affini del piano, rette parallele vanno in rette parallele; ma qui  $F$  è una trasformazione dello spazio). Allora, per la Definizione 3.1,  $F(r)$  e  $F(r')$  sono rette. Le rette  $r$  ed  $r'$ , essendo parallele, sono complanari; sappiamo che  $F$  manda piani in piani, dunque  $F(r)$  e  $F(r')$  sono rette complanari. Se fossero incidenti, allora  $F^{-1}$  le manderebbe in due rette incidenti, cioè  $r$  ed  $r'$  sarebbero incidenti, assurdo. Dunque  $F(r)$  e  $F(r')$  sono parallele.

Siano  $r$  ed  $r'$  sghembe (i.e. nè parallele, nè incidenti). Allora, per Definizione 3.1,  $F(r)$  e  $F(r')$  sono rette; esse non possono essere nè parallele, nè incidenti, altrimenti (usando  $F^{-1}$ ) anche  $r$  ed  $r'$  sarebbero parallele o incidenti. Dunque  $F(r)$  e  $F(r')$  sono sghembe.  $\square$

Un triangolo individua tre rette, due a due incidenti, che determinano i suoi lati; da questo segue (sarebbe necessario una spiegazione più approfondita) che un triangolo va in un triangolo. Si noti tuttavia, come mostra la Fig. 20, che in generale le trasformazioni affini non conservano l'ampiezza degli angoli e quindi possono trasformare un triangolo isoscele o equilatero in un triangolo scaleno. Anzi si può dimostrare che dati due triangoli qualsiasi esiste una trasformazione affine del piano che manda il primo nel secondo triangolo.

**3.3. Comportamento di una trasformazione affine su piani paralleli.** Dal punto di vista analitico le trasformazioni affini sono le più semplici. Fissati sistemi di coordinate cartesiane ortogonali sui piani  $\alpha$  e  $\beta$ , una trasformazione affine  $\alpha \xrightarrow{F} \beta$  è data da equazioni della forma

$$(3.2) \quad \begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}$$

dove la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  è invertibile. Questo significa che il punto  $P \in \alpha$  di coordinate  $(x, y)$  viene mandato nel punto  $F(P) = (x', y')$  dove  $x'$  e  $y'$  sono date dall'equazione (3.2). Possiamo anche scrivere

$$F(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Analogamente una trasformazione affine dello spazio è data da equazioni della forma

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + p_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + p_2 \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + p_3 \end{cases}$$

dove la matrice  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  è invertibile. Possiamo anche scrivere

$$(3.3) \quad F(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Quello che interessa osservare è che le equazioni di una trasformazione affine sono sempre di primo grado.

Una conseguenza dell'equazione (3.3) è il seguente:

**Teorema 3.8.** *Una trasformazione affine dello spazio agisce nello stesso modo su piani paralleli.*

*Precisamente cfr. Fig. 22 dati una trasformazione affine  $F$  dello spazio e due piani paralleli  $\alpha, \alpha'$ , siano  $\beta = F(\alpha)$  e  $\beta' = F(\alpha')$  i piani ad essi corrispondenti. Presa una figura  $\mathcal{F}$  su  $\alpha$  consideriamo una traslazione  $T_{\vec{v}}$  che manda  $\alpha$  in  $\alpha'$ ; allora  $\mathcal{F}' = T_{\vec{v}}(\mathcal{F})$  è una figura su  $\alpha'$  uguale ad  $\mathcal{F}$ . Consideriamo le corrispondenti figure  $F(\mathcal{F})$  che sta su  $\beta$  e  $F(\mathcal{F}')$  che sta su  $\beta'$ .*

*Affermo che  $F(\mathcal{F})$  e  $F(\mathcal{F}')$  sono uguali.*

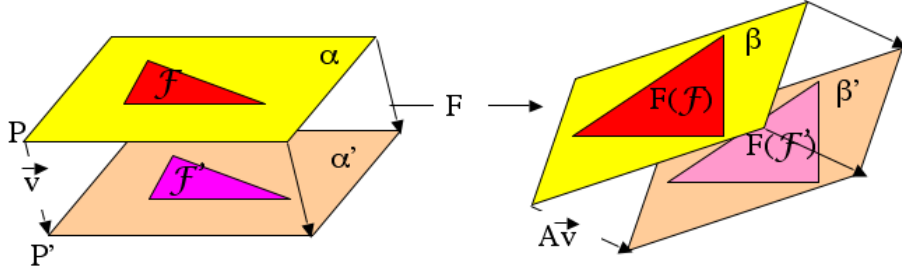


FIGURE 22

Dimostrazione. . Prendiamo  $P' \in \alpha'$ , allora  $P := P' - \vec{v} \in \alpha$ . Confrontiamo  $F(P')$  che sta su  $\beta'$  con  $F(P)$  che sta su  $\beta$ .

Fissiamo un sistema di coordinate nello spazio in modo che possiamo scrivere la formula (3.3). Sia  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , allora se  $P' = (x, y, z)$  abbiamo  $P = P' - \vec{v} = (x - v_1, y - v_2, z - v_3)$  e quindi

$$\begin{aligned} F(P) &= F(x - v_1, y - v_2, z - v_3) = A \begin{pmatrix} x - v_1 \\ y - v_2 \\ z - v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \\ &= A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = F(x, y, z) - A\vec{v} = F(P') - A\vec{v}. \end{aligned}$$

Ne segue

$$F(P') = F(P) + A\vec{v} = T_{A\vec{v}}(F(P)).$$

Questo significa che  $F(\mathcal{F}')$  e  $F(\mathcal{F})$  sono uguali perché differiscono di una traslazione.  $\square$



### 3.4. Trasformazioni affini e coniche.

**Teorema 3.9.** *Le trasformazioni affini mandano coniche in coniche.*

Per dimostrarlo conviene prima considerare questo risultato parziale:

**Lemma 3.10.** *Data una trasformazione affine  $\alpha \xrightarrow{F} \beta$ , se  $\mathcal{C}$  è una conica del piano  $\alpha$ , allora  $F(\mathcal{C})$  è una conica del piano  $\beta$ .*

Dimostrazione. Osserviamo che:

- Si potrebbe dimostrare con qualche calcolo che se  $\mathcal{D}$  è una curva piana che ha equazione cartesiana di grado<sup>7</sup>  $n$ , allora essa incontra ogni retta in al più  $n$  punti distinti ed esiste almeno una retta che incontra  $\mathcal{D}$  in esattamente  $n$  punti.
- Le coniche sono le curve di secondo grado.
- Se  $\mathcal{C}$  incontra una retta  $r$  in  $k$  punti, allora, poiché  $F$  è biunivoca,  $F(\mathcal{C})$  incontra  $F(r)$  esattamente in  $k$  punti.

Ora la dimostrazione è semplice. Sia  $r'$  una retta di  $\beta$ , allora esiste una retta  $r$  di  $\alpha$  tale che  $r' = F(r)$ . Poiché  $\mathcal{C}$  è una conica essa incontra  $r$  in al più 2 punti e quindi  $F(\mathcal{C})$  incontra  $r'$  in al più 2 punti. Inoltre esiste una retta  $r_0$  di  $\alpha$  che incontra  $\mathcal{C}$  in esattamente 2 punti e quindi  $F(\mathcal{C})$  incontra  $F(r_0)$  in esattamente 2 punti, dunque  $F(\mathcal{C})$  ha un'equazione di secondo grado e perciò è una conica.  $\square$

Dimostrazione del Teorema 3.9. Se  $F$  è una trasformazione affine tra due piani, il Lemma 3.10 è sufficiente. Se  $F$  è una trasformazione affine dello spazio ragioniamo così: sia  $\mathcal{C}$  una conica; essa giace su un certo piano  $\alpha$  e sia  $\beta = F(\alpha)$  il piano corrispondente. Consideriamo la restrizione  $F|_{\alpha} : \alpha \rightarrow \beta$ ; essa è biunivoca (è un fatto generale quando si considera la restrizione di un'applicazione biunivoca) e manda rette di  $\alpha$  in rette di  $\beta$ . Dunque è una trasformazione affine e possiamo applicare il Lemma 3.10 per concludere che  $F(\mathcal{C})$  è una conica.  $\square$

**Corollario 3.11.** *Le trasformazioni affini mandano coniche non degeneri in coniche non degeneri.*

Dimostrazione. Sia  $F$  una trasformazione affine e  $\mathcal{C}$  una conica non degenera. Per il Teorema 3.9,  $F(\mathcal{C})$  è una conica.

Ragioniamo per assurdo, se  $F(\mathcal{C})$  fosse degenera, sarebbe formata da rette, quindi, la trasformazione inversa  $F^{-1}$ , che ovviamente è ancora affine e dunque manda rette in rette, manderebbe  $F(\mathcal{C})$  in un'unione di rette, assurdo perché  $F^{-1}F(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ .  $\square$

In realtà vale un risultato più preciso:

**Teorema 3.12.** *Una trasformazione affine  $F$  del piano manda ellissi, parabole ed iperboli in coniche dello stesso tipo.*

*Inoltre se  $\mathcal{F}$  è il fascio di rette parallele all'asse di una parabola  $\mathcal{P}$ , allora  $F(\mathcal{F})$  è il fascio di rette parallele all'asse della parabola  $F(\mathcal{P})$ .*

*Infine se  $r$  è un asintoto dell'iperbole  $\mathcal{I}$  allora  $F(r)$  è un asintoto dell'iperbole  $F(\mathcal{I})$ .*

---

<sup>7</sup>Vale a dire l'equazione è un polinomio in  $x$  ed  $y$  in cui il monomio di grado massimo ha grado  $n$ . Ad es.  $xy^2 + y + x = 1$  ha grado 3.

**Dimostrazione.** Sia  $\mathcal{P}$  una parabola. Consideriamo il fascio  $\mathcal{F}$  delle rette parallele all'asse  $a$  della parabola. La trasformazione affine  $F$  manda il fascio  $\mathcal{F}$  in un fascio  $F(\mathcal{F})$  di rette parallele. Ora ciascuna retta  $r \in \mathcal{F}$  incontra la parabola  $\mathcal{P}$  in un sol punto. Allora ciascuna retta  $r' \in F(\mathcal{F})$  incontra la conica  $F(\mathcal{P})$  in un sol punto. Allora per la Proposizione 4.2, poiché  $F(\mathcal{P})$  non è degenera, essa è una parabola.

Sia  $\mathcal{I}$  un'iperbole. Il fascio  $\mathcal{G}$  delle rette parallele all'asintoto  $r_0$  di  $\mathcal{I}$  è formato da rette che incontrano  $\mathcal{I}$  in un sol punto, salvo  $r_0$  che non incontra  $\mathcal{I}$ . Ragionando come sopra (ripetere effettivamente il ragionamento!) ma usando la Proposizione 4.3 si conclude che  $F(\mathcal{I})$  deve essere un'iperbole e il fascio  $F(\mathcal{G})$  il fascio delle rette parallele ad un suo asintoto  $r'_0$ . Tra queste rette la sola  $F(r_0)$  non incontra l'iperbole  $F(\mathcal{I})$  e dunque è l'asintoto  $r'_0$ .

Resta solo da vedere che se  $\mathcal{E}$  è un'ellisse, allora  $F(\mathcal{E})$  è anch'essa un'ellisse. Ma  $F(\mathcal{E})$  è una conica non degenera e se fosse una parabola o un'iperbole, per quanto abbiamo appena provato, anche  $F^{-1}(F(\mathcal{E})) = \mathcal{E}$  lo sarebbe, assurdo.  $\square$

**Esercizio 3.13.** Sia  $F$  una trasformazione affine del piano e sia  $\mathcal{C}$  una conica non degenera. Che cosa possiamo dire di  $F(\mathcal{C})$ ?

**Soluzione.** Sappiamo che  $F(\mathcal{C})$  è una conica non degenera. Più precisamente essa è una parabola, un'iperbole oppure un'ellisse a seconda che  $\mathcal{C}$  sia una parabola, un'iperbole oppure un'ellisse. Inoltre se  $\mathcal{C}$  è un'iperbole,  $F$  manda i suoi asintoti negli asintoti di  $F(\mathcal{C})$ . Se  $\mathcal{C}$  è una parabola,  $F$  manda il fascio delle rette parallele al suo asse nel fascio delle rette parallele all'asse di  $F(\mathcal{C})$ .  $\square$

**Esercizio 3.14.** Sia  $F$  una trasformazione affine del piano e  $\mathcal{P}$  una parabola. Allora, come sappiamo,  $F(\mathcal{P})$  è una parabola. Se  $a$  è l'asse di  $\mathcal{P}$ , allora necessariamente  $F(a)$  è l'asse di  $F(\mathcal{P})$ ?

**Soluzione.** Come sappiamo il fascio  $\mathcal{F}$  delle rette parallele all'asse  $a$  (in celeste in Fig. 23a) viene mandato nel fascio delle rette parallele all'asse di  $F(\mathcal{P})$ . In

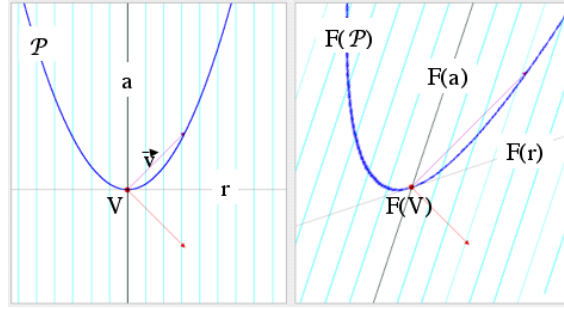


FIGURE 23. a - b

particolare l'asse  $a$  viene mandato in una retta  $F(a)$  parallela all'asse di  $F(\mathcal{P})$  (cfr. Fig. 23b).

Ora sappiamo che la retta  $r$  tangente a  $\mathcal{P}$  nel vertice  $V$  è perpendicolare all'asse  $a$ . Allora le rette  $F(r)$  e  $F(a)$  si tagliano in  $F(V)$  e  $F(r)$  incontra  $F(\mathcal{P})$  solo nel punto  $F(V)$ , dunque è tangente a  $F(\mathcal{P})$  in  $F(V)$  (infatti incontrando la parabola in un sol punto e, non essendo parallela all'asse, deve essere tangente). Ma l'angolo

tra  $F(r)$  e  $F(a)$  non è necessariamente retto e quindi  $F(V)$  non è necessariamente il vertice e  $F(a)$  non è necessariamente l'asse.

La trasformazione affine illustrata in figura è il cambiamento di scala di un fattore 2 nella direzione del vettore  $\vec{v}$ .  $\square$

**3.5. Trasformazioni affini e quadriche.** Concludiamo con un ulteriore risultato riguardante le superfici.

**Definizione 3.15.** *Una superficie che ha un'equazione di secondo grado si chiama quadrica.*

Ad esempio il paraboloide di rotazione (cfr. Esercizio 2.19) è una quadrica.

Con argomenti analoghi a quelli del Lemma 3.10 si dimostra che

**Proposizione 3.16.** *Una trasformazione affine dello spazio manda quadriche in quadriche.*

Ne segue:

**Teorema 3.17.** *Una curva, sezione piana di una quadrica, è una conica*

Dimostrazione. Sia data una quadrica  $\mathcal{Q}$  ed una curva  $\mathcal{C}$  ottenuta sezionando  $\mathcal{Q}$  con un piano  $\alpha$ .

La quadrica  $\mathcal{Q}$  ha equazione di secondo grado rispetto a qualunque sistema di riferimento cartesiano ortogonale, perché cambiare sistema di riferimento corrisponde ad un'isometria (composta come sappiamo di moti rigidi e riflessioni). Dunque, per la Proposizione 3.16 l'equazione di  $\mathcal{Q}$  nel nuovo sistema sarà di secondo grado.

Prendiamo un sistema di riferimento che abbia gli assi  $x$  ed  $y$  sul piano  $\alpha$ ; dunque in questo sistema  $\alpha$  ha equazione  $z = 0$ . Sostituito  $z = 0$  nell'equazione di  $\mathcal{Q}$  (che è un'equazione di secondo grado in  $x, y, z$ , resta un'equazione di secondo grado in  $x$  e  $y$ ); vale a dire la curva  $\mathcal{C}$  è una conica.  $\square$

#### 4. APPENDICE

Discutiamo i possibili comportamenti di una conica e di un fascio di rette. Ricordo che una retta ed una conica possono intersecarsi in due, uno o nessun punto; in generale se le intersezioni sono due la retta si dice secante, se l'intersezione è una sola la retta si dice tangente ed infine la si chiama esterna se non ha intersezione con la conica. Ma ci sono delle eccezioni: le rette parallele all'asse di una parabola e l'asse stesso tagliano la parabola in un punto ma non sono tangenti, lo stesso vale per le rette parallele agli asintoti di un'iperbole; infatti queste rette hanno in comune con la conica anche un punto all'infinito. Gli asintoti stessi non toccano l'iperbole, ma sono tangenti all'infinito. Ancora, se la conica è degenere (una retta doppia, due rette parallele o incidenti), ci sono rette contenute nella conica. Insomma per evitare equivoci e poiché siamo interessati solo a valutare quanti punti stanno nell'intersezione, in questa discussione parleremo sempre di punti di intersezione.

**Osservazione 4.1.** *Data una conica non degenere  $\mathcal{C}$  e un fascio  $\mathcal{R}$  di rette parallele sussistono le seguenti possibilità:*

(1) *La conica è un'ellisse, allora*

(i) *ci sono due rette del fascio  $\mathcal{R}$  che intersecano la conica in un punto (tangenti), le rette di  $\mathcal{R}$  comprese tra queste due la intersecano in due punti (secanti), quelle esterne a queste due non toccano la conica (esterne) (vedi Fig. 24) .*

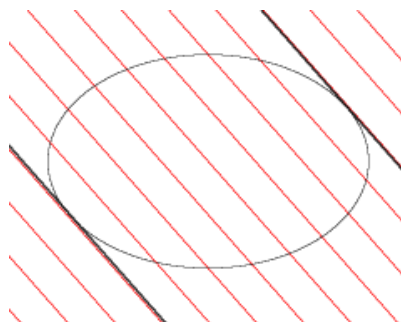


FIGURE 24. Apri il file per cambiare fascio di rette.

(2) La conica è una parabola, allora ci sono due casi:

(ii) Se  $\mathcal{R}$  è il fascio di rette parallele all'asse, allora tutte le rette di  $\mathcal{R}$  tagliano la conica in un solo punto (ma non sono tangenti) (vedi Fig. 25a).

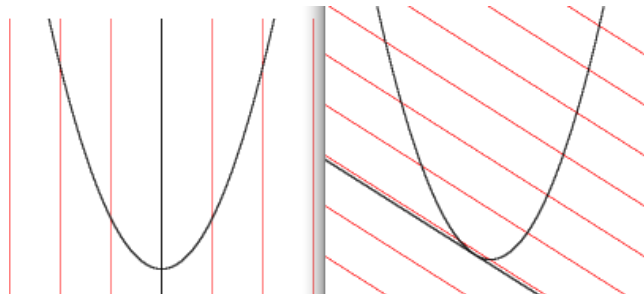


FIGURE 25. a - b Apri il file per cambiare il fascio di rette

(iii) Altrimenti<sup>8</sup> accade che esiste un'unica retta di  $\mathcal{R}$  che interseca la conica in un punto (tangente) e le restanti rette di  $\mathcal{R}$  intersecano la conica in due (secanti) o in nessun punto (esterne) a seconda che siano da una o dall'altra banda rispetto alla retta tangente vedi Fig. 25b.

(3) Se la conica è un'iperbole abbiamo tre casi:

(iv) Se  $\mathcal{R}$  è il fascio parallelo ad uno degli asintoti, allora tutte le rette di  $\mathcal{R}$  tagliano la conica in un solo punto (ma non sono tangenti), tranne l'asintoto che non tocca la conica vedi Fig. 26a

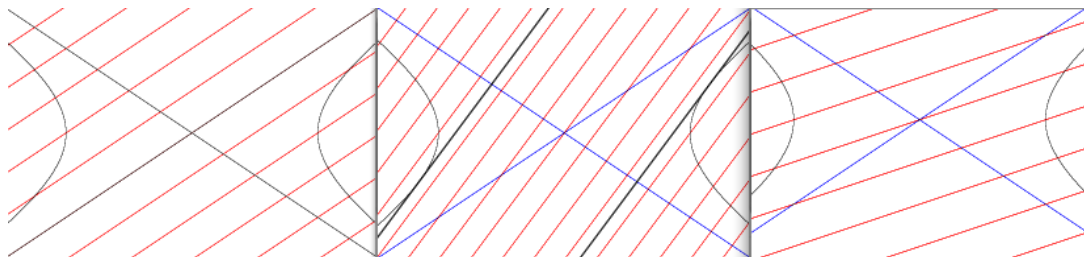


FIGURE 26. a - b - c Apri il file per cambiare il fascio di rette

(v) Se le rette del fascio  $\mathcal{R}$  sono più inclinate degli asintoti, allora due di esse intersecano la conica in un solo punto (tangenti), le altre rette di  $\mathcal{R}$  intersecano la

<sup>8</sup>Cioè se  $\mathcal{R}$  non è il fascio di rette parallele all'asse

conica in due o in nessun punto a seconda che siano esterne o comprese tra queste due rette<sup>9</sup> (vedi Fig. 26b).

(vi) Se le rette del fascio  $\mathcal{R}$  sono meno inclinate degli asintoti, allora tutte rette di  $\mathcal{R}$  tagliano la conica in due punti (vedi Fig. 26c).

(4) Se la conica è una retta doppia:

(vii) Se  $\mathcal{R}$  è il fascio di rette parallele alla retta doppia, allora tutte le rette di  $\mathcal{R}$  sono esterne alla conica, tranne una che è contenuta nella conica.

(ii) Altrimenti tutte le rette del fascio toccano la conica in un sol punto, come nel caso (ii).

(5) Se la conica è costituita da due rette parallele:

(viii) Se  $\mathcal{R}$  è il fascio delle rette parallele a queste due, allora tutte le rette di  $\mathcal{R}$  sono esterne alla conica tranne le due che sono contenute nella conica.

(vi) Altrimenti tutte le rette del fascio intersecano in due punti la conica come nel caso (vi) dell'iperbole.

(6) Se la conica è costituita da due rette incidenti:

(ix) Se  $\mathcal{R}$  è il fascio di rette parallele ad una delle due rette che compongono la conica, allora tutte le rette di  $\mathcal{R}$  tagliano la conica in un solo punto, tranne una che è contenuta nella conica.

(x) Altrimenti tutte le rette di  $\mathcal{R}$  tagliano la conica in due punti, tranne una che la taglia in un solo punto (il punto di incidenza delle due rette che compongono la conica).

Useremo la discussione precedente per dire che:

**Proposizione 4.2.** *Se  $\mathcal{C}$  è una conica ed esiste un fascio di rette  $\mathcal{R}$  tale che tutte le rette tagliano la conica in un punto, allora  $\mathcal{C}$  è una parabola o una retta (doppia).*

Dimostrazione. Siamo nel caso (ii) dell'Osservazione 4.1. □

**Proposizione 4.3.** *Se  $\mathcal{C}$  è una conica ed esiste un fascio di rette  $\mathcal{R}$  tale che tutte le rette tagliano la conica in un punto, tranne una che non la tocca, allora  $\mathcal{C}$  è un'iperbole.*

Dimostrazione. Siamo nel caso (iv) dell'Osservazione 4.1. □

## 5. PARABOLIDE ELLITTICO

### 5.1. Costruzione del paraboloide ellittico.

**Definizione 5.1. (Costruzione del paraboloide ellittico).**

(\*) *Siano  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$  due parabole, disposte su due piani ortogonali, in modo che abbiano il medesimo asse di simmetria (che dunque è necessariamente la retta  $a$  comune ai due piani), lo stesso vertice  $V$  e la concavità rivolta dalla medesima parte (cfr. Fig. 27).*

*Per fissare le idee conviene assumere che l'asse  $a$  sia verticale e la concavità delle due parabole rivolta verso l'alto. Per ogni punto  $P$  dell'asse  $a$ , sopra  $V$ , passa un unico piano  $\beta_P$  perpendicolare all'asse. Tale piano taglia su ciascuna parabola una coppia di punti:  $A, A'$  su  $\mathcal{P}_1$  e  $B, B'$  su  $\mathcal{P}_2$  (cfr. Fig. 28a). Per evidenti motivi*

<sup>9</sup>Si osservi che questo caso è diverso dal caso (i).

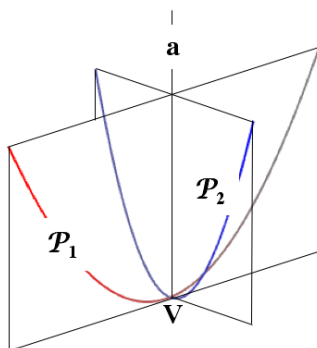


FIGURE 27

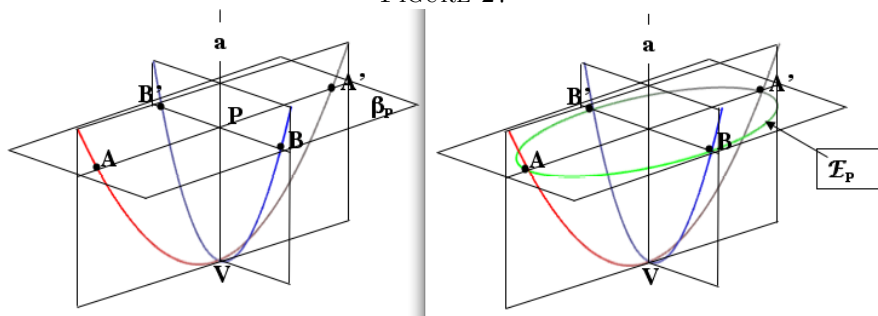


FIGURE 28. a - b

di simmetria i segmenti  $\overline{AA'}$  e  $\overline{BB'}$  si tagliano perpendicolarmente nel loro punto medio  $P$ , pertanto esiste un'unica ellisse  $\mathcal{E}_P$  che ha questi quattro punti come vertici (Fig. 28b). (Per  $P = V$  l'ellisse  $\mathcal{E}_V$  si riduce al solo punto  $V$ ).

La superficie descritta dalla famiglia di ellissi  $\mathcal{E}_P$ , al variare del punto  $P$  sull'asse  $a$ , al di sopra di  $V$ , si chiama paraboloide ellittico (cfr. Fig. 29 in cui si vedono

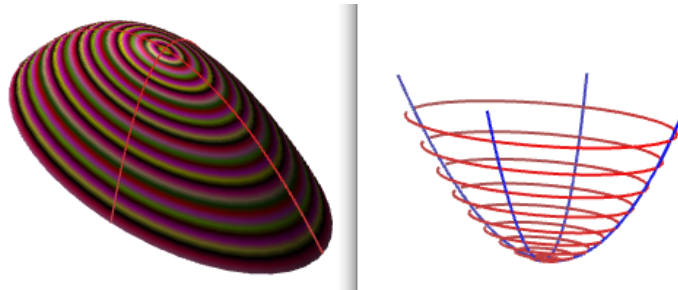


FIGURE 29. Apri il files per muovere le due superfici.

due immagini diverse dello stesso paraboloide). Il vertice  $V$  e l'asse  $a$  delle due parabole si chiamano vertice e asse del paraboloide.

**Esercizio 5.2.** Che cos'è un paraboloide ellittico?

*Suggerimento.* Utilizzare la Definizione 5.1.

## 5.2. Simmetrie del paraboloide ellittico.

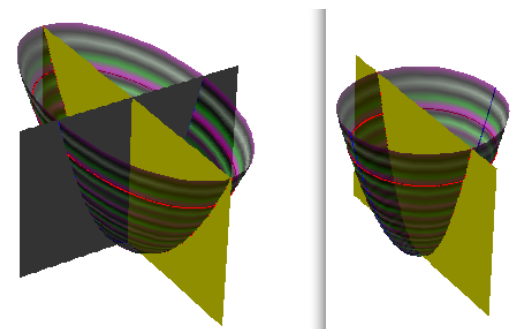


FIGURE 30. a - b

**Proposizione 5.3.** (i) *I piani che contengono le due parabole con cui si costruisce un paraboloide ellittico sono piani di simmetria del paraboloide (cfr. Fig. 30a).*

(ii) *L'asse del paraboloide è asse di simmetria.*

(iii) *Se le due parabole sono uguali, allora il paraboloide ellittico è la superficie generata dalla rotazione di una delle due parabole attorno al proprio asse. In tal caso tutti i piani passanti per l'asse sono piani di simmetria (cfr. Fig. 30b).*

**Dimostrazione.** (i) e (ii). Sia  $Q$  un punto del paraboloide ellittico  $\mathcal{Q}$  costruito a partire dalle parabole  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$  e siano  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  i piani che le contengono. Dobbiamo mostrare che i simmetrici  $Q'$  e  $Q''$  di  $Q$ , rispetto ai piani  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , e il simmetrico  $Q'''$  di  $Q$ , rispetto all'asse  $a$ , appartengono a  $\mathcal{Q}$ .

Il piano  $\beta$ , per  $Q$ , perpendicolare all'asse  $a$  taglia l'asse in un punto  $P$  e il paraboloide lungo l'ellisse  $\mathcal{E}_P$ . Inoltre taglia i piani  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  lungo gli assi dell'ellisse  $\mathcal{E}_P$ .

Pertanto  $Q'$  e  $Q''$  sono i simmetrici di  $Q$  rispetto agli assi dell'ellisse e  $Q'''$  è il simmetrico di  $Q$  rispetto al centro  $P$  dell'ellisse; dunque, poiché  $Q \in \mathcal{E}_P$ , per le proprietà di simmetria dell'ellisse, anche  $Q'$ ,  $Q''$  e  $Q'''$  appartengono a  $\mathcal{E}_P$  e quindi a  $\mathcal{Q}$ .

(iii) Se le parabole sono uguali, allora i quattro vertici di ciascuna ellisse  $\mathcal{E}_P$  sono equidistanti dall'asse e dunque l'ellisse è una circonferenza.  $\square$

**Esercizio 5.4.** *Quali sono le proprietà di simmetria di un paraboloide ellittico?*

*Suggerimento.* Enunciare la Proposizione 5.3.

**5.3. Quanti sono i paraboloidi ellittici?** Per comprendere il problema, prima di affrontarlo consideriamo due casi più familiari.

Quante sono le sfere? Poiché due sfere sono uguali se e solo se hanno lo stesso raggio, le sfere sono tante quante i possibili raggi; vale a dire esiste una corrispondenza biunivoca tra tutte le possibili sfere e l'insieme dei numeri  $r > 0$ .

Quanti sono i triangoli? Dati due segmenti consecutivi esiste un unico triangolo che ha i due segmenti come lati. D'altra parte i due segmenti consecutivi sono univocamente individuati dalle loro lunghezze  $L_1, L_2 > 0$  e dall'angolo  $\theta$ ,  $0 < \theta < \pi$ , da essi formato. Vale a dire dati  $L_1, L_2$  e  $\theta$  esiste un unico triangolo che ha due lati consecutivi di lunghezza  $L_1$  e  $L_2$  che formano un angolo  $\theta$ .

Tuttavia dobbiamo osservare che, ad esempio, le terne

$$L_1 = 3, L_2 = 1, \theta = \pi/2$$

e

$$L_1 = 1, L_2 = 3, \theta = \pi/2$$

individuano lo stesso triangolo. Per evitare questa difficoltà basta assumere sempre  $L_1 \geq L_2 > 0$ .

Ma questo non basta, perché per ogni triangolo ci sono tre diverse coppie di lati consecutivi e dunque esistono tre diverse terne di numeri  $L_1, L_2, \theta$  che individuano lo stesso triangolo.

Veniamo al problema che ci interessa. Due parabole sono uguali se la distanza tra fuoco e direttrice è la stessa. Dato un numero positivo  $p$  indichiamo con  $\mathcal{P}_p$  la parabola per cui la distanza tra fuoco e direttrice è pari a  $p$ . Dati  $p \geq q > 0$ , disponiamo le parabole  $\mathcal{P}_p$  e  $\mathcal{P}_q$  nello spazio in modo che soddisfino (\*) e costruiamo il paraboloidi  $\mathcal{Q}$ .

Dato un paraboloidi ellittico  $\mathcal{Q}$  non di rotazione evidentemente i piani che contengono le due parabole sono gli unici piani di simmetria di  $\mathcal{Q}$ ; pertanto essi sono univocamente individuati dal paraboloidi stesso e dunque anche le due parabole, che sono le sezioni di  $\mathcal{Q}$  con questi piani, sono univocamente individuate dal paraboloidi stesso. Lo stesso vale se il paraboloidi è di rotazione: ogni piano per l'asse taglia sul paraboloidi la parabola da cui partire per costruire il paraboloidi.

Questa osservazione indica che la corrispondenza

$$(p, q) \mapsto \mathcal{Q}$$

tra tutte le coppie con  $p \geq q > 0$  e tutti i paraboloidi ellittici è biunivoca.

**Osservazione 5.5.** *I paraboloidi ellittici sono in corrispondenza biunivoca con le coppie di numeri  $p \geq q > 0$ .*

*Nel senso che i numeri  $p$  e  $q$  individuano le due parabole che hanno distanza rispettivamente  $p$  e  $q$  tra fuoco e direttrice e tali parabole, disposte su piani ortogonali nel modo spiegato sopra, determinano univocamente un paraboloidi ellittico.*

*Viceversa dato un paraboloidi ellittico se è di rotazione, un qualunque piano passante per l'asse taglia sul paraboloidi una parabola (che non dipende dalla scelta del piano) e  $p = q$  sarà la distanza tra fuoco e direttrice di tale parabola. Se il paraboloidi ellittico non è di rotazione, allora i suoi due piani di simmetria tagliano su di esso due parabole diverse e i numeri  $p$  e  $q$  saranno la distanza tra fuoco e direttrice nelle due parabole.*

**5.4. Costruzione del paraboloidi ellittico a partire da un paraboloidi di rotazione.** Consideriamo una particolare trasformazione affine consistente nella contrazione di un fattore  $k$  ( $0 < k < 1$ ) nella direzione di una retta. (In un opportuno sistema di coordinate possiamo descrivere questa trasformazione con l'equazione

$$(5.1) \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = ky \\ z' = z \end{cases}.$$

con  $0 < k < 1$ . Si tratta di un particolare cambiamento di scala (cfr. Definizione 3.5 con  $k_1 = k_3 = 1$  e  $k_2 = k$ ) che consiste in una contrazione (infatti  $k < 1$ ) nella direzione dell'asse delle  $y$ . In Fig. 31 vediamo l'effetto di questa contrazione su di

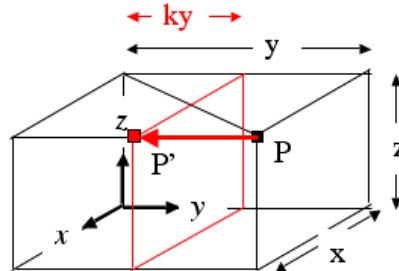


FIGURE 31

un punto  $P = (x, y, z)$ .



Consideriamo ora un caso più semplice: la contrazione in una direzione nel piano. Vediamo due casi:

**a) Contrazione in una direzione di una circonferenza.** Come sappiamo (cfr. Corso di Geometria, Cap. II, Corollario 5.17) *contraendo di un fattore  $k$ ,  $0 < k < 1$ , in una direzione una circonferenza di raggio  $r$  si ottiene un'ellisse i cui semiassi hanno lunghezza  $r$  e  $kr$*  (cfr. Fig. 32a).

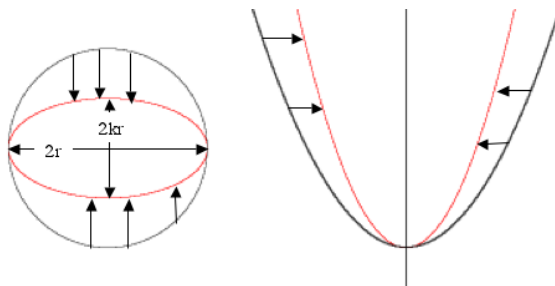


FIGURE 32. a - b

**b) Contrazione di una parabola in direzione normale all'asse.** *Contraendo una parabola in direzione normale all'asse si ottiene una parabola più "stretta"* (cfr. Fig. 32b).

Dimostrazione. Data la parabola  $\mathcal{P}$  di equazione

$$(5.2) \quad 2py = x^2,$$

per un certo  $p > 0$ . Le equazioni della contrazione in direzione dell'asse delle ascisse (direzione normale all'asse della parabola) sono

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = y \end{cases}.$$

Sostituendo quest'ultime nell'equazione della parabola otteniamo

$$2py' = \left(\frac{x'}{k}\right)^2,$$

cioè

$$2pk^2y' = x'^2$$

che è l'equazione ancora di una parabola.

La distanza tra fuoco e direttrice è rispettivamente  $p > pk^2$ , dunque la seconda parabola è più "stretta".  $\square$

Ora possiamo procedere alla costruzione che ci interessa:

**Proposizione 5.6.** *Dato un parabolide di rotazione  $\mathcal{Q}$  procediamo ad una contrazione di un fattore  $k$ ,  $0 < k < 1$ , in una direzione perpendicolare all'asse del parabolide. Otteniamo così un parabolide ellittico  $\mathcal{Q}'$ .*

*Considerando tutti i paraboloidi di rotazione e tutti i possibili fattori  $k$ ,  $0 < k < 1$ , in questo modo otteniamo tutti i possibili paraboloidi ellittici.*

Dimostrazione. Per fissare le idee conviene scegliere un sistema di coordinate cartesiane ortogonali con origine nel vertice del parabolide  $\mathcal{Q}$  e asse delle  $z$  coincidente con l'asse del parabolide e verso positivo dalla parte della concavità di  $\mathcal{Q}$ . Sia l'asse delle  $y$  la direzione in cui contraiamo (cfr. Fig. 33a).

La superficie  $\mathcal{Q}$  si trasforma in una superficie  $\mathcal{Q}'$  (cfr. Fig. 33b). Le sezioni di  $\mathcal{Q}$  con piani perpendicolari all'asse ( $z = \text{cost.}$ ) sono i paralleli della superficie di rotazione, cioè sono delle circonferenze, che vengono contratte in ellissi.

La sezione di  $\mathcal{Q}$  con il piano  $xz$  è una parabola  $\mathcal{P}$  che, giacendo su un piano perpendicolare alla direzione  $y$ , non subisce alterazioni. Mentre la parabola, identica a questa, che il piano  $yz$  taglia su  $\mathcal{Q}$  viene contratta in direzione normale al suo asse e diventa una parabola più “stretta” che chiamiamo  $\mathcal{P}'$ .

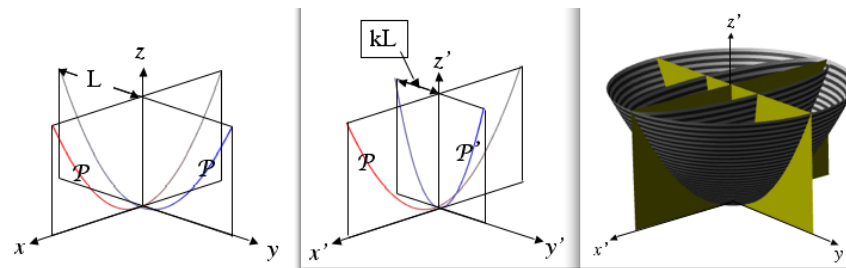


FIGURE 33. a - b - c

Allora è chiaro che la superficie  $\mathcal{Q}'$  è il paraboloide ellittico definito dalle parabole  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}'$ .

Vediamo che tutti i parabolidi ellittici si ottengono in questo modo. Dato un paraboloide ellittico  $\mathcal{Q}'$ , esso, per definizione, è costruito a partire da due parabole  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}'$ . Eventualmente scambiando il ruolo delle due parabole, possiamo supporre che la seconda sia più “stretta” della prima. Dunque  $\mathcal{P}'$  si ottiene contraendo  $\mathcal{P}$  di un fattore  $k < 1$  in direzione perpendicolare all’asse di simmetria. Dunque contraendo il paraboloide  $\mathcal{Q}$ , ottenuto ruotando  $\mathcal{P}$  attorno al proprio asse, in direzione normale all’asse di un fattore  $k$  si ottiene proprio  $\mathcal{Q}'$ .  $\square$

**Esercizio 5.7.** *Come posso procurarmi un paraboloide ellittico a partire da un paraboloide di rotazione?*

*Suggerimento.* Riportare la prima parte della dimostrazione della Proposizione 5.6.

**Osservazione 5.8.** *La contrazione  $F$  che manda  $\mathcal{Q}$  in  $\mathcal{Q}'$ , manda anche l’asse di  $\mathcal{Q}$  nell’asse di  $\mathcal{Q}'$ .*

## 5.5. Sezioni piane di un paraboloide ellittico.

### 5.5.1. Sezioni con piani paralleli all’asse.

**Proposizione 5.9.** *Le sezioni di un paraboloide ellittico  $\mathcal{Q}$  con piani paralleli all’asse sono parabole. Più precisamente le sezioni di  $\mathcal{Q}$  con un fascio di piani paralleli tra loro e paralleli all’asse sono tutte parabole identiche.*

Possiamo essere ancora più precisi: dato un qualunque piano  $\alpha$  passante per l’asse  $a$  di  $\mathcal{Q}$ , esso taglia su  $\mathcal{Q}$  una parabola  $\mathcal{P}$ . Inoltre i piani paralleli ad  $\alpha$  tagliano su  $\mathcal{Q}$  parabole identiche a  $\mathcal{P}$ . I vertici di queste parabole descrivono, a loro volta, una parabola  $\mathcal{P}'$ . Tale parabola giace su un piano  $\beta$  che passa per l’asse di  $\mathcal{Q}$ . Essa dunque è la sezione di  $\mathcal{Q}$  con il piano  $\beta$ . Inoltre i piani paralleli a  $\beta$  tagliano su  $\mathcal{Q}$  una famiglia di parabole identiche a  $\mathcal{P}'$  e i cui vertici descrivono la parabola  $\mathcal{P}$ .

Soluzione. Dapprima dimostreremo l'enunciato nel caso particolare di un paraboloide  $\mathcal{Q}$  di rotazione. Sia  $\alpha$  un qualunque piano che passa per l'asse  $a$  di  $\mathcal{Q}$ . È necessario un calcolo per vedere che  $\alpha$  e i piani paralleli ad  $\alpha$  tagliano il paraboloide lungo parabole tutte uguali tra loro.

Come sappiamo (Esercizio 2.19) l'equazione di  $\mathcal{Q}$  è della forma

$$x^2 + y^2 = 2pz$$

con  $p > 0$  (il sistema di coordinate ha origine nel vertice  $V$  del paraboloide e l'asse delle  $z$  è l'asse  $a$  e il verso positivo è dalla parte della concavità.)

Per ragioni di simmetria ( $\mathcal{Q}$  è una superficie di rotazione) non è ristrettivo assumere che il piano  $\alpha$  coincida con il piano  $xz$ , vale a dire abbia equazione  $y = 0$ . Pertanto i piani paralleli ad  $\alpha$  possiamo indicarli con  $\alpha_c$  e avranno equazione  $y = c$ , con  $c \in \mathbb{R}$ .

L'intersezione  $\alpha_c \cap \mathcal{Q}$  è data dal sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2pz \\ y = c \end{cases},$$

che è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2 + c^2 = 2pz \\ y = c \end{cases}.$$

Dunque sul piano  $y = c$  la sezione è data dall'equazione

$$x^2 + c^2 = 2pz$$

che rappresenta una parabola  $\mathcal{P}_c$ . Se scriviamo l'equazione nella forma

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{c^2}{2p},$$

ci rendiamo conto che la curva è il grafico di una funzione  $z = f(x)$  e che al variare di  $c$  la funzione cambia solo per una costante additiva; dunque le curve  $\mathcal{P}_c$  sono ottenute una dall'altra per traslazione (cfr. Fig. 34).

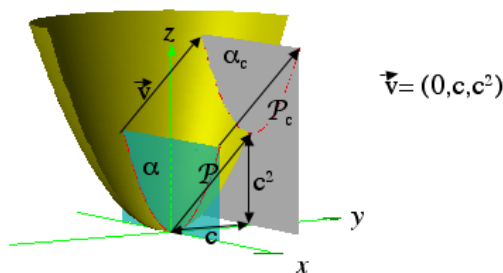


FIGURE 34

Sia  $\beta$  il piano per l'asse  $a$  e perpendicolare ad  $\alpha$  (cfr. Fig. 35). Poiché  $\mathcal{Q}$  è una superficie

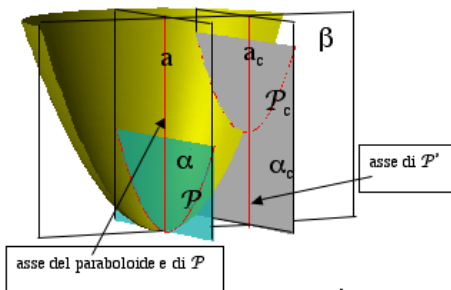


FIGURE 35

di rotazione, per ragioni di simmetria, la retta  $a_c$  che il piano  $\alpha_c$  taglia su  $\beta$  è asse di simmetria dell'intersezione  $\alpha_c \cap \mathcal{Q}$ . Questo significa che  $a_c$ , che è parallelo ad  $\alpha$  è l'asse della parabola  $\mathcal{P}_c$ .

Pertanto i vertici  $V_c$  delle parabole  $\mathcal{P}_c$  stanno tutti sul piano  $\beta$  e formano una curva  $\mathcal{P}'$  che è la sezione  $\beta \cap \mathcal{Q}$ . Ma allora  $\mathcal{P}'$  genera per rotazione  $\mathcal{Q}$  e dunque  $\mathcal{P}'$  è una parabola (identica a  $\mathcal{P}$ ).

Abbiamo così provato che, per un paraboloide  $\mathcal{Q}$  di rotazione, assegnato un piano  $\alpha$  che contiene l'asse di  $\mathcal{Q}$ , le sezioni con piani paralleli ad  $\alpha$  sono parabole tutte uguali, i cui vertici stanno sulla parabola che si ottiene sezionando  $\mathcal{Q}$  con il piano  $\beta$ , passante per l'asse di rotazione e perpendicolare ad  $\alpha$ .

Questo risultato vale per un qualunque piano  $\alpha$  e dunque deve valere anche per il piano  $\beta$  che passa per l'asse di  $\mathcal{Q}$ : i piani paralleli a  $\beta$  tagliano sul paraboloide parabole tutte uguali, i cui vertici stanno sulla parabola  $\alpha \cap \mathcal{Q}$ , infatti  $\alpha$  è il piano perpendicolare a  $\beta$ .

Passiamo a considerare il caso di un qualsiasi paraboloide ellittico. Esso si può ottenere come contrazione di un paraboloide di rotazione, quindi per studiare il caso generale possiamo limitarci a considerare un paraboloide ellittico  $\mathcal{Q}'$  ottenuto contraendo  $\mathcal{Q}$  in una direzione perpendicolare all'asse. Sia  $F$  questa contrazione.

Sia  $\gamma$  un piano passante per l'asse di  $\mathcal{Q}'$ . Allora  $\gamma = F(\alpha)$  per un certo piano  $\alpha$  che passa per l'asse di  $\mathcal{Q}$ . I piani  $\alpha_c$  paralleli ad  $\alpha$ , sono mandati da  $F$  nei piani  $\gamma_c$  paralleli a  $\gamma$ . Poiché (cfr. Teorema 3.8) le trasformazioni affini agiscono nello stesso modo su piani paralleli, le parabole  $\mathcal{P}_c = \alpha_c \cap \mathcal{Q}$ , tutte uguali tra loro, vengono mandate in curve  $F(\mathcal{P}_c) = \gamma_c \cap \mathcal{Q}'$ , tutte uguali tra loro. Ma le trasformazioni affini mandano parabole in parabole (cfr. Teorema 3.12), quindi queste curve  $F(\mathcal{P}_c)$  sono parabole.

Come sappiamo, in generale, una trasformazione affine manda una parabola in una parabola, ma non manda necessariamente il vertice nel vertice (cfr. Esercizio 3.14). Tuttavia in questo caso la cosa funziona.

Prima abbiamo osservato che gli assi  $a_c$  della parabole  $\mathcal{P}_c$  sono tutti paralleli all'asse  $a$  di  $\mathcal{Q}$ . Ora  $F(a)$  è l'asse di  $\mathcal{Q}'$  (cfr. Osservazione 5.8) e  $F$  manda rette parallele in rette parallele, dunque le rette  $F(a_c)$  sono parallele all'asse  $F(a)$  di  $\mathcal{Q}'$ . Ma (cfr. Teorema 3.12)  $F$  manda le rette parallele all'asse di  $\mathcal{P}_c$  in rette parallele all'asse di  $F(\mathcal{P}_c)$ . Dunque anche se  $F(a_c)$  non fosse l'asse di  $F(\mathcal{P}_c)$ , esso è comunque parallelo a tale asse. In conclusione gli assi  $b_c$  di  $F(\mathcal{P}_c)$  sono paralleli ad  $a$ .

In particolare gli assi di tutte le parabole coinvolte sono verticali e quindi in ciascuna parabola il vertice è il punto più basso. Siccome la contrazione  $F$  non altera la "quota" dei punti (cioè la coordinata  $z$ ) essa manda il vertice  $V_c$  di  $\mathcal{P}_c$  nel vertice di  $F(\mathcal{P}_c)$ .

Come sappiamo i vertici  $V_c$  descrivono la parabola  $\mathcal{P}'$  tagliata da  $\beta$  su  $\mathcal{Q}$ . Quindi i vertici delle parabole  $F(\mathcal{P}_c)$  descrivono la parabola  $F(\mathcal{P}')$  che è intersezione del piano  $F(\beta)$  con  $\mathcal{Q}'$ . Poiché  $\beta$  contiene  $a$ , il piano  $F(\beta)$  contiene l'asse  $F(a)$  di  $\mathcal{Q}'$ .

Abbiamo così provato che dato un piano  $\gamma$  che contiene l'asse di  $\mathcal{Q}'$  i piani  $\gamma_c$ , paralleli a  $\gamma$ , tagliano su  $\mathcal{Q}'$  parabole  $F(\mathcal{P}_c)$  tutte uguali tra loro e i cui vertici descrivono la parabola  $F(\mathcal{P}')$ , tagliata su  $\mathcal{Q}'$ , da un piano  $F(\beta)$  passante per l'asse di  $\mathcal{Q}'$ .

Si osservi che  $F$  non conserva gli angoli e dunque in generale i piani  $\gamma$  e  $F(\beta)$  non sono tra loro ortogonali.  $\square$

Per comprendere guardiamo la Fig. 36a. Sono evidenziate le sezioni del para-

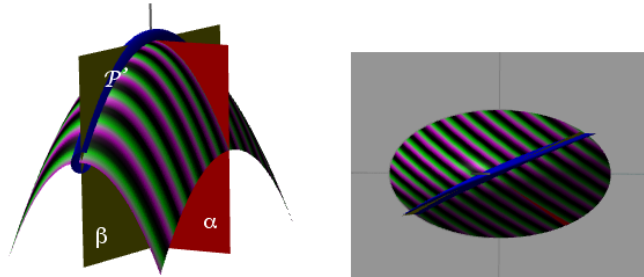


FIGURE 36. a - b

boloide con un fascio di piani paralleli al piano  $\alpha$ . Si osserva che queste sezioni sono parabole tutte uguali tra loro e i cui vertici descrivono una parabola  $\mathcal{P}'$  che

giace sul piano  $\beta$ . Guardando la stessa superficie dall'alto (Fig. 36b) si evidenzia un'ellisse, sezione del paraboloide con un piano ortogonale all'asse, e si vede che gli assi dell'ellisse non sono in rapporto con i piani  $\alpha$  e  $\beta$ . Per altro aprendo i file delle figure è possibile variare il piano  $\alpha$  e riconoscere che, quando esso coincide con un piano di simmetria dell'ellisse,  $\beta$  è l'altro piano di simmetria (Fig. 37).

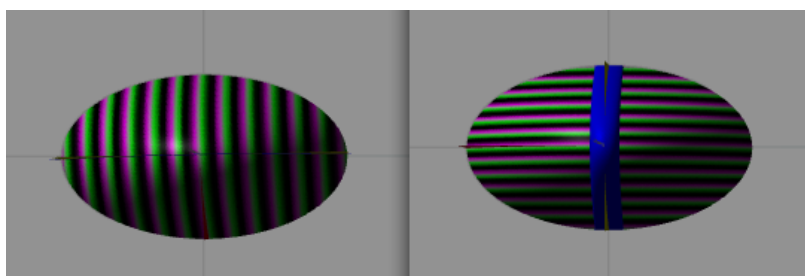


FIGURE 37

È importante comprendere che il piano  $\alpha$  determina il piano  $\beta$ . Dunque per ogni piano  $\alpha$  esiste un unico piano  $\beta$  che contiene i vertici delle parabole tagliate dai piani paralleli ad  $\alpha$ . Inoltre la relazione tra  $\alpha$  e  $\beta$  è simmetrica, perché  $\alpha$  contiene i vertici delle parabole tagliate dai piani paralleli a  $\beta$ .

Aprendo il file della Fig. 36a è possibile contrarre in una direzione il paraboloide, variare le due famiglie di piani paralleli che tagliano il paraboloide.

**Corollario 5.10.** *Per ogni punto del paraboloide ellittico passa una ed una sola parabola di ciascuna delle due famiglie.*

**Esercizio 5.11.** *Dimostrare il Corollario 5.11 e illustrarlo con una figura.*

Soluzione. Fissato il piano  $\alpha$  passante per l'asse del paraboloide  $\mathcal{Q}$ , questo determina un piano  $\beta$ . Prendiamo un punto  $P$  del paraboloide e conduciamo per  $P$  i piani  $\alpha'$  parallelo ad  $\alpha$  e  $\beta'$  parallelo a  $\beta$ . Essi tagliano su  $\mathcal{Q}$  due parabole:  $\alpha' \cap \mathcal{Q}$  e  $\beta' \cap \mathcal{Q}$  che si toccano esattamente in  $P$ .

In Fig. 38 si vedono le due famiglie di parabole e i piani di simmetria del

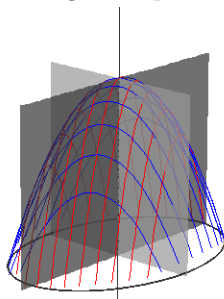


FIGURE 38

paraboloide (aprendo il file si vede come cambiano le due famiglie al variare del piano  $\alpha$ ).  $\square$

**Esercizio 5.12.** *Come sono fatte le sezioni di un paraboloide ellittico con piani paralleli all'asse?*

*Suggerimento.* Far riferimento agli enunciati della Proposizione 3.1 (e alla spiegazione immediatamente successiva) e del Corollario 5.10. Si illustri con opportune figure.

5.5.2. *Sezioni con piani non paralleli all'asse.* Consideriamo ora le sezioni piane di un paraboloide ellittico con piani non paralleli all'asse.

**Teorema 5.13.** *Le sezioni piane di un paraboloide ellittico con piani non paralleli all'asse sono:*

- vuote, se il piano non tocca il paraboloide
- un punto, se il piano è tangente al paraboloide
- un'ellisse.

Dimostrazione. Non daremo una dimostrazione completa, ma argomenti sufficienti a convincerci.

È sufficiente provare il teorema nel caso di un paraboloide di rotazione. Infatti, dato un paraboloide ellittico  $\mathcal{Q}'$  esiste un paraboloide di rotazione  $\mathcal{Q}$  ed una contrazione  $F$  in direzione di una retta ortogonale all'asse tale che  $\mathcal{Q}' = F(\mathcal{Q})$ ; e quindi preso un piano  $\alpha'$ , non parallelo all'asse  $a'$  di  $\mathcal{Q}'$ , esiste un piano  $\alpha$ , non parallelo all'asse  $a$  di  $\mathcal{Q}$  tale che  $F(\alpha) = \alpha'$  (qui gioca il fatto che  $F(a) = a'$ ). E dunque la sezione  $\alpha \cap \mathcal{Q}$  viene mandata da  $F$  in  $\alpha' \cap \mathcal{Q}'$ . Ma  $F$  manda ellissi in ellissi e dunque è sufficiente studiare le sezioni di  $\mathcal{Q}$ .

Sia dunque  $\alpha$  un piano non parallelo all'asse di  $\mathcal{Q}$ . Consideriamo il piano  $\beta$ , passante per l'asse  $a$  e ortogonale ad  $\alpha$ . I due piani si tagliano lungo una retta  $r$  (vedi Fig. 39) e consideriamo le possibili posizioni di  $r$  rispetto alla parabola

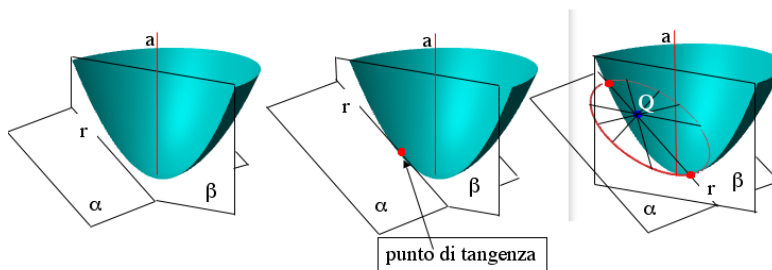


FIGURE 39. a - b - c

$\mathcal{P} = \beta \cap \mathcal{Q}$  (che genera  $\mathcal{Q}$  per rotazione).

Se  $r$  è esterna, allora  $\alpha \cap \mathcal{Q}$  è vuota (Fig. 39a). Se  $r$  è tangente, allora  $\alpha \cap \mathcal{Q}$  è un punto (Fig. 39b). Infine se  $r$  taglia la parabola in due punti<sup>10</sup> allora preso un qualunque punto  $Q$  compreso tra i due punti (Fig. 39c),  $Q$  è all'interno del paraboloide. Perciò tutte le rette di  $\alpha$  uscenti da  $Q$  devono “uscire” dal paraboloide in entrambi i versi e dunque la curva  $\alpha \cap \mathcal{Q}$  è una curva chiusa; ma sappiamo che è una conica, dunque è un'ellisse.  $\square$

In Fig. 40 rivediamo i tre casi.

<sup>10</sup> $r$  non può essere parallela all'asse  $a$ , perché  $\alpha$  non lo è, dunque se  $r$  è secante, deve tagliare  $\mathcal{P}$  in 2 punti.

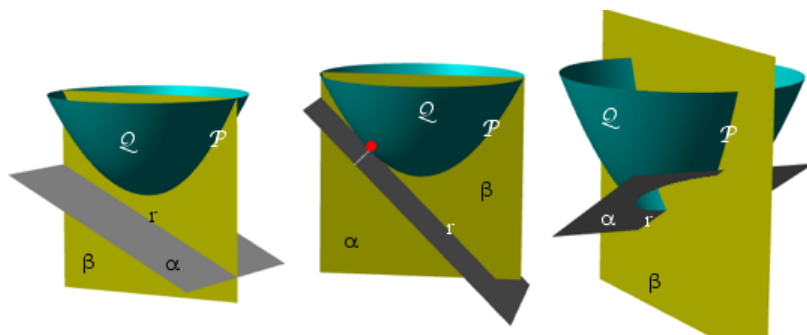


FIGURE 40. a - b - c

**Osservazione 5.14.** Per il seguito è importante notare che se  $\tau_P$  è il piano tangente ad un paraboloide ellittico nel punto  $P$ , tutta la superficie è lasciata da una parte dal piano che tocca il paraboloide solo nel punto di tangenza.

**Esercizio 5.15.** Come sono fatte le sezioni di un paraboloide ellittico con piani non paralleli all'asse?

### 5.6. Equazione cartesiana del paraboloide ellittico.

**Proposizione 5.16.** L'equazione di un paraboloide ellittico è della forma

$$(5.3) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

con  $a, b > 0$ . Vale a dire:

- Comunque fissati un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e due numeri  $a$  e  $b$ , con  $a \geq b > 0$ , il luogo dei punti dello spazio che soddisfano l'equazione (5.3) è un paraboloide ellittico. In particolare i suoi piani di simmetria sono i piani coordinati  $xz$  e  $yz$ , il cui vertice è nell'origine e l'asse delle  $z$  (asse di simmetria) è orientato verso la concavità.

- Dato un paraboloide ellittico esistono un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e due numeri  $a$  e  $b$ , con  $a \geq b > 0$ , tali che (5.3) sia l'equazione del paraboloide.

I paraboloidi di rotazione hanno equazione (5.3) con  $a = b$ .

Dimostrazione. Dall'Esercizio 2.19 segue che l'equazione di un paraboloide di rotazione  $\mathcal{Q}$  è della forma

$$x^2 + y^2 = 2pz$$

con  $p > 0$ . La possiamo riscrivere  $x^2/2p + y^2/2p = z$ , ovvero

$$(5.4) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = z$$

con  $a = \sqrt{2p}$ .

Ora procediamo ad una contrazione nella direzione dell'asse delle  $y$  di un fattore  $k < 1$ . Otteniamo così un paraboloide ellittico  $\mathcal{Q}'$ , la cui equazione si ottiene ricavando da (5.1) le variabili  $x, y, z$  e sostituendole in (5.4). Otteniamo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(ka)^2} = z.$$

Posto  $b := ka$  otteniamo (5.3). □

**N.B.** Considerando l'equazione cartesiana (5.3) vediamo che essa dipende da due parametri  $a \geq b > 0$ , ritroviamo così, sotto altra forma, il risultato dell'osservazione 5.5.

Per finire vediamo in Fig. 41 tre immagini di un paraboloide ellittico che evi-

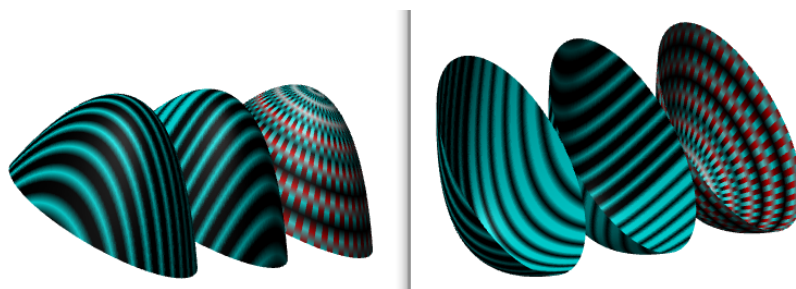


FIGURE 41

denziano le diverse sezioni. In Fig. 42a vediamo il paraboloide ellittico descritto da due famiglie di parabole parallele i cui vertici descrivono una parabola dell'altra famiglia. Aprendo il file è possibile contrarre il paraboloide e cambiare i due fasci di piani paralleli. In Fig. 3.12b si vede il paraboloide ellittico descritto da una parabola che si muove parallelamente a se stessa, con il vertice che scorre su un'altra parabola. Aprendo il file è possibile compiere le medesime operazioni. Come abbi-

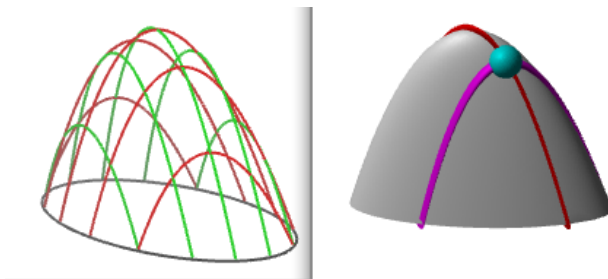


FIGURE 42. a - b Apri il files.

amo più volte insistito, assegnato il paraboloide ellittico il fascio di piani paralleli su cui si muove la prima parabola e il piano su cui giace la seconda parabola (quella che contiene i vertici) sono legati fra loro: assegnato il piano  $\alpha$  passante per l'asse del paraboloide  $\mathcal{Q}$ , i vertici delle parabole che i piani paralleli ad  $\alpha$  tagliano su  $\mathcal{Q}$  formano una parabola  $\mathcal{P}'$  che giace su un determinato piano  $\beta$  (passante per l'asse di  $\mathcal{Q}$ ).

Aggiungiamo un ultima osservazione.

**Osservazione 5.17.** *Scelte due parabole  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$  qualsiasi, disponiamole su due piani incidenti (ma non necessariamente perpendicolari come in Definizione 5.1) in modo che i loro assi di simmetria coincidano con la retta  $a$  comune ai due piani, i vertici coincidano e le loro concavità siano rivolte dalla stessa parte di  $a$ .*

*Trasliamo la parabola  $\mathcal{P}_1$  in modo che il vertice si mantenga sempre sulla parabola  $\mathcal{P}_2$ . La superficie descritta dal moto della parabola  $\mathcal{P}_1$  è un paraboloide ellittico.*



Non diamo una dimostrazione di questo risultato (che si potrebbe ottenere da uno studio delle trasformazioni affini), che comunque non è immediata conseguenza di quello che sappiamo. Si noti infatti che da una parte in Definizione 5.1 le parabole  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$  sono sì arbitrarie, ma giacciono su piani ortogonali; d'altra parte nella Proposizione 5.9 (dove il parabolide è già assegnato) i piani  $\alpha$  e  $\beta$  su cui giacciono le parabole non sono arbitrariamente scelti (la scelta di  $\alpha$  determina  $\beta$ ).