# Appunti di Istituzioni di Analisi Matematica (a.a. 09/10)*

Alberto Della Vedova† e Alberto Saracco‡

## Indice



*Queste dispense sono principalmente tratte dalle dispense del corso che Alberto Della Vedova (Capitoli 2–5) ha tenuto negli a.a. 2005/08, con alcune aggiunte (Capitolo 1) e modifiche fatte da Alberto Saracco, che ha tenuto il corso negli a.a. 2008/10.

†e-mail: alberto.dellavedova@unipr.it

‡e-mail: alberto.saracco@unipr.it

# 1 Numeri complessi

## 1.1 Motivazione e definizione

In principio erano i numeri naturali (indicati con $\mathbb{N}$), che servivano per contare: $1, 2, 3, \ldots$.

Nell'ambito dei numeri naturali, però, il problema

$$x + n = m, \quad n, m \in \mathbb{N} \tag{1}$$

non sempre è risolubile. Serve il concetto di numero negativo (e di zero!). Per risolvere il problema (1) sono stati introdotti i numeri interi (che si indicano con $\mathbb{Z}$, dal tedesco Zahl, numero): $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Nell'ambito dei numeri interi si risolve sempre il problema (1), anche quando $m, n \in \mathbb{Z}$, ma non sempre il problema più generale

$$kx + n = m, \quad k, n, m \in \mathbb{Z}\,. \tag{2}$$

Per risolvere tutte le equazioni di primo grado, serve introdurrre i numeri razionali $\mathbb{Q}$, ovvero quei numeri esprimibili come rapporto tra due numeri interi. Pitagora, dicendo tutto è numero intendeva dire che fissata una unità di lunghezza di base (il numero 1), tutte le lunghezze si potevano esprimere come un numero razionale per quella lunghezza di base. Purtroppo ciò non è vero, come la stessa scuola pitagorica ha provato: la diagonale del quadrato è incommensurabile con il lato, ovvero $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Questo nuovo problema è stato aggirato completando la retta dei numeri razionali alla retta dei numeri reali (indicati con $\mathbb{R}$), tappando i buchi, insomma.

Finiti qui i problemi? Purtroppo no. Consideriamo l'equazione di secondo grado

$$x^2 + 1 = 0\,. \tag{3}$$

Siccome il quadrato di un numero (reale) è sempre positivo, l'equazione non ammette soluzioni. Siamo cioè in presenza di un'equazione molto simile a $x+2 = 1$, che non era risolvibile utilizzando i numeri naturali.

Si può risolvere questo problema esattamente allo stesso modo, introducendo un numero (l'unità immaginaria $i$) che sia soluzione del problema (3):

$$i^2 + 1 = 0\,. \tag{4}$$

Lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ generato da 1 e $i$ è l'insieme dei *numeri complessi* (indicato con $\mathbb{C}$).

Indicheremo un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ nel seguente modo:

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}\,,$$

dove $a$ è detta la *parte reale* di $z$,

$$a = \mathfrak{Re}\, z\,,$$

e $b$ la *parte immaginaria* di $z$,

$$b = \mathfrak{Im}\, z\,.$$

La scrittura $a + bi$ è detta *forma algebrica*[1] del numero complesso $z$.

Due numeri complessi sono uguali se e solo se hanno uguale parte reale e uguale parte immaginaria.

[1] Si denoterà lo stesso numero nelle due forme $a + ib = a + bi$, utilizzando ora l'una ora l'altra a seconda di meri criteri estetici.

## 1.2 Proprietà dell'insieme dei numeri complessi

Definiamo la somma di due numeri complessi nel seguente modo:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) \;=\; (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i\,,$$

ovvero la parte reale (immaginaria) della somma di due numeri complessi è la somma delle parti reali (immaginarie) dei due numeri complessi.

Per il prodotto, osserviamo che

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + (b_1 a_2 + a_1 b_2) i + b_1 b_2 i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2) i\,,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla definizione di $i$ ($i^2 = -1$).

Per queste due operazioni (che coincidono con le solite operazioni di somma e prodotto fra numeri reali nel caso le parti immaginarie siano nulle) esistono[2]:

1. elemento neutro per la somma: $0 = 0 + 0i$;
2. inverso per la somma (opposto):
$$z = a + bi, \quad -z = -a + (-b) i\,;$$
3. elemento neutro per il prodotto: $1 = 1 + 0i$;
4. inverso per il prodotto (reciproco) per ogni elemento diverso da 0:
$$z = a + bi, \quad \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \left(-\frac{b}{a^2 + b^2}\right) i\,.$$

Pertanto:

*Osservazione* 1.1. $\mathbb{C}$ dotato delle suddette operazioni di somma e prodotto è un campo contenente $\mathbb{R}$ come sottocampo.

Una struttura di $\mathbb{R}$ che $\mathbb{C}$ non ha è quella d'ordine.Mentre dati due numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$ si può sempre dire $x > y$ o $x < y$ o $x = y$, questo non è più vero per due numeri complessi. O –meglio– non esiste alcuna struttura d'ordine su $\mathbb{C}$ che estenda la naturale struttura d'ordine in $\mathbb{R}$ e abbia le stesse proprietà.

Infatti, consideriamo i numeri complessi $0, i \in \mathbb{C}$. $i \neq 0$ (hanno diversa parte reale, e diversa parte immaginaria), quindi se $\mathbb{C}$ fosse un campo ordinato, si avrebbe $i > 0$ oppure $i < 0$.

Consideriamo la prima possibilità: $i > 0$. Siccome il prodotto di numeri positivi è positivo, $i^3 = i^2 i = -i > 0$. Siccome la somma di numeri positivi è positiva, $i + (-i) = 0 > 0$, assurdo.

Analogamente, nel secondo caso, se $i > 0$, allora $-i > 0$. Quindi $(-i)^3 = (-1)^3 i^3 = -(-i) = i > 0$. Sommando, $-i + i = 0 > 0$, assurdo.

Pertanto $i$ e 0 non sono comparabili tra loro. Ovvero:

*Osservazione* 1.2. $\mathbb{C}$ è un campo non ordinato.

Concludiamo con un'osservazione sull'unità immaginaria $i$. Calcolando $(-i)^2$ (prova a farlo per esercizio usando la definizione di prodotto fra numeri complessi), si vede che

$$(-i)^2 \;=\; -1\,, \tag{5}$$

ovvero anche $-i$ è soluzione del problema (3). Pertanto si può dire che c'è stata un'arbitrarietà nella scelta dell'unità immaginaria $i$.

Questa arbitrarietà dà luogo ad un'operazione lineare, detta *coniugio*. Più precisamente, l'operazione di coniugio è una funzione lineare $^{-} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ che agisce scambiando tra loro le due radici quadrate di $-1$, $i$ e $-i$ e lasciando invariati i numeri reali, ovvero è la funzione definita nel seguente modo:

$$z = a + ib, \qquad \overline{z} = a - ib\,. \tag{6}$$

[2]Le verifiche delle seguenti affermazioni, fatte a lezione, sono lasciate come esercizio al lettore. Si tratta di applicare le definizioni di somma e prodotto di due numeri complessi.

### 1.3 Forma trigonometrica dei numeri complessi

Come abbiamo detto, i numeri complessi sono uno spazio vettoriale di dimensione 2 (una base è data da $\{1, i\}$) su $\mathbb{R}$. Pertanto possiamo visualizzare $\mathbb{C}$ come il piano $\mathbb{R}^2$, detto piano complesso o piano di Gauss. La somma tra numeri complessi corrisponde alla somma tra vettori di $\mathbb{R}^2$.

Un punto del piano può essere individuato, oltre che dalle sue coordinate cartesiane (così come accade con la forma algebrica), anche dalle sue coordinate polari, ovvero fornendo un angolo $\theta$ (rispetto all'asse dei numeri reali positivi) e una lunghezza $\rho$ (distanza dall'origine, dal numero 0).

$\rho \geq 0$ viene detto *modulo* del numero complesso e $\theta \in \mathbb{R}$ viene detto *argomento* del numero complesso. L'argomento è definito a meno di multipli interi di $2\pi$ (angolo giro).

Vediamo come si scrive un numero complesso in coordinate polari (o trigonometriche). Dobbiamo ricavare delle formule che leghino tra loro $a, b$ e $\theta, \rho$.

Dal teorema di Pitagora si ha:

$$\rho^2 = a^2 + b^2 \,,$$

da cui

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \,. \tag{7}$$

Inoltre, dalle definizioni di seno e coseno si ha

$$a = \rho \cos\theta \,, \qquad b = \rho \sin\theta \,. \tag{8}$$

Pertanto un numero complesso si può scrivere nella forma

$$z = a + ib = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \,, \tag{9}$$

che viene chiamata *forma polare* o *forma trigonometrica*.

*Esempio* 1.3. Sia $z = \sqrt{3} + i$. Allora $\rho = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. Quindi $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin\theta = \frac{1}{2}$, da cui $\theta = \frac{\pi}{6}$, a meno di multipli interi di $2\pi$.

*Esempio* 1.4. Sia $z = a \in \mathbb{R}$. $\rho = |z| = |a|$. Se $a > 0$, $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = 0$, da cui $\theta = 0$, a meno di multipli interi di $2\pi$.

Se $a < 0$, $\cos\theta = -1$, $\sin\theta = 0$, da cui $\theta = \pi$, a meno di multipli interi di $2\pi$.

*Esempio* 1.5. Sia $z = ib$, immaginario puro. $|z| = |b|$. Se $b > 0$, $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = 1$, da cui $\theta = \frac{\pi}{2}$, a meno di multipli interi di $2\pi$.

Se $b < 0$, $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = -1$, da cui $\theta = \frac{3}{2}\pi$, a meno di multipli interi di $2\pi$.

*Esercizio* 1.6. Calcola la forma trigonometrica dei seguenti numeri complessi: $z = 1+i$, $z = 1-i$, $z = 2\pi$, $z = -2 - 2i$.

*Osservazione* 1.7. Per ogni numero complesso $z$ si ha la seguente identità che collega $z$, il suo coniugato e il quadrato del suo modulo[3]

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z} \,, \tag{10}$$

e quindi la formula per l'inverso di un numero complesso assume la seguente più semplice forma:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \,. \tag{11}$$

[3] Da notare che se $z = a \in \mathbb{R}$ è un numero reale, la formula diventa $|a|^2 = a^2$. **Attenzione**: in generale per un numero complesso $z$, $|z|^2 \neq z^2$.

### 1.3.1 Prodotto fra numeri complessi in forma trigonometrica

La forma trigonometrica è molto utile per calcolare il prodotto fra due numeri complessi. Infatti:

**Teorema 1.8.** *Siano $z_1$ e $z_2$ due numeri complessi non nulli. Espressi in forma trigonometrica, $z_k = \rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$. Allora:*

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right) , \tag{12}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right) , \tag{13}$$

*Osservazione* 1.9. Il teorema dice che per moltiplicare due numeri complessi bisogna moltiplicare i moduli e sommare gli argomenti.

*Dimostrazione.* Eseguendo il prodotto di $z_1$ e $z_2$ dalla definizione, si ottiene

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 \left((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i\left(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1\right)\right) ,$$

che –usando le formule per il seno e il coseno della somma di due angoli– coincide con la (12).

Per quanto riguarda il rapporto, usando la (11) si ha

$$\frac{1}{z_2} = \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{\rho_2(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{\rho_2^2} = \frac{1}{\rho_2}\left(cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)\right) ,$$

e dalla (12) segue subito la (13). □

Utilizzando ricorsivamente la formula (12) si ottiene:

**Teorema 1.10** (Formula di De Moivre)**.** *Se $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, allora*

$$z^n = \rho^n \left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right) . \tag{14}$$

Un numero complesso può anche essere espresso in forma esponenziale[4]. Sia $e$ il numero di Nepero, base dei logaritmi naturali[5]. Definiamo $e^{i\theta}$, con $\theta \in \mathbb{R}$ come

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta .$$

Questa notazione è lecita in quanto rispetta tutte le proprietà delle potenze:

$$e^{i0} = \cos(0) + i\sin(0) = 1 ;$$

$$e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \frac{1}{\cos(\theta) + i\sin(\theta)} = (e^{i\theta})^{-1} ;$$

e, usando la formula (12) per il prodotto di due numeri complessi

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} .$$

Pertanto possiamo usare, come forma più snella di quella trigonometrica, la *forma esponenziale* di un numero complesso:

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho\exp(i\theta) . \tag{15}$$

[4]La forma esponenziale ha dei significati più profondi di quanto non si possa far apparire ora, ma ci limiteremo a vederla come una forma abbreviata per la forma trigonometrica.

[5]Il numero di Nepero $e = 2,718281828459045\ldots$ è un numero irrazionale che appare in molti ambiti della matematica.

## 1.4 Polinomi e radici

Abbiamo introdotto l'unità immaginaria $i$ come soluzione di un polinomio di secondo grado (3). In modo naturale ci si può chiedere se con quest piccola aggiunta abbiamo risolto solo il problema di trovare una radice per quel polinomio particolare o se abbiamo risolto un problema più generale.

In realtà abbiamo proprio risolto qualcosa di molto più generale, come mostra il seguente importantissimo teorema, che lasciamo senza dimostrazione.

**Teorema 1.11** (Teorema fondamentale dell'Algebra)**.** *Sia $P(z)$ un polinomio di grado $n \in \mathbb{N}$, con coefficienti numeri complessi. $P(z)$ ammette esattamente $n$ soluzioni (contate con la loro molteplicità), ovvero si scompone nel prodotto di fattori di primo grado:*

$$P(z) \;=\; a(z-z_1)^{n_1}\cdots(z-z_k)^{n_k}\,, \tag{16}$$

*dove $z_1,\ldots,z_k \in \mathbb{C}$ sono dette radici del polinomio e $n_1,\ldots,n_k > 0$ sono interi tali che $n_1 + \cdots + n_k = n$, e $a \in \mathbb{C}$.*

Si dice che $n_l$ è la *molteciplità* del valore $z_l$ come soluzione del polinomio $P(z)$. In pratica, dire che $z_0$ ha molteplicità $k$ nel polinomio $P(z)$ vuol dire che $(z-z_0)^k$ divide $P(z)$ mentre $(z-z_0)^{k+1}$ non lo divide.

*Esempio* 1.12. $P(z) = z^3 + z^4 = z^3(z+1)$. Quindi 0 ha molteplicità 3, $-1$ ha molteplicità 1 e tutti gli altri numeri complessi hanno molteplicità 0.

*Esempio* 1.13. $P(z) = z^2 + z^4 = z^2(z^2+1) = z^2(z+i)(z-i)$. Quindi 0 ha molteplicità 2, $i$ e $-i$ hanno molteplicità 1 e tutti gli altri numeri complessi hanno molteplicità 0.

Il fatto espresso dal teorema fondamentale dell'algebra, che ogni polinomio di grado $n$ ha esattamente $n$ soluzioni è di grande importanza, ma ovviamente non spiega come fare a trovare le *radici* del polinomio (ovvero le soluzioni dell'equazione $P(z) = 0$). Per due casi particolari diamo delle formule che permettono di ricavare le radici.

*Osservazione* 1.14. **Polinomi di secondo grado**. Per un polinomio di secondo grado

$$P(z) = az^2 + bz + c, \quad a, b, c \in \mathbb{C},\; a \neq 0\,,$$

le radici sono date da

$$z_{1,2} \;=\; \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

esattamente come nel caso reale. In questo caso la radice ha sempre senso. Non nel senso che non si conoscono, ma proprio che è stato dimostrato che in generale un polinomio di grado superiore al quarto non è risolubile per radicali.

*Curiosità* 1.15. Formule simili alla precedente esistono anche per polinomi di terzo e di quarto grado, ma non per i polinomi di grado superiore.

Ovviamente, per alcuni polinomi particolari, anche di grado alto, si sanno trovare esplicitamente le soluzioni.

*Osservazione* 1.16. **Radice $n$-esima**. Le radici $n$-esime di un numero complesso $w = \rho e^{i\theta}$ ovvero i numeri $z_k$ ($k$ è un'indice che varia da 1 a $n$) tali che

$$z_k^n \;=\; w$$

sono

$$z_k \;=\; \sqrt[n]{\rho}\,\exp\left(i\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

ovvero (geometricamente) sono disposti come i vertici di un $n$-agono regolare inscritto in una circonferenza di raggio $\sqrt[n]{\rho}$ centrata nell'origine.

## 2 Equazioni differenziali ordinarie

### 2.1 Proprietà elementari

**Definizione 2.1.** Un'*equazione differenziale* (ordinaria) è un'equazione del tipo

$$f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n)}(t)) = 0,$$

dove $u$ è una funzione incognita e $u', \dots, u^{(n)}$ rappresentano le sue derivate fino all'ordine $n$. Tale $n$ è detto anche *ordine* dell'equazione differenziale.

Prima di definire cosa è una soluzione di un'equazione differenziale, esaminiamo alcuni noti modelli che sono regolati da equazioni differenziali.

*Esempio* 2.2 (La legge di Newton). Sia $u$ una funzione del tempo che rappresenta la posizione di una particella di massa $m$. In altre parole $u(t)$ e $u''(t)$ sono rispettivamente la posizione e l'accelerazione della particella all'istante $t$. Sia inoltre $F(t)$ la forza che agisce sulla particella all'istante $t$. Dunque per la legge di Newton si ha

$$m\, u''(t) - F(t) = 0,$$

che è un'equazione differenziale del secondo ordine.

*Esempio* 2.3. Se la particella dell'esempio 2.2 è un grave lasciato cadere sotto l'azione della sola forza peso[6] $F(t) = -mg$ e $u(t)$ rappresenta l'altezza dal suolo cui esso si trova all'istante $t$, allora l'equazione diviene

$$u''(t) + g = 0.$$

*Esempio* 2.4. Se la particella dell'esempio 2.2 è posta all'estremità di una molla e su di essa non agiscono altre forze, allora per la legge di Hook[7] si ha

$$mu''(t) + ku(t) = 0$$

*Esempio* 2.5 (Il modello di Malthus). Sia $u(t)$ il numero di individui che compongono una popolazione all'istante $t$. Semplificando molto, si supponga che gli unici fattori che contribuiscono all'evoluzione della popolazione siano la fertilità e la mortalità. Pertanto siano $\phi$ e $\mu$ rispettivamente il numero di nati e di morti per individuo e per unità di tempo. In altre parole, per ogni individuo della popolazione nascono $\phi$ nuovi individui e muoiono $\mu$ individui nell'arco di un'unità di tempo[8]. La variazione del numero di individui in un intervallo di tempo $h$ è

$$u(t + h) - u(t) = h\, \phi\, u(t) - h\, \mu\, u(t),$$

da cui, dividendo per $h$ e passando al limite per $h \to 0$ si ottiene[9]

$$u'(t) = (\phi - \mu)u(t).$$

Introduciamo ora il concetto di soluzione di un'equazione differenziale.

**Definizione 2.6.** Una funzione $u : I \to \mathbb{R}$ è detta *soluzione* dell'equazione differenziale

$$f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n)}(t)) = 0 \tag{17}$$

se

[6] $g$ indica l'accelerazione di gravità.

[7] secondo la quale la forza di richiamo di una molla è proporzionale al suo allungamento secondo un coefficiente $k > 0$ di elasticità dipendente dalla molla.

[8] un'anno se si conviene di misurare il tempo in anni.

[9] la quantità $\phi - \mu$ è detta *potenziale biologico*.

- $I$ è un intervallo aperto[10],
- $u$ è derivabile $n$ volte su $I$,
- l'equazione (17) è verificata per ogni $t \in I$.

Evidentemente dalla definizione precedente, se un'equazione differenziale ammette una soluzione, essa non è unica. Infatti, se $u : I \to \mathbb{R}$ è una soluzione di (17), allora per ogni sotto-intervallo $J \subset I$ la restrizione di $u$ a $J$ è soluzione. Questo problema di non-unicità potrebbe essere risolto richiedendo che l'intervallo di definizione $I$ della soluzione $u$ sia *massimale*[11], ma ancora l'unicità della soluzione non sarebbe garantita. A sostegno di ciò si consideri l'esempio 2.3: evidentemente la posizione del grave all'istante $t$ dipende dalla velocità e dall'altezza da cui esso è lanciato, cioè dalle condizioni in cui il moto ha inizio.

**Definizione 2.7.** Siano $u_0, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. La funzione $u : I \to \mathbb{R}$ è soluzione del *problema di Cauchy*

$$\begin{cases} f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n)}(t) = 0 \\ u(t_0) = u_0 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1} \end{cases}$$

se

- $u$ è soluzione dell'equazione differenziale,
- $t_0 \in I$,
- sono verificate le *condizioni (o dati) iniziali* $u(t_0) = u_0, \dots, u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1}$.

Un problema di Cauchy può avere infinite soluzioni, o non averne affatto. Nel seguito non ci occuperemo dei problemi di esistenza e di unicità delle soluzioni di equazioni differenziali e problemi di Cauchy, ma ci limiteremo a considerare alcuni casi in cui è possibile determinare esplicitamente le soluzioni.

## 2.2 Equazioni lineari del primo ordine a coefficienti continui

Siano $b : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua sull'intervallo $I$ e si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = b(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}, \tag{18}$$

dove $t_0 \in I$ è un punto dell'intervallo $I$ e $u_0 \in \mathbb{R}$ è un numero reale. La soluzione del problema (18) non è altro che la primitiva della funzione $b$ che soddisfa il dato iniziale $u(t_0) = u_0$. Pertanto, per il teorema Fondamentale del Calcolo, essa è la funzione $u : I \to \mathbb{R}$ definita da

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)ds. \tag{19}$$

Illustriamo la formula (19) tramite alcuni esempi.

*Esempio* 2.8. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = 0 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

è la funzione costante $u(t) = u_0$.

[10] cioè del tipo $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, dove $-\infty \le a < b \le +\infty$.

[11] cioè, se $v : I' \to \mathbb{R}$ è una soluzione dell'equazione (17) tale che $I \subseteq I'$ e la restrizione di $v$ a $I'$ coincide con la funzione $u$, allora $I = I'$.

*Esempio* 2.9. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = 3 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

è la funzione definita da $u(t) = u_0 + 3(t - t_0)$.

*Esempio* 2.10. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = \log(t) \\ u(1) = -2 \end{cases}$$

è la funzione $u : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da[12]

$$\begin{aligned} u(t) &= -2 + \int_1^t \log(s) ds \\ &= -2 + [s \log(s)]_1^t - \int_1^t ds \\ &= -2 + t \log(t) - (t-1) \\ &= t \log(t) - t - 1. \end{aligned}$$

Passiamo ora a considerare una classe più ampia di equazioni differenziali.

**Definizione 2.11.** Siano $a, b : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue definite su un medesimo intervallo $I$. Un'equazione differenziale del tipo

$$u'(t) + a(t)u(t) = b(t)$$

è detta *lineare del primo ordine a coefficienti continui.*

La soluzione di un'equazione di tal fatta è data dal seguente

**Teorema 2.12.** *Siano $a, b : I \to \mathbb{R}$ funzioni continue. La soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) + a(t)u(t) = b(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}, \tag{20}$$

*è*

$$u(t) = u_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t b(s) e^{A(s)} ds, \tag{21}$$

*dove la funzione $A : I \to \mathbb{R}$ è la primitiva di $a$ definita da*

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds.$$

*Dimostrazione.* Si osservi che $A'(t) = a(t)$ e per la formula di derivazione delle funzioni composte $\frac{d}{dt} e^{A(t)} = a(t) e^{A(t)}$, dunque moltiplicando il membro di sinistra dell'equazione differenziale per $e^{A(t)}$ si ottiene

$$e^{A(t)} \left( u'(t) + a(t)u(t) \right) = \frac{d}{dt} \left( e^{A(t)} u(t) \right).$$

[12] si ricordi la formula di integrazione per parti:

$$\int_a^b f(s) g'(s) ds = [f(s)g(s)]_a^b - \int_a^b f'(s) g(s) ds$$

Poiché $e^{A(t)} \neq 0$ per ogni $t \in I$, è possibile moltiplicare l'equazione per $e^{A(t)}$ e ottenere l'equazione equivalente

$$\frac{d}{dt}\left(e^{A(t)}u(t)\right) = e^{A(t)}b(t).$$

Integrando tra $t_0$ e $t$ il membro di destra diventa $\int_{t_0}^t e^{A(s)}b(s)ds$ e quello di sinistra

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{dt}\left(e^{A(t)}u(t)\right) = \left[e^{A(s)}u(s)\right]_{t_0}^t = e^{A(t)}u(t) - e^{A(t_0)}u(t_0) = e^{A(t)}u(t) - u_0,$$

dove l'ultima uguaglianza è una conseguenza del dato iniziale $u(t_0) = u_0$ e dell'uguaglianza $A(t_0) = 0$. Uguagliando i due membri così ottenuti si ha

$$e^{A(t)}u(t) - u_0 = \int_{t_0}^t e^{A(s)}b(s)ds,$$

da cui discende facilmente la formula (21). □

Si osservi che se $a$ è la funzione nulla, allora anche $A$ è nulla e la formula (21) si riduce alla (19).

*Esempio* 2.13. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) + 2t\,u(t) = 0 \\ u(0) = 5 \end{cases}. \tag{22}$$

Nelle notazioni del teorema 2.12 si hanno $a(t) = 2t$, $b(t) = 0$, $t_0 = 0$ e $u_0 = 5$. Dunque, indicata con $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la primitiva di $a$ definita da $A(t) = \int_0^t 2s\,ds = t^2$, la soluzione del problema (22) è

$$u(t) = 5e^{-t^2}$$

*Esempio* 2.14. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) - t\,u(t) = t \\ u(0) = 0 \end{cases}. \tag{23}$$

Nelle notazioni del teorema 2.12 si hanno $a(t) = -t$, $b(t) = t$, $t_0 = 0$ e $u_0 = 0$. Dunque, indicata con $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la primitiva di $a$ definita da $A(t) = \int_0^t (-s)\,ds = -t^2/2$, la soluzione del problema (23) è

$$u(t) = e^{t^2/2}\int_0^t s\,e^{-s^2/2}ds = e^{t^2}\left[-e^{-s^2/2}\right]_0^t = e^{t^2/2}\left(-e^{-t^2/2} + 1\right) = e^{t^2/2} - 1.$$

*Esempio* 2.15. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) + u(t)\sin(t) = \sin(t) \\ u(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}. \tag{24}$$

Nelle notazioni del teorema 2.12 si hanno $a(t) = \sin(t)$, $b(t) = \sin(t)$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$ e $u_0 = 1$. Dunque, indicata con $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la primitiva di $a$ definita da $A(t) = \int_{\frac{\pi}{2}}^t \sin(s)\,ds = -\cos(t)$, la soluzione del problema (24) è

$$u(t) = e^{\cos(t)} + e^{\cos(t)}\int_{\frac{\pi}{2}}^t \sin(s)e^{-\cos(s)}ds = e^{\cos(t)} + e^{\cos(t)}\left[e^{-\cos(s)}\right]_{\frac{\pi}{2}}^t = e^{\cos(t)} + \left(1 - e^{\cos(t)}\right) = 1,$$

cioè la funzione costante uguale a 1.

*Esempio* 2.16. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2u'(t) - \frac{u(t)}{\sqrt{t}} = t \\ u(1) = 0 \end{cases} . \tag{25}$$

Per poter applicare il teorema 2.12 si moltiplichino ambo i membri dell'equazione differenziale per un fattore $\frac{1}{2}$ per ottenere

$$u'(t) - \frac{u(t)}{2\sqrt{t}} = \frac{t}{2},$$

dunque si hanno $a(t) = -\frac{1}{2\sqrt{t}}$, $b(t) = \frac{t}{2}$, $t_0 = 1$ e $u_0 = 0$. Indicata con $A : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la primitiva di $a$ definita da $A(t) = \int_1^t -\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{2}\, ds = 1 - \sqrt{t}$, la soluzione del problema (25) è[13]

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{\sqrt{t}-1} \int_1^t \frac{s}{2} e^{1-\sqrt{s}} ds \\ &= e^{\sqrt{t}-1} \left[ (-\sqrt{s^3} - 3s - 6\sqrt{s} - 6) e^{1-\sqrt{s}} \right]_1^t \\ &= -\sqrt{t^3} - 3t - 6\sqrt{t} - 6 + 16 e^{\sqrt{t}-1}. \end{aligned}$$

## 2.3 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

**Definizione 2.17.** Siano $g : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ costanti reali e si supponga $a \neq 0$. L'equazione differenziale

$$a\, u''(t) + b\, u'(t) + c\, u(t) = g(t) \tag{26}$$

è detta *lineare (del secondo ordine) a coefficienti costanti.* Se $g$ è la funzione nulla, l'equazione (26) è detta *omogenea.* In generale l'equazione (26) si dice *completa* in relazione alla equazione *omogenea associata*

$$a\, u''(t) + b\, u'(t) + c\, u(t) = 0.$$

Prima di affrontare il problema della determinazione di soluzioni dell'equazione (26) osserviamo i seguenti fatti fondamentali

- Le soluzioni dell'equazione omogenea $a\, u''(t) + b\, u'(t) + c\, u(t) = 0$ formano uno spazio vettoriale di dimensione due. Se $u_1$ e $u_2$ sono soluzioni, allora è immediato verificare che la combinazione lineare $w(t) = c_1\, u_1(t) + c_2\, u_2(t)$ è soluzione per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. In seguito vedremo come determinare una base di tale spazio vettoriale a partire dai coefficienti $a, b, c$.
- Se $v$ è una soluzione particolare dell'equazione completa (26), allora ogni altra soluzione si ottiene sommando a $v$ una soluzione dell'equazione omogenea associata. Ciò discende dal fatto che la differenza di due soluzioni dell'equazione completa è una soluzione dell'equazione omogenea associata.

[13]per determinare una primitiva di $\frac{s}{2}e^{1-\sqrt{s}}$ conviene effettuare la sostituzione $r = -\sqrt{s}$ (da cui $ds = 2r\, dr$) per ottenere

$$\int \frac{s}{2} e^{1-\sqrt{s}} ds = \int \frac{r^2}{2} e^{1+r} 2r dr = e \int r^3 e^r dr,$$

e quindi, dopo aver integrato ripetutamente per parti

$$\begin{aligned} \int r^3 e^r dr &= r^3 e^r - 3 \int r^2 e^r dr = r^3 e^r - 3r^2 e^r + 6 \int r e^r dr = r^3 e^r - 3r^2 e^r + 6re^r - 6e^r \\ &= \left(r^3 - 3r^2 + 6r - 6\right) e^r, \end{aligned}$$

$$\int \frac{s}{2} e^{1-\sqrt{s}} ds = \left(r^3 - 3r^2 + 6r - 6\right) e^{r+1} = \left(-\sqrt{s^3} - 3s - 6\sqrt{s} - 6\right) e^{1-\sqrt{s}}.$$

**Definizione 2.18.** La *soluzione generale* dell'equazione (26) è la funzione definita da

$$u(t) = v(t) + c_1\, u_1(t) + c_2\, u_2(t), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

dove $v$ è una soluzione particolare dell'equazione completa e $u_1, u_2$ sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata.

*Esempio* 2.19. L'equazione differenziale

$$u''(t) - 3u'(t) + 2u(t) = 0$$

ammette come soluzioni le funzioni definite da $u_1(t) = e^t$ e $u_2(t) = e^{2t}$, pertanto la soluzione generale è

$$u(t) = c_1\, e^t + c_2\, e^{2t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

*Esempio* 2.20. Una soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$u''(t) - 3u'(t) + 2u(t) = t$$

è la funzione definita da $v(t) = \frac{t}{2}$. Inoltre l'equazione omogenea associata coincide con quella dell'esempio precedente, pertanto la soluzione generale è

$$u(t) = \frac{t}{2} + c_1\, e^t + c_2\, e^{2t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Affrontiamo ora il problema di determinare la soluzione generale di un'equazione a coefficienti costanti omogenea. A tal fine introduciamo la seguente

**Definizione 2.21.** Sia $a\, u''(t) + b\, u'(t) + c\, u(t) = 0$ un'equazione differenziale a coefficienti costanti omogenea. Il *polinomio caratteristico* di tale equazione è definito da

$$\chi(x) = a\, x^2 + b\, x + c.$$

Le soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea sono legate alle radici del polinomio caratteristico vale infatti la seguente

**Proposizione 2.22.** *Sia $u$ la soluzione generale dell'equazione differenziale $a\, u''(t) + b\, u'(t) + c\, u(t) = 0$. Si danno i seguenti casi*

1. *se $b^2 - 4ac > 0$, il polinomio caratteristico $\chi(x)$ ha due radici distinte $x_1, x_2$ ricavabili dalla nota formula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e si ha*

$$u(t) = c_1 e^{x_1 t} + c_2 e^{x_2 t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$

2. *se $b^2 - 4ac = 0$, il polinomio caratteristico $\chi(x)$ ha una sola radice (di molteplicità due) $x_0 = -\frac{b}{2a}$ e si ha*

$$u(t) = (c_1 + c_2 t) e^{x_0 t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$

3. *se $b^2 - 4ac < 0$, il polinomio caratteristico $\chi(x)$ ha due radici complesse $x_1, x_2$ ricavabili dalla formula $x = p \pm q\sqrt{-1}$, dove $p = -\frac{b}{2a}$ e $q = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$, e si ha*

$$u(t) = e^{pt} \left( c_1 \cos(q\, t) + c_2 \sin(q\, t) \right), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

*Dimostrazione.* Omessa. □

*Esempio* 2.23. Si consideri l'equazione differenziale dell'esempio 2.19, il cui polinomio caratteristico è

$$\chi(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$

Evidentemente esso ha radici $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ e per la proposizione 2.22 (caso 1) la soluzione generale dell'equazione è quella riportata in 2.19.

*Esempio* 2.24. Si consideri l'equazione differenziale

$$u''(t) + 2u'(t) + u(t) = 0,$$

il cui polinomio caratteristico è $\chi(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. Evidentemente esso ha la sola radice $x_0 = -1$ di molteplicità due. Per la proposizione 2.22 (caso 2) dunque la soluzione generale dell'equazione considerata è

$$u(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

*Esempio* 2.25. Si consideri l'equazione differenziale

$$u''(t) - 2u'(t) + 5u(t) = 0,$$

il cui polinomio caratteristico $\chi(x) = x^2 - 2x + 5$ ha discriminante $(-2)^2 - 20 = -16$ è negativo. Pertanto $\chi(x)$ ha due radici complesse e calcolati $p = 1$ e $q = 2$, per la proposizione 2.22 (caso 3) la soluzione generale dell'equazione considerata è

$$u(t) = e^t \left(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)\right), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2.$$

Grazie alla proposizione 2.22, per determinare la soluzione completa di un'equazione non omogenea resta il solo problema di determinarne una soluzione particolare. La seguente proposizione fornisce un algoritmo per risolvere tale problema nel caso in cui il termine noto (cioè la funzione $g$ nell'equazione (26)) sia di una particolare forma.

**Proposizione 2.26.** *Si consideri l'equazione differenziale*

$$au''(t) + bu'(t) + cu(t) = g(t), \tag{27}$$

*dove*

$$g(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)p(t) \qquad \textit{oppure} \qquad g(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)p(t),$$

*con* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e* $p$ *un polinomio di grado* $m$.
*L'equazione* (27) *ammette una soluzione particolare della forma*

$$v(t) = t^\mu e^{\alpha t}\left(P(t)\cos(\beta t) + Q(t)\sin(\beta t)\right),$$

*dove* $\mu$ *è la molteplicità*[14] *di* $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ *tra le radici del polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata a* (27) *e* $P, Q$ *sono polinomi di grado* $m$ *che è possibile determinare imponendo che* $v$ *sia soluzione di* (27).

*Dimostrazione.* Omessa. □

*Esempio* 2.27. Si consideri l'equazione differenziale

$$u''(t) - u(t) = t^2. \tag{28}$$

Alla luce della teoria esposta sopra, per determinarne la soluzione generale è opportuno operare come segue.

[14]Conveniamo di porre $\mu = 0$ se il numero complesso $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ non è radice del polinomio caratteristico. Inoltre si osservi che $\mu = 2$ se solo se $b^2 - 4ac = 0$, $\beta = 0$ e $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

1. Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata $u''(t) - u(t) = 0$ è

$$\chi(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

Poiché le radici $\{-1, 1\}$ di $\chi(x)$ sono reali e distinte, per la proposizione 2.22 l'equazione omogenea ha soluzione generale

$$w(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Passando all'equazione completa (28), si osservi che il termine noto $g(t) = t^2$ è della forma considerata nella proposizione 2.26. In particolare $g(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)p(t)$, dove $\alpha = 0$, $\beta = 0$ e il polinomio $p(t) = t^2$ ha grado $m = 2$. Inoltre si osservi che $\alpha + \beta\sqrt{-1} = 0$ non è radice di $\chi(x)$, dunque poniamo $\mu = 0$. Dalla proposizione 2.26 è possibile concludere che l'equazione completa ammette una soluzione particolare della forma

$$v(t) = P_0 t^2 + P_1 t + P_2, \qquad P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{R}.$$

Per determinare $v$, poiché $v'(t) = 2P_0 t + P_1$ e $v''(t) = 2P_0$, sostituendo nell'equazione completa si ha

$$2P_0 - P_0 t^2 - P_1 t - P_2 = t^2$$

da cui, osservando che quest'ultima equazione deve essere verificata per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} P_0 + 1 = 0 \\ P_1 = 0 \\ P_2 - 2P_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} P_0 = -1 \\ P_1 = 0 \\ P_2 = -2 \end{cases}$$

Pertanto $v(t) = -t^2 - 2$.

3. La soluzione generale dell'equazione completa (28) è

$$u(t) = v(t) + w(t) = -t^2 - 2 + c_1 e^{-t} + c_2 e^t, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

*Esempio* 2.28. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(t) - 4u'(t) + 13u(t) = t\sin(t) \\ u(0) = \frac{1}{200} \\ u'(0) = 0 \end{cases} . \tag{29}$$

Alla luce della teoria esposta sopra, per determinarne la soluzione è opportuno operare come segue.

1. Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata $u''(t) - 4u'(t) + 13u(t) = 0$ è

$$\chi(x) = x^2 - 4x + 13.$$

Poiché le radici $\{2 + 3\sqrt{-1}, 2 - 3\sqrt{-1}\}$ di $\chi(x)$ sono della forma $p \pm q\sqrt{-1}$ con $p = 2$ e $q = 3$, per la proposizione 2.22 l'equazione omogenea ha soluzione generale

$$w(t) = e^{2t}\left(c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t)\right), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Passando all'equazione completa (28), si osservi che il termine noto $g(t) = t\sin(t)$ è della forma considerata nella proposizione 2.26. In particolare $g(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)p(t)$, dove $\alpha = 0$, $\beta = 1$ e il polinomio $p(t) = t$ ha grado $m = 1$. Inoltre si osservi che $\alpha + \beta\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$ non

è radice di $\chi(x)$, dunque poniamo $\mu = 0$. Dalla proposizione 2.26 è possibile concludere che l'equazione completa ammette una soluzione particolare della forma

$$v(t) = (P_0 t + P_1)\cos(t) + (Q_0 t + Q_1)\sin(t), \qquad P_0, P_1, Q_0, Q_1 \in \mathbb{R}.$$

Per determinare $v$, poiché

$$v'(t) = (P_0 + Q_0 t + Q_1)\cos(t) + (Q_0 - P_0 t - P_1)\sin(t)$$
$$v''(t) = (2Q_0 - P_1 - P_0 t)\cos(t) + (-2P_0 - Q_1 - Q_0 t)\sin(t),$$

sostituendo nell'equazione completa si ha

$$\begin{aligned}(2Q_0 + 12P_1 - 4P_0 - 4Q_1 - 4Q_0 t + 12P_0 t)\cos(t) &+ \\ + (-2P_0 + 12Q_1 - 4Q_0 + 4P_1 + 12Q_0 t + 4P_0 t)\sin(t) &= t\sin(t)\end{aligned}$$

da cui, osservando che quest'ultima equazione deve essere verificata per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} Q_0 + 6P_1 - 2P_0 - 2Q_1 = 0 \\ 3P_0 - Q_0 = 0 \\ -P_0 + 6Q_1 - 2Q_0 + 2P_1 = 0 \\ 12Q_0 + 4P_0 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} P_0 = \frac{1}{40} \\ P_1 = \frac{1}{200} \\ Q_0 = \frac{3}{40} \\ Q_1 = \frac{11}{400} \end{cases}$$

Pertanto $v(t) = \left(\frac{t}{40} + \frac{1}{200}\right)\cos(t) + \left(\frac{3t}{40} + \frac{11}{400}\right)\sin(t)$.

3. La soluzione generale dell'equazione completa (28) è

$$u(t) = \frac{(10t + 2)\cos(t) + (30t + 11)\sin(t)}{400} + e^{2t}\left(c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t)\right), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4. Infine per determinare la soluzione del problema di Cauchy si consideri

$$\begin{aligned}u'(t) = \frac{(30t + 21)\cos(t) + (10t - 28)\sin(t)}{400} &+ \\ + e^{2t}\left((2c_1 + 3c_2)\cos(3t) + (2c_2 - 3c_1)\sin(3t)\right)&,\end{aligned}$$

Da cui, imponendo le condizioni iniziali, si ottiene

$$\begin{cases} \frac{1}{200} + c_1 = \frac{1}{200} \\ \frac{21}{400} + 2c_1 + 3c_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = -\frac{7}{400} \end{cases},$$

e quindi la soluzione cercata è

$$u(t) = \frac{(10t + 2)\cos(t) + (30t + 11)\sin(t) - 7e^{2t}\sin(3t)}{400}.$$

## 2.4 Equazioni differenziali a variabili separabili

**Definizione 2.29.** Siano $f : J \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ funzioni continue definite su intervalli $I, J \subset \mathbb{R}$. L'equazione differenziale

$$u'(t) = f\left(u(t)\right) g(t) \tag{30}$$

è detta *a variabili separabili*. Se $c \in J$ è uno zero[15] della funzione $f$, allora la funzione costante

$$u(t) = c$$

è detta *soluzione stazionaria* dell'equazione (30).

[15] In altre parole il numero reale $c$ soddisfa l'equazione $f(c) = 0$.

Evidentemente una soluzione $u$ dell'equazione (30) deve essere definita in un intervallo $L \subseteq I$ e assumere valori in $J$.

Per determinare soluzioni non stazionarie dell'equazione (30), dividendo per $f(u(t))$, supposto non nullo, si ha

$$\frac{u'(t)}{f(u(t))} = g(t),$$

da cui, integrando rispetto a $t$ si ottiene

$$\int \frac{u'(t)}{f(u(t))} dt = \int g(t)dt + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Ora, tramite la sostituzione $u(t) = u$ (da cui $u'(t)dt = du$) si ha

$$\int \frac{du}{f(u)} = \int g(t)dt + k$$

da cui è possibile ricavare la soluzione $u$ nella forma implicita

$$\Phi(u(t)) = G(t) + k, \qquad k \in \mathbb{R},$$

essendo $\Phi$ e $G$ rispettivamente primitive delle funzioni $\frac{1}{f}$ e $g$.

*Esempio* 2.30. Si consideri l'equazione differenziale

$$u'(t) = \frac{t}{u(t)}.$$

Evidentemente si tratta di un'equazione a variabili separabili e, nelle notazioni della definizione 2.29, si hanno

$$f(u) = \frac{1}{u} \qquad \text{e} \qquad g(t) = t.$$

Poiché la funzione $f$ non ha zeri, non esistono soluzioni stazionarie.

Per determinare le soluzioni non stazionarie si divida l'equazione per $f(u(t))$, supposto non nullo, ottenendo

$$u(t)u'(t) = t.$$

Integrando rispetto a $t$ e sostituendo $u(t) = u$ nell'integrale di sinistra si ha

$$\int u\, du = \int t\, dt + k, \qquad k \in \mathbb{R},$$

da cui

$$\frac{u(t)^2}{2} = \frac{t^2}{2} + k,$$

e quindi la soluzione generale dell'equazione considerata è

$$u(t) = \pm\sqrt{t^2 + k}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

*Esempio* 2.31. Si consideri l'equazione differenziale

$$u'(t) = \big(u(t)^2 - 1\big)\, t.$$

Evidentemente si tratta di un'equazione a variabili separabili e, nelle notazioni della definizione 2.29, si hanno

$$f(u) = u^2 - 1 \qquad \text{e} \qquad g(t) = t.$$

Poiché la funzione $f$ ha zeri $\{-1, 1\}$, esistono due soluzioni stazionarie $u_1(t) = -1$, $u_2(t) = 1$.

Per determinare le soluzioni non stazionarie si divida l'equazione per $f(u(t))$, supponendo quest'ultimo non nullo, ottenendo

$$\frac{u'(t)}{u(t)^2 - 1} = t.$$

Integrando rispetto a $t$ si ha

$$\int \frac{u'(t)}{u(t)^2 - 1} dt = \int t dt + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

e quindi, tramite la sostituzione $u(t) = u$,

$$\int \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{t^2}{2} + k$$

che equivale a [16]

$$\int \frac{du}{u-1} + \int \frac{du}{u+1} = t^2 + 2k$$

e finalmente

$$\log\left(\frac{|u(t) - 1|}{|u(t) + 1|}\right) = t^2 + 2k. \tag{31}$$

Per esplicitare $u(t)$ si applichi la funzione esponenziale ad entrambi i membri di (31)

$$\left|\frac{u(t) - 1}{u(t) + 1}\right| = e^{t^2 + 2k}$$

e quindi

$$\frac{u(t) - 1}{u(t) + 1} = \pm e^{2k} e^{t^2}.$$

Finalmente la soluzione non stazionaria dell'equazione considerata è[17]

$$u(t) = \frac{1 + c\, e^{t^2}}{1 - c\, e^{t^2}}, \qquad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

# 3 Curve piane

## 3.1 Proprietà elementari

**Definizione 3.1.** Sia $[a, b] = \{t \in \mathbb{R} \,|\, a \leq t \leq b\}$ un intervallo dell'insieme dei numeri reali e si considerino due funzioni continue

$$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}.$$

L'applicazione $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ di $[a, b]$ nel piano $\mathbb{R}^2$ definita da

$$\varphi(t) = (f(t), g(t))$$

è detta **curva piana** di **componenti** $f$ e $g$.

Una curva piana è dunque una funzione il cui dominio è un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e codominio il piano $\mathbb{R}^2$.

[16] Per calcolare l'integrale $\int \frac{du}{u^2-1}$ si osservi che $\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} + \frac{1}{u+1}\right)$.

[17] Si osservi che, per l'arbitrarietà di $k$, è possibile sostituire $\pm e^{2k}$ con una costante $c \neq 0$.

**Definizione 3.2.** L'insieme

$$\varphi([a,b]) \subset \mathbb{R}^2,$$

cioè l'immagine del dominio $[a,b]$ di una curva piana $\varphi$, è detto **sostegno** della curva.

Evidentemente il sostegno di una curva di componenti $f$ e $g$ ha equazioni parametriche[18]

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in [a,b].$$

*Esempio* 3.3. Siano $(x_0, y_0)$ un punto del piano e $(v_x, v_y)$ un vettore non nullo. Il sostegno della curva piana $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\varphi(t) = (x_0 + tv_x, y_0 + tv_y)$$

è il segmento di estremi $(x_0, y_0)$ e $(x_0 + v_x, y_0 + v_y)$.

*Esempio* 3.4. Siano $(x_0, y_0)$ e $(x_1, y_1)$ due punti distinti del piano. Il sostegno della curva piana $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\varphi(t) = ((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)y_0 + ty_1)$$

è il segmento di estremi $(x_0, y_0)$ e $(x_1, y_1)$.

*Esempio* 3.5. Siano $r$ un numero reale positivo e $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva piana definita da

$$\varphi(r\cos(t), r\sin(t)).$$

Il sostegno di $\varphi$ è una circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $r$. Infatti dalla rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

si ottiene facilmente $x^2 + y^2 = r^2(\cos(t)^2 + \sin(t)^2) = r^2$.

*Esempio* 3.6. Più in generale, dati due numeri reali positivi $a, b$ e un punto del piano $(x_0, y_0)$, si consideri la curva piana $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\varphi(t) = (x_0 + a\cos(t), y_0 + b\sin(t)).$$

Il sostegno di $\varphi$ è un ellisse di centro $(x_0, y_0)$ e semiassi $a, b$. Infatti dalla rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos(t) \\ y = y_0 + b\sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

si ottengono facilmente $\cos(t) = \frac{x - x_0}{a}$ e $\sin(t) = \frac{y - y_0}{b}$ e dunque

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

che è la ben nota equazione cartesiana di un ellisse.

[18] Il lettore potrebbe ritenere che il sostegno di una curva piana sia sempre rappresentabile da una linea, più o meno contorta, nel piano. Ciò è falso. Infatti esistono curve (scoperte da Peano nel 1890) il cui sostegno riempie l'intero quadrato. Nel seguito non faremo mai riferimento a queste curve "patologiche".

*Esempio* 3.7. Se $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, il sostegno della curva piana $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\varphi(t) = (t, g(t))$$

non è altro che il grafico della funzione $g$. Infatti dalla rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = t \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

si ricava $y = g(x)$, cioè l'equazione del grafico di $g$.

**Definizione 3.8.** Una curva piana $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ si dice **chiusa** se

$$\varphi(a) = \varphi(b).$$

Si verifica immediatamente che le curve degli esempi 3.5 e 3.6 sono chiuse mentre quelle degli esempi 3.3 e 3.4 non lo sono.
Se una curva è chiusa, non necessariamente il suo sostegno è rappresentabile tramite una linea chiusa, né vale il viceversa. I seguenti esempi illustrano questo fatto.

*Esempio* 3.9. Sia $\varphi : [0, 3\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva piana definita da

$$\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

Si osservi che $\varphi(0) = (1, 0)$ e $\varphi(3\pi) = (-1, 0)$, dunque la curva non è chiusa. D'altra parte $\varphi(t)$ è il punto d'intersezione tra una circonferenza $C$ di raggio unitario centrata nell'origine degli assi e la semiretta $s_t$ uscente dall'origine che forma un angolo $t$ (misurato in radianti e in verso anti-orario) con il semiasse delle ascisse positive. Pertanto, al variare di $t$ in $[0, 3\pi]$ il punto $\varphi(t)$ percorre $C$ una volta e mezza. Quindi il sostegno di $\varphi$ è $C$.

*Esempio* 3.10. Sia $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ la curva piana definita da

$$\varphi(t) = (0, t^2).$$

Poiché $\varphi(-1) = \varphi(1) = (0, 1)$ la curva è chiusa. D'altra parte il sostegno di $\varphi$ è evidentemente contenuto nella retta di equazione $x = 0$ e precisamente è il segmento di estremi $(0, 0)$ e $(0, 1)$.

**Definizione 3.11.** Una curva piana $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ si dice **semplice** se per ogni $t_1, t_2 \in [a, b]$ distinti e non entrambi coincidenti con gli estremi si ha

$$\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2).$$

Si osservi che se una curva $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ non è chiusa, allora essa è semplice se e soltanto se è iniettiva.
Le curve degli esempi 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6 sono semplici[19].

[19]La verifica è lasciata al lettore come esercizio

*Esempio* 3.12. Si consideri la curva $\varphi : [-2,2] \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(t) = \left(t^2, t^3 - t\right).$$

Essa non è semplice in quanto

$$\varphi(-1) = (1,0) = \varphi(1).$$

Il sostegno di $\varphi$ si può determinare a partire dalla rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x &= t^2 \\ y &= t^3 - t \end{cases} \qquad t \in [-2,2],$$

da cui elevando al quadrato la seconda equazione e sostituendo la prima si ricava

$$y^2 = x^3 - 2x^2 + x. \tag{32}$$

Pertanto il sostegno di $\varphi$ è contenuto nel luogo[20] dei punti che soddisfano l'equazione (32).

*Esempio* 3.13. Si consideri la curva $\varphi : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\varphi(t) = (\cos(5t)\cos(t), \cos(5t)\sin(t)).$$

Evidentemente $\varphi$ non è semplice, infatti

$$\varphi\left(\frac{\pi}{10}\right) = \varphi\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \varphi\left(\frac{5\pi}{10}\right) = \varphi\left(\frac{7\pi}{10}\right) = \varphi\left(\frac{9\pi}{10}\right) = (1,0).$$

Si osservi che la semplicità di una curva è legata alla presenza di punti di "auto-intersezione" nel sostegno, ma i due fatti non sono equivalenti. Evidentemente se il sostegno ha un punto di auto-intersezione, la curva non è semplice, ma non vale il viceversa. Ciò è chiaro dall'esempio 3.9. In quel caso infatti $\varphi$ non è semplice in quanto $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1) = \varphi\left(\frac{5\pi}{2}\right)$, ma il sostegno è una circonferenza (dunque privo di punti di auto-intersezione).

## 3.2 Curve regolari

**Definizione 3.14.** Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ la curva piana di componenti $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ e si assuma che esistano continue e le derivate

$$f', g' : [a,b] \to \mathbb{R}$$

delle componenti. Per ogni $t \in [a,b]$ il vettore

$$\varphi'(t) = (f'(t), g'(t))$$

è detto **vettore tangente** alla curva in $t$.

Sia $t_0 \in [a,b]$ un punto fissato. È utile considerare il vettore tangente $\varphi'(t_0)$ spiccato dal punto $\varphi(t_0)$. Se esso è non nullo e $\varphi$ è semplice, allora la retta tangente al sostegno di $\varphi$ nel punto $\varphi(t_0)$ è diretta come $\varphi'(t_0)$. In generale, però, ciò non è sempre vero, come illustrato nei seguenti esempi.

[20] Per disegnare tale luogo, dopo aver osservato che $y = \pm\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}$, è sufficiente tracciare il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 + x}$ e unire il suo simmetrico rispetto all'asse delle ascisse.

*Esempio* 3.15. Sia $\varphi$ la curva piana dell'esempio 3.12. Evidentemente le componenti di $\varphi$ sono funzioni derivabili e il vettore tangente in $t \in [-2, 2]$ è

$$\varphi'(t) = (2t, 3t^2 - 1).$$

Il sostegno di $\varphi$ non ha una definita retta tangente nel punto $(1, 0)$, tuttavia $\varphi'(-1) = (-2, 2)$ e $\varphi'(1) = (2, 2)$. Dunque i vettori tangenti in $t = -1$ e $t = 1$ sono diretti come i due rami della curva $\varphi$ concorrenti in $(1, 0)$.

*Esempio* 3.16. Sia $\varphi : [-\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\varphi(t) = (\cos(t^3), \sin(t^3)).$$

Ragionando come nell'esempio 3.5 si ricava che il sostegno di $\varphi$ è una circonferenza centrata nell'origine di raggio unitario e pertanto è ben definita la retta tangente in ogni suo punto. D'altra parte si ha

$$\varphi'(t) = (-3t^2 \sin(t^3), 3t^2 \cos(t^3))$$

e in particolare $\varphi'(0) = (0, 0)$. Dunque la direzione della retta tangente al sostegno di $\varphi$ nel punto $\varphi(0) = (1, 0)$ non ha la direzione del vettore $\varphi'(0)$.

Le curve piane il cui vettore tangente è ovunque non nullo sono di particolare importanza.

**Definizione 3.17.** Sia $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ la curva piana di componenti $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ e si assuma che esistano continue e le derivate

$$f', g' : [a, b] \to \mathbb{R}$$

delle componenti. Se per ogni $t \in [a, b]$ si ha

$$\varphi'(t) \neq (0, 0),$$

la curva $\varphi$ è detta **regolare**.

*Esempio* 3.18. La curva piana $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\varphi(t) = (t, t^2)$$

è regolare. Infatti per ogni $t \in [-1, 1]$ abbiamo

$$\varphi'(t) = (1, 2t) \neq (0, 0).$$

*Esempio* 3.19. La curva piana $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\varphi(t) = (t, |t|)$ non è regolare. Infatti la componente $g(t) = |t|$ non è derivabile nel punto $0 \in [-1, 1]$.

*Esempio* 3.20. La curva piana $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ non è regolare. Le componenti $f(t) = t^2$ e $g(t) = t^3$ hanno derivate continue $f'(t) = 2t$ e $g'(t) = 3t^2$, ma

$$\varphi'(0) = (0, 0).$$

L'importanza delle curve regolari risiede nel fatto che possono essere approssimate da una retta in ogni punto del loro dominio.

**Definizione 3.21.** Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare di componenti $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ e sia $t_0 \in [a,b]$ un punto fissato. La **retta tangente** a $\varphi$ nel punto $t = t_0$ è la retta di equazioni parametriche[21]

$$(x,y) = \varphi(t_0) + s\,\varphi'(t_0), \quad s \in \mathbb{R}.$$

*Esempio* 3.22. La retta tangente ad un segmento (cfr. esempi 3.3 e 3.4) in ogni suo punto coincide con la retta su cui esso giace. La verifica di questo fatto elementare è lasciata al lettore.

*Esempio* 3.23. La retta $r$ tangente alla curva $\varphi : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$ nel punto $t = 0$ ha equazione

$$x = 1.$$

Infatti si ha

$$\varphi'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$$

e dunque $r$ ha equazoni parametriche

$$(x,y) = (1,s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Vale la pena di osservare che la retta tangente ad una curva regolare in un punto del dominio è un concetto più generale della retta tangente al sostegno della curva stessa. Infatti può accadere che sia definita la retta tangente ad una curva $\varphi$ in un punto $t = t_0$ anche se il sostegno di $\varphi$ non ammette tangente nel punto $\varphi(t_0)$.

*Esempio* 3.24. Sia $\varphi$ la curva dell'esempio 3.12. Lasciamo al lettore la verifica della regolarità di $\varphi$. Abbiamo osservato nell'esempio 3.15 che i vettori tangenti a $\varphi$ in $t = -1$ e $t = 1$ sono rispettivamente

$$\varphi'(-1) = (-2,2) \quad \text{e} \quad \varphi'(1) = (2,2),$$

pertanto le rette tangenti in questi punti hanno equazioni

$$x + y = 1 \quad \text{e} \quad x - y = 1.$$

Ruotando di un angolo retto in senso anti-orario il vettore tangente ad una curva regolare otteniamo un vettore che, a buon diritto, può essere considerato perpendicolare alla curva (in quanto perpendicolare alla retta tangente nel punto di tangenza).

**Definizione 3.25.** Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare di componenti $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Per ogni $t \in [a,b]$ Il vettore

$$n_\varphi(t) = (-g'(t), f'(t))$$

è detto **vettore normale** a $\varphi$ in $t$.

---

[21] Più esplicitamente possiamo scrivere

$$\begin{cases} x = f(t_0) + s\,f'(t_0) \\ y = g(t_0) + s\,g'(t_0) \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, eliminato il parametro $s$, abbiamo l'equazione cartesiana

$$(x - f(t_0))\,g'(t_0) - (y - g(t_0))\,f'(t_0) = 0.$$

Poiché la rotazione del piano di un angolo retto in senso anti-orario è rappresentata dalla matrice[22]

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

l'uguaglianza

$$n_\varphi(t) = R \cdot \varphi'(t)$$

mostra che il vettore normale $n_\varphi(t)$ si ottiene ruotando il vettore tangente $\varphi'(t)$ e giustifica la definizione precedente.

Tramite il vettore normale appena definito possiamo dare la seguente

**Definizione 3.26.** Sia $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare di componenti $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia $t_0 \in [a, b]$ un punto fissato. La **retta normale** a $\varphi$ nel punto $t = t_0$ è la retta di equazioni parametriche[23]

$$(x, y) = \varphi(t_0) + s\, n_\varphi(t_0), \quad s \in \mathbb{R}.$$

La determinazione delle rette normali alle curve degli esempi 3.22, 3.23 e 3.24 sono lasciate per esercizio al lettore.

## 3.3 Lunghezza e baricentro di una curva regolare

La lunghezza di una curva è definita approssimando la curva stessa con linee spezzate.

**Definizione 3.27.** Sia $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare di componenti $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Per ogni *partizione*

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,$$

dell'intervallo $[a, b]$ si consideri la somma

$$L_P(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|,$$

ove $P$ denota la partizione scelta. Inoltre definiamo

$$|P| = \max\{t_1 - t_{i-1} \,|\, i = 1, \ldots, n\}$$

l'*ampiezza della partizione*[24]. La **lunghezza** della curva $\varphi$ è

$$L(\varphi) = \lim_{|P| \to 0} L_P(\varphi).$$

[22]Rispetto alla base canonica $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

[23]Più esplicitamente possiamo scrivere

$$\begin{cases} x = f(t_0) - s\, g'(t_0) \\ y = g(t_0) + s\, f'(t_0) \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, eliminato il parametro $s$, abbiamo l'equazione cartesiana

$$(x - f(t_0))\, f'(t_0) + (y - g(t_0))\, g'(t_0) = 0.$$

[24]In altre parole, rappresentato l'intervallo $[a, b]$ tramite un segmento, la partizione $P$ equivale alla suddivisione di $[a, b]$ in sotto-segmenti $[t_i - t_{i-1}]$ per $i = 1, \ldots, n$. Tra questi $n$ segmenti ve n'é uno di lunghezza massima, che per definizione è l'ampiezza della partizione $P$.

*Osservazione* 3.28. Data una partizione $P$ dell'intervallo $[a,b]$, la quantità $L_P(\varphi)$ non è altro che la lunghezza della spezzata avente per vertici i punti $\varphi(a), \varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_{n-1}), \varphi(b)$; la lunghezza della curva $\varphi$ è dunque per definizione il limite della lunghezza della spezzata al tendere a zero dell'ampiezza della partizione $P$. Il lettore più attento non avrà mancato di interrogarsi circa l'esistenza e la finitezza di tale limite. Entrambe queste proprietà sono garantite dall'ipotesi che la curva sia regolare: a tale riguardo si veda il seguente teorema.
D'altra parte, non è difficile produrre un esempio di curva non regolare per la quale il limite di cui sopra è infinito. Curve che presentano tali "patologie" sono dette *non rettificabili.*

La determinazione della lunghezza di una curva regolare è riconducibile al calcolo di un integrale definito. Vale infatti il seguente

**Teorema 3.29** (di rettificabilità)**.** *Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare. Si ha* [25]*:*

$$L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt.$$

È omessa la dimostrazione, ma si invita il lettore a meditare sull'importanza di tale risultato. In particolare si noti che il problema di determinare un limite al variare di tutte le partizioni di un intervallo, è ridotto al calcolo di un integrale definito.

*Esempio* 3.30. Si consideri la curva piana $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\varphi(t) = (3t, 4t).$$

È immediato verificare che essa è regolare e il suo sostegno è il segmento $S$ di estremi i punti $(0,0)$ e $(3,4)$. Si osservi che

1. la lunghezza di $S$ è $|S| = |(3,4)| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$,

2. Per ogni partizione $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ dell'intervallo $[0,1]$ si ha

$$\begin{aligned} L_P(\varphi) &= \sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |(3,4)|(t_i - t_{i-1}) \\ &= 5\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) \\ &= 5(\cancel{t}_1 - t_0 + \cancel{t}_2 - \cancel{t}_1 + t_3 - \cancel{t}_2 + \cdots + t_n - \cancel{t}_{n-1}) \\ &= 5(t_n - t_0) \\ &= 5, \end{aligned}$$

   che non dipende da $P$ e dunque per definizione di lunghezza di una curva $L(\varphi) = 5$;

3. poiché $\varphi'(t) = (3,4)$, grazie al teorema di rettificabilità 3.29 si ha

$$L(\varphi) = \int_0^1 \sqrt{3^2+4^2}dt = 5.$$

Quindi si è verificato che in questo caso la lunghezza della curva $\varphi$ coincide con la lunghezza del suo sostegno. Inoltre si è data una prova del vantaggio ottenuto utilizzando il teorema di rettificabilità in luogo della definizione per determinare la lunghezza di una curva.

[25] Denotate con $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ le componenti di $\varphi$, più esplicitamente abbiamo $L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}dt$.

*Esempio* 3.31. Si consideri la curva piana $\varphi : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\varphi(t) = (3\cos(t), 3\sin(t)).$$

Dall'esempio 3.6 si ricava che il sostegno di $\varphi$ è una circonferenza $C$ centrata in $(0,0)$ di raggio 3. Si osservi che

1. la lunghezza della circonferenza $C$ è $|C| = 6\pi$,
2. $\varphi'(t) = (-3\sin(t), 3\cos(t))$ e grazie al teorema di rettificabilità si ottiene

$$L(\varphi) = \int_{-2\pi}^{2\pi} \sqrt{9\sin(t)^2 + 9\sin(t)^2 dt} = \int_{-2\pi}^{2\pi} 3dt = 12\pi.$$

I due risultati non sono in contrasto, infatti, ragionando come nell'esempio 3.9, è possibile concludere che al variare di $t$ in $[-2\pi, 2\pi]$ il punto $\varphi(t)$ percorre due volte $C$.

Passiamo ora a considerare il baricentro di una curva, un concetto di chiara derivazione fisica.

**Definizione 3.32.** Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare di componenti $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}^2$. Il **baricentro** di $\varphi$ è il punto $(x_\varphi, y_\varphi) \in \mathbb{R}^2$ del piano definito da

$$\begin{cases} x_\varphi = & \frac{\int_a^b f(t)|\varphi'(t)|dt}{L(\varphi)} \\ y_\varphi = & \frac{\int_a^b g(t)|\varphi'(t)|dt}{L(\varphi)} \end{cases}$$

*Esempio* 3.33. Sia $\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\varphi(t) = (2 + \cos(t), -3 + \sin(t)).$$

Dall'esempio 3.6 si ricava che il sostegno di $\varphi$ è una circonferenza centrata nel punto $(2, -3) \in \mathbb{R}^2$, inoltre si ha

$$|\varphi'(t)| = |(-\sin(t), \cos(t))| = \sqrt{\sin(t)^2 + \cos(t)^2} = 1,$$

e $L(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(t)|dt = 2\pi$ per il teorema di rettificabilità.
Poiché

$$\int_{-\pi}^{\pi} (2 + \cos(t))|\varphi'(t)|dt = \int_{-\pi}^{\pi} (2 + \cos(t))dt = [2t + \sin(t)]_{-\pi}^{\pi} = 4\pi$$

e analogamente

$$\int_{-\pi}^{\pi} (-3 + \sin(t)|\varphi'(t)|dt = -6\pi,$$

finalmente si ottiene il baricentro di $\varphi$:

$$(x_\varphi, y_\varphi) = (\frac{4\pi}{2\pi}, \frac{-6\pi}{2\pi}) = (2, -3),$$

che coincide con il centro della circonferenza.

Il baricentro delle curve degli esempi 3.3 e 3.4 sono i punti medi dei rispettivi sostegni[26].

[26] Il lettore è invitato a verificarlo.

A conclusione del capitolo è illustrata qualche proprietà della **spirale logaritmica**. Tale curva $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ è definita da[27]

$$\varphi(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t)).$$

Poiché

$$|\varphi(t)| = \sqrt{e^{2t}\cos(t)^2 + e^{2t}\sin(t)^2} = e^t$$

è una funzione crescente, $\varphi$ è semplice e non chiusa. Inoltre si ha

$$\varphi'(t) = (e^t(\cos(t) - \sin(t)), e^t(\sin(t) + \cos(t)))$$

quindi

$$|\varphi'(t)| = \sqrt{e^{2t}(\cos(t)^2 - 2\sin(t)\cos(t) + \sin(t)^2 + \sin(t)^2 + 2\sin(t)\cos(t) + \cos(t)^2)} = \sqrt{2}e^t,$$

da cui si ricava facilmente che $\varphi$ è regolare. Grazie al teorema di rettificabilità 3.29 si ha

$$L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}(e^b - e^a),$$

pertanto il baricentro di $\varphi$ è[28]

$$\begin{aligned} (x_\varphi, y_\varphi) &= \left( \frac{\int_a^b e^{2t}\cos(t)dt}{e^b - e^a}, \frac{\int_a^b e^{2t}\sin(t)dt}{e^b - e^a} \right) \\ &= \left( \frac{\left[e^{2t}(\sin(t) + 2\cos(t))\right]_a^b}{5(e^b - e^a)}, \frac{\left[e^{2t}(2\sin(t) - \cos(t))\right]_a^b}{5(e^b - e^a)} \right). \end{aligned}$$

# 4 Funzioni di due variabili

## 4.1 Elementi di topologia del piano

In questa sezione richiamiamo i concetti basilari di topologia del piano utili a definire limiti e continuità per funzioni di due variabili.

Nel caso di funzioni di una sola variabile (reale), un ruolo fondamentale nelle definizioni di limiti e continuità è svolto dagli intervalli della retta. Per funzioni di due variabili un ruolo analogo è svolto dai dischi aperti.

**Definizione 4.1.** Dati un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e un numero reale positivo $r > 0$, l'insieme

$$D_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

è detto *disco aperto di centro* $(x_0, y_0)$ *e raggio* $r$.

**Definizione 4.2.** Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto del piano. Un insieme $I \subset \mathbb{R}^2$ si dice *intorno* di $(x_0, y_0)$ se esiste un disco aperto $d_r(x_0, y_0)$ centrato in $(x_0, y_0)$ tale che

$$D_r(x_0, y_0) \subset I.$$

[27] Il punto $\varphi(t)$ si trova sulla circonferenza $C_t$ centrata nell'origine di raggio $r = e^t$. Più precisamente, indicata con $s_t$ la retta uscente dall'origine che forma con il semiasse delle ascisse positive un angolo di ampiezza $t$ (misurata in radianti e in verso anti-orario), $\varphi$ è il punto di intersezione di $C_t$ con $s_t$. Pertanto, nelle coordinate $r$ e $t$, la curva $\varphi$ ha equazione

$$t = \log(r),$$

da cui l'aggettivo *logaritmica*.

[28] La seconda uguaglianza è ottenuta mediante la formula di integrazione per parti.

In altre parole, un intorno di un punto $(x_0, y_0)$ è un insieme che contiene, oltre al punto $(x_0, y_0)$ stesso, un disco aperto centrato in $(x_0, y_0)$.

*Esempio* 4.3. L'insieme

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1\}$$

è un intorno del punto $(0, 0)$, ma non è un intorno del punto $(1, 1)$ (che pure appartiene a $Q$).

*Esercizio* 4.4. Sia $Q$ il quadrato dell'esempio precedente. Determinare i punti per i quali $Q$ è in intorno e quelli per cui non lo è.

I punti per i quali un insieme $A$ è un intorno sono sono detti *interni*. Più precisamente diamo la seguente

**Definizione 4.5.** Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un sotto–insieme del piano. Un punto $(x_0, y_0) \in A$ è detto *interno* ad $A$ se esiste un disco aperto $D_r(x_0, y_0) \subset A$ centrato in $(x_0, y_0$ contenuto in $A$.

*Esempio* 4.6. Con riferimento all'esempio 4.3, $(0, 0) \in Q$ è interno, ma $(1, 1)$ non lo è.

**Definizione 4.7.** Un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice *aperto* se consiste solo di punti interni.

*Esempio* 4.8. L'insieme $Q$ dell'esempio 4.3 non è aperto (perché continente punti che non sono interni).

*Esercizio* 4.9. Provare che il disco aperto $D_1(0, 0)$ unitario centrato nell'origine è aperto. Più in generale, mostrare che ogni disco aperto del piano è aperto.

Per la definizione di limite in un punto sarà necessario poter valutare la funzione in punti arbitrariamente vicini al punto in questione. Pertanto introduciamo la seguente

**Definizione 4.10.** Un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è detto *di accumulazione* per un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ se ogni intorno di $(x_0, y_0)$ contiene almeno un punto di $A$ diverso da $(x_0, y_0)$.

Si noti che nella definizione precedente non è richiesto che il punto in questione appartenga all'insieme $A$.

*Esempio* 4.11. I punti interni di un insieme sono chiaramente di accumulazione. Quindi, preso $Q$ come nell'esempio 4.3, i punti $(0, 0)$ e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ sono di accumulazione. Inoltre, si noti che anche i punti $(1, 0)$ e $(1, 1)$ sono di accumulazione.

*Esercizio* 4.12. Mostrare che ogni punto di $Q$ è di accumulazione.

**Definizione 4.13.** Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un sotto–insieme del piano. Un punto $(x_0, y_0) \in A$ è detto *isolato* per $A$ se non è un punto di accumulazione di $A$.

*Esempio* 4.14. Il punto $(1, 0)$ è isolato per l'insieme $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x < 0\} \cap \{(1, 0)\}$.

**Definizione 4.15.** Un insieme $C \subset \mathbb{R}^2$ si dice *chiuso* se è il complementare[29] di un insieme aperto.

*Esempio* 4.16. L'insieme $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \geq 1\}$ è chiuso perché il complementare $\mathbb{R}^2 \setminus B = D_1(0, 0)$ è aperto.

Si osservi che **un insieme non è detto chiuso quando non è aperto**. Infatti esistono insiemi né aperti né chiusi ed insiemi contemporaneamente aperti e chiusi.

*Esempio* 4.17. L'insieme $S$ dell'esempio 4.14 non è aperto perché il punto $(1, 0)$ non è interno (infatti ogni disco $D_r(1, 0)$ non è contenuto in $S$). D'altra parte anche il complementare $\mathbb{R}^2 \setminus S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0\} \setminus (1, 0)$ non è aperto perché ogni punto $(0, y)$ non è interno. Quindi $S$ non è aperto né chiuso.

[29] Si ricordi che il complementare dell'insieme $C$ è per definizione l'insieme $\mathbb{R}^2 \setminus C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x, y) \notin C\}$ consistente dei punti del piano che non appartengono a $C$.

## 4.2 Limiti e continuità di funzioni di due variabili

Benché il calcolo di limiti di funzioni di due variabili non rientra tra gli obiettivi principali del corso, la nozione di limite e di continuità è necessaria per lo sviluppo della teoria.

**Definizione 4.18.** Siano $A \subset \mathbb{R}^2$ un sotto–insieme del piano, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un suo punto di accumulazione ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che $f$ *tende a* $L \in \mathbb{R}$ *per* $(x, y) \to (x_0, y_0)$ se per ogni intorno $J$ di $L$ esiste un intorno $I$ di $(x_0, y_0)$ tale che per ogni $(x, y) \in I \cap A$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, si ha $f(x, y) \in J$. In tal caso si scrive

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

Alcuni chiarimenti sono necessari. Per prima cosa è utile ricordare che un intorno di un numero reale $L$ è un sotto–insieme di $L$ che contiene un intervallo aperto che contiene $L$, quindi è possibile supporre che $J$ stesso sia un intervallo aperto contenente $L$. Inoltre la definizione vale anche se $L = +\infty$ o $L = -\infty$, in tal caso $J$ deve essere un intervallo del tipo $(a, +\infty)$ o $(-\infty, b)$ rispettivamente.

Inoltre si noti che, *mutatis mutandis*, la definizione non differisce molto da quella per le funzioni di una sola variabile, tuttavia il calcolo dei limiti è, in generale, più complicato nel caso delle funzioni di due variabili. Ciò è dovuto al fatto che in $\mathbb{R}$ è possibile avvicinarsi a un punto $x_0$ solo lungo una retta; nel piano, invece, è possibile avvicinarsi ad un punto $(x_0, y_0)$ lungo infinite curve (rette, parabole, spirali, etc.), e la definizione di limite richiede proprio che il valore $f(x, y)$ si avvicini a $L$ indipendentemente dal modo in cui $(x, y)$ si avvicina a $(x_0, y_0)$.

*Esempio* 4.19. Sia $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ il piano privato dell'origine. Evidentemente il punto $(0, 0)$ è di accumulazione per $A$. Si consideri la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Per stabilire se esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ si osservi che la restrizione di $f$ all'asse delle ascisse (cioè la retta di equazione $y = 0$) è $f(x, 0) = 0$, quindi se $(x, y)$ tende a $(0, 0)$ lungo tale retta allora $f(x, 0)$ tende a zero. D'altra parte, se restringiamo la funzione $f$ alla bisettrice del primo e terzo quadrante (retta di equazione $y = x$), abbiamo $f(x, x) = \frac{2^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$, dunque muovendosi verso $(0, 0)$ lungo la bisettrice $f(x, x)$ tende a $\frac{1}{2}$. Poiché $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ non può essere contemporaneamente 0 e $\frac{1}{2}$, è possibile concludere concludere che non esiste.

*Osservazione* 4.20. Il ragionamento fatto nell'esempio precedente può essere generalizzato. Infatti se le restrizioni di $f$ a due curve tendono a due limiti diversi quando $(x, y)$ tende a $(x_0, y_0)$, allora $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ non esiste

Per contro, l'uso di restrizioni è inutile per provare l'esistenza del limite perché sarebbe necessario calcolare il limite di $f(x, y)$ quando $(x, y)$ tende a $(x_0, y_0)$ lungo *ogni* curva passante per $(x_0, y_0)$. In particolare limitarsi a considerare le rette passanti per $(x_0, y_0)$ non è sufficiente come mostra il seguente

*Esempio* 4.21. Sia $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ il piano privato dell'origine. Evidentemente il punto $(0, 0)$ è di accumulazione per $A$. Si consideri la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Ogni retta del piano passante per l'origine può essere scritta in equazioni parametriche

$$x = at, \quad y = bt$$

per opportuni $a, b \in R$ non entrambi nulli. Dunque la restrizione di $f$ ad una siffatta retta è

$$f(at, bt) = \frac{a^2 b t^3}{a^4 t^4 + b^2 t^2} = \frac{a^2 b t}{a^4 t^2 + b^2}$$

e in ogni caso si ha $lim_{t\to 0}f(at,bt)=0$, cioè quando $(x,y)$ si tende all'origine lungo una retta $F(x,y)$ tende a zero. D'altra parte, la restrizione di $f$ alla parabola di equazione $y=x^2$ è

$$f(x,x^2)=\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2},$$

dunque se $(x,y)$ tende all'origine lungo detta parabola, $f(x,x^2)$ tende a $\frac{1}{2}$. Pertanto $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste.

Infine è dato un esempio in cui il limite esiste.

*Esempio* 4.22. Sia $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ il piano privato dell'origine. Evidentemente il punto $(0,0)$ è di accumulazione per $A$. Si consideri la funzione $f:A\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}.$$

Per mostrare che esiste il limite di $f(x,y)$ quando $(x,y)$ tende all'origine (e calcolarlo) si osservi che per ogni punto $(x,y)\in A$ si ha

$$|f(x,y)|=\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=|y|\,\frac{x^2}{x^2+y^2}<|y|$$

e dunque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

Passiamo ora a considerare la continuità di funzioni di due variabili

**Definizione 4.23.** Siano $A\subset\mathbb{R}^2$ un sotto–insieme del piano, $(x_0,y_0)\in A$ ed $f:A\to\mathbb{R}$ una funzione. La funzione $f$ si dice *continua* nel punto $(x_0,y_0)$ se per ogni intorno $J$ di $f(x_0,y_0)$ esiste un intorno $I$ si $(x_0,y_0)$ tale che $f(x,y)\in J$ per ogni $(x,y)\in A\cap I$.

Una funzione è detta continua in $A$ se è continua in ogni punto di $A$.

*Osservazione* 4.24. Confrontando la definizione di limite è facile dedurre che se $(x_0,y_0)$ è un punto di accumulazione per $A$, allora la continuità della funzione $f$ nel punto $(x_0,y_0)$ è equivalente a

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

*Esercizio* 4.25. Nella situazione della definizione 4.23, si supponga che $(x_0,y_0)$ sia un punto isolato di $A$. Mostrare che $f$ è senz'altro continua in $(x_0,y_0)$.

*Osservazione* 4.26. Somme, prodotti e composizioni di funzioni continue sono funzioni continue grazie a teoremi che qui si tralasciano per brevità.

*Esempio* 4.27. I polinomi in due variabili (es. $x+y$, $x^2, 3y$, $x^2y-3xy^3$) definiscono funzioni continue nel piano. Le funzioni definite da $\cos(x^2+xy), \tan(xy+3x)$, $e^{2x^3-3y}$ sono continue.

*Esercizio* 4.28. Stabilire il massimo insieme in cui è continua la funzione definita da

1. $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,
2. $f(x,y)=\frac{\log(x-y)}{x^2+y^2+1}$
3. $f(x,y)=\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\log(x^2+y^2)}$.

*Esercizio* 4.29. Stabilire se la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

è continua in $(0,0)$. (Suggerimento: poichè l'origine è un punto di accumulazione di $\mathbb{R}^2$, grazie all'osservazione 4.24 $f$ è continua se e solo se esiste il limite ...).

*Esempio* 4.30. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \le 0 \text{ oppure } y \ge x^2 \\ 1 & \text{se } 0 < y < x^2 \end{cases}$$

è discontinua nei punti dell'asse delle ascisse e nei punti della parabola di equazione $y = x^2$. In particolare la restrizione di $f$ alla retta $x = 0$ è $f(0, y) = 0$ (infatti ogni $y$ è negativo oppure maggiore o uguale a zero), mentre la restrizione alla parabola di equazione $y = \frac{x^2}{2}$ è $f(x, \frac{x^2}{2}) = 1$ (poiché le disuguaglianze $0 < \frac{x^2}{2} < x^2$ sono verificate per ogni valore di $x$).

## 4.3 Derivata direzionale

Uno strumento fondamentale per lo studio dell'andamento di una funzione è la derivata. Nel caso di funzioni di due variabili, oltre al punto in cui valutare la variazione della funzione è necessario specificare anche una direzione.

**Definizione 4.31.** Siano $A \subset \mathbb{R}^2$ un sotto–insieme aperto del piano e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su $A$. Siano inoltre $(x_0, y_0) \in A$ un punto e $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$ un vettore non nullo. Se esiste finito, il limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y) - f(x_0, y_0)}{t}$$

è detto *derivata direzionale di $f$ nel punto $(x_0, y_0)$ e nella direzione $\vec{v}$*, e si indica $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$. In tal caso, $f$ si dice *derivabile in $(x_0, y_0)$ nella direzione $\vec{v}$.*

Nella situazione della definizione precedente, sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un numero reale non nullo e $\vec{w} = \lambda\vec{v}$. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(x_0, y_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\lambda v_x, y_0 + t\lambda v_y) - f(x_0, y_0)}{t} \\ &= \lambda \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\lambda v_x, y_0 + t\lambda v_y) - f(x_0, y_0)}{\lambda t} \\ &= \lambda \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + sv_x, y_0 + sv_y) - f(x_0, y_0)}{s} \\ &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0), \end{aligned}$$

dunque la derivabilità (ma non il valore della derivata) di $f$ in un punto nella direzione $\vec{v}$ è indipendente dal modulo e dal verso di $\vec{v}$.

*Osservazione* 4.32. La definizione di derivata direzionale è essenzialmente unidimensionale, infatti se $(x, y) = (x_0 + tv_x, y_0 + tv_y)$ sono le equazioni parametriche della retta passante per $(x_0, y_0)$ e diretta come il vettore $\vec{v}$ e introdotta la funzione $g$ definita da

$$g(t) = f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y),$$

allora si ha $g'(0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$. Pertanto l'esistenza della derivata in una direzione non dà alcuna informazione circa la derivabilità nelle altre direzioni.

*Esempio* 4.33. Sfruttando l'osservazione precedente calcoliamo la derivata della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^2 + y^2$ nel punto $(x_0, y_0)$ e nella direzione $\vec{v} = (v_x, v_y)$. Si ha

$$g(t) = f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y) = (x_0 + tv_x)^2 + (y_0 + tv_y)^2,$$

e dunque

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = g'(0) = 2x_0v_x + 2y_0v_y = 2(x_0, y_0) \cdot \vec{v}.$$

Se $\vec{v} = (1,0)$ la derivata direzionale nella direzione $\vec{v}$ è detta *derivata parziale rispetto a* $x$. Analogamente, se $\vec{v} = (0,1)$ la derivata direzionale rispetto a $\vec{v}$ è detta *derivata direzionale rispetto a* $y$. Le derivate parziali rispetto a $x$ e $y$ della funzione $f$ nel punto $(x_0, y_0)$ si denotano rispettivamente con i simboli

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

*Osservazione* 4.34. Grazie all'osservazione 4.32, il calcolo delle derivate parziali si può effettuare tramite le note regole di derivazione considerando costante la variabile per la quale *non* si sta derivando.

*Esempio* 4.35. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = x^2 + y^2$, allora si hanno

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y,$$

in accordo con l'esempio 4.33 ove si sostituisca $\vec{v} = (1,0)$ e $\vec{v} = (0,1)$ rispettivamente.

*Esempio* 4.36. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = \log(x^2 + y^2 + 1)$, allora si hanno

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}.$$

*Esempio* 4.37. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = e^{x^3 + xy - 1}$, allora si hanno

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (3x^2 + y)e^{x^3 + xy - 1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{x^3 + xy - 1}.$$

*Esempio* 4.38. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

grazie all'esercizio 4.29 il lettore dovrebbe sapere che $f$ non è continua nel punto $(0,0)$. Tuttavia, dalla definizione di derivata parziale abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$

e analogamente $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Inoltre dato un vettore non nullo $\vec{v} = (v_x, v_y)$, non è difficile mostrare che vale la formula

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{v_x v_y}{v_x^2 + v_y^2}.$$

L'esempio precedente mostra che una funzione può essere derivabile in ogni direzione senza essere continua in un dato punto. Ciò segna una importante differenza con la teoria delle funzioni di una sola variabile, dove ogni funzione derivabile in un punto è ivi continua.

## 4.4 Derivate di ordine superiore

Sia $f$ una funzione che ammette derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ in ogni punto del suo dominio. Poiché le derivate sono a loro volta funzioni di due variabili è possibile porsi il problema di derivarle. Se esse sono derivabili restano definite quattro funzioni dette derivate parziali seconde, che eventualmente derivate danno luogo a otto derivate parziali terze e così via.

Se $\frac{\partial f}{\partial x}$ è derivabile (in ogni punto) rispetto a $x$ e $y$, le sue derivate parziali (che sono derivate parziali seconde di $f$) si indicano con

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

analogamente le derivate parziali di $\frac{\partial f}{\partial y}$ si denotano con

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Le derivate seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ si dicono *derivate seconde miste.*

*Esempio* 4.39. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = x^3 e^{x-y}$. Si hanno

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2(x+3)e^{x-y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x^3 e^{x-y},$$

quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= x(x^2+6x+6)e^{x-y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= -x^2(x+3)e^{x-y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= -x^2(x+3)e^{x-y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= x^3 e^{x-y}. \end{aligned}$$

Nell'esempio precedente le derivate seconde miste sono uguali. Tuttavia può capitare che le derivate seconde differiscano in qualche punto. Illustriamo tale fenomeno con il seguente

*Esempio* 4.40. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

In questo caso si hanno

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ -1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

Da cui $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

*Esercizio* 4.41. Mostrare che le derivate seconde miste della funzione considerata nell'esempio precedente sono discontinue nel punto $(0,0)$.

La continuità delle derivate seconde miste è sufficiente a garantire che esse siano uguali, vale infatti il seguente

**Teorema 4.42** (di Schwarz)**.** *Se una funzione $f$ ha entrambe le derivate seconde miste $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ in un intorno di un punto $(x_0, y_0)$ ed esse sono continue in $(x_0, y_0)$ allora*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

## 4.5 Differenziabilità

Abbiamo già osservato che un funzione definita in un sottoinsieme del piano può essere derivabile in ogni direzione senza essere continua in un punto. Per *ovviare* a questo inconveniente introduciamo una nozione più forte della derivabilità che garantisce la continuità della funzione.

**Definizione 4.43.** Siano $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ del piano e $(x_0, y_0 \in A$ un punto. La funzione $f$ è detta differenziabile in $(x_0, y_0)$ se esiste un vettore $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$\lim_{(x.y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \lambda_1(x-x_0) - \lambda_2(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0. \tag{33}$$

Per interpretare geometricamente la definizione precedente si osservi che l'equazione

$$z = f(x_0, y_0) + \lambda_1(x - x_0) + \lambda_2(y - y_0) \tag{34}$$

è quella di un piano passante per il punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e perpendicolare alla direzione del vettore $(\lambda_1, \lambda_2, -1)$. Inoltre la quantità $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ non è altro che la distanza tra i punti $(x, y)$ e $(x_0, y_0)$. Dunque $f$ è differenziabile in $(x_0, y_0)$ se tra tutti i piani (non verticali), individuati dal vettore $\vec{\lambda}$ che passano per il punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ne esiste uno che approssima meglio il grafico $z = f(x, y)$ della funzione $f$ intorno al punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Tale piano è detto *tangente*. Pertanto $f$ è differenziabile in un punto se il grafico di $f$ ammette piano tangente nel corrispondente punto sul grafico, la cui è equazione cartesiana è (34).

**Definizione 4.44.** Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ del piano. Il *gradiente* di $f$ nel punto $(x, y) \in A$ è il vettore definito da

$$\nabla f(x,y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right).$$

Se $f$ è differenziabile in un punto $(x_0, y_0)$, allora il vettore $\vec{\lambda}$ che compare nella definizione 4.43 è il gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$, vale infatti il seguente

**Teorema 4.45.** *Siano $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ del piano e $(x_0, y_0) \in A$ un punto. Se $f$ è differenziabile in $(x_0, y_0)$, allora*

1. *$f$ è continua in $(x_0, y_0)$,*
2. *$f$ è derivabile in $(x_0, y_0)$ lungo ogni direzione $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$ e vale la formula*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)v_y,$$

3. *Il limite* (33) *che compare nella definizione 4.43 è verificato con $\vec{\lambda} = \nabla f(x_0, y_0)$.*

Grazie al punto 2 del teorema precedente si ricava che la funzione $f$ ha la massima crescita nella direzione (e nel verso) del gradiente, quando questo non è nullo. Ciò suggerisce che il gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ deve essere perpendicolare alla curva di livello passante per $(x_0, y_0)$, cioè il luogo dei punti del piano dove $f$ è costante uguale a $f(x_0, y_0)$.

**Definizione 4.46.** Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$. Per ogni numero reale $c \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x,y) = c\}$$

è detto *curva di livello* $c$ della funzione $f$, e si denota con $\{f = c\}$.

*Esempio* 4.47. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = x^2 + y^2$. Per ogni numero reale $c \in \mathbb{R}$ si consideri la curva di livello $\{f = c\}$. Se $c > 0$ allora $\{f = c\}$ è una circonferenza centrata nell'origine di raggio $\sqrt{c}$. Inoltre $\{f = 0\}$ è costituita da un solo punto: l'origine $(0, 0)$. Infine se $c < 0$, allora $\{f = c\}$ è l'insieme vuoto.

*Esercizio* 4.48. Determinare le curve di livello delle funzioni definite da $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$, $f(x, y) = x^2 - y^2$, $f(x, y) = \log(x + y + 1)$.

**Teorema 4.49.** *Siano $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ del piano e $(x_0, y_0) \in A$ un punto in cui $f$ è differenziabile. Se $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ allora è perpendicolare alla curva di livello $\{f = f(x_0, y_0)\}$ passante per $(x_0, y_0)$.*

Dal teorema precedente è possibile ricavare le equazioni cartesiane delle rette tangente e normale ad una curva di livello in funzione delle derivate parziali della funzione. In particolare si osservi che è possibile determinare l'equazione di tali rette senza fare ricorso ad una parametrizzazione esplicita della curva di livello.

**Corollario 4.50.** *Siano $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ del piano e $(x_0, y_0) \in A$ un punto in cui $f$ è differenziabile e $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. La retta tangente alla curva di livello $\{f = f(x_0, y_0)\}$ nel punto $(x_0, y_0)$ ha equazione cartesiana*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

*La retta normale alla curva di livello $\{f = f(x_0, y_0)\}$ nel punto $(x_0, y_0)$ ha equazione cartesiana*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(y - y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(x - x_0) = 0.$$

*Esempio* 4.51. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = x^2 + y^2$ e si supponga di dover determinare l'equazione della retta normale alla curva di livello passante per il punto $(1, 1)$.

Poiché $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$, grazie al corollario 4.50 e qualche banale semplificazione l'equazione cercata è

$$y - x = 0. \tag{35}$$

D'altra parte la particolare semplicità della funzione considerata ci permette di giungere allo stesso risultato senza fare ricorso al corollario 4.50. Poiché $f(1, 1) = 2$, la curva di livello passante per $(1, 1)$ è $\{f = 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 2\}$, cioè una circonferenza centrata in $(0, 0)$ di raggio $\sqrt{2}$. Poichè il raggio passante per $(1, 1)$ giace sulla bisettrice del primo e terzo quadrante, quest'ultima è la retta normale alla curva di livello nel punto $(1, 1)$ e la sua equazione è la (35).

Abbiamo già osservato che il grafico di una funzione di due variabili ammette piano tangente in corrispondenza di un punto dove la funzione è differenziabile. E' possibile ottenere l'equazione cartesiana di tale piano combinando il teorema 4.45 con l'equazione (34) e le osservazioni successive.

**Corollario 4.52.** *Siano $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ del piano e $(x_0, y_0) \in A$ un punto. Se $f$ è differenziabile in $(x_0, y_0)$, allora l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di $f$ nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è data da*

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

*o equivalentemente*

$$(x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right).$$

La verifica della differenziabilità di una data funzione per mezzo della definizione 4.43 può essere complicata. Il seguente risultato è fondamentale per concludere che una funzione è differenziabile

**Teorema 4.53** (del differenziale totale)**.** *Siano $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ del piano e $(x_0, y_0) \in A$ un punto. Se le derivate parziali prime di $f$ esistono e sono continue in un intorno di $(x_0, y_0)$ allora $f$ è differenziabile in $(x_0, y_0)$.*

Il teorema precedente può essere parafrasato affermando che una funzione è differenziabile in un punto se intorno a quel punto il gradiente è continuo.

*Esempio* 4.54. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = x^2 \sin(y)$. Si supponga di voler determinare, se esiste, l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di $f$ nel punto $(1, \frac{\pi}{6}, f(1, \frac{\pi}{6}))$ e nel punto $(0, 0)$.

Innanzi tutto si osservi che

$$\nabla f(x, y) = \left(2x \sin(y), x^2 \cos(y)\right),$$

dunque le derivate parziali prime di $f$ sono continue su tutto il piano e per il teorema del differenziale totale $f$ è differenziabile in ogni punto del piano. Pertanto, grazie al corollario 4.52, l'equazione del piano tangente al grafico di $f$ nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)$ è

$$z = x_0^2 \sin(y_0) + 2x_0 \sin(y_0)(x - x_0) + x_0^2 \cos(y_0)(y - y_0).$$

In particolare nei punti $(1, \frac{\pi}{6})$ e $(0, 0)$ si ha rispettivamente $z = x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\pi\sqrt{3}+6}{12}$ e $z = 0$.

## 4.6 Estremi liberi

**Definizione 4.55.** Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^2$ del piano. Un punto $(x_0, y_0) \in A$ è detto *di massimo* (risp. *di minimo*) *relativo* per $f$ se esiste un intorno $I$ di $x_0$ tale che

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad (\text{risp. } f(x, y) \geq f(x_0, y_0))$$

per ogni $(x, y) \in I \cap A$. Inoltre $(x_0, y_0)$ è detto punto di massimo (risp. di minimo) *assoluto* se la richiesta precedente è verificata con $I = A$. Il valore che la funzione $f$ assume in un punto di massimo (risp. minimo) è detto *massimo* (risp. *minimo*).

Pertanto i punti di massimo (o di minimo) sono elementi del dominio della funzione $f$, cioè punti del piano. D'altra parte i massimi (o i minimi) sono valori assunti dalla funzione, e dunque numeri reali.

*Esempio* 4.56. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to R$ definita da $f(x, y) = x^2(x^2-2)e^{-y^2}$. L'origine $(0, 0)$ è un punto di massimo relativo per $f$, infatti $f(0, 0) = 0$ e

$$f(x, y) = -x^2(2 - x^2)e^{-y^2} = -x^2(2 - x^2 - y^2)e^{-y^2} - x^2y^2e^{-y^2},$$

dunque $f(x, y) \leq f(0, 0)$ per ogni $(x, y) \in D_{\sqrt{2}}(0, 0)$. D'altra parte, l'origine non è un punto di massimo assoluto per $f$ perché ci sono punti del piano in cui $f$ assume valori positivi (cioè maggiori di $f(0, 0)$), come ad esempio $f(2, 0) = 8$. Dunque zero è un massimo relativo, ma non assoluto, di $f$. Inoltre $(1, 0)$ è un punto di minimo relativo per $f$, infatti

$$f(x, y) - f(1, 0) = x^2(x^2 - 2)e^{-y^2} + 1 = \left(x^2(x^2 - 2) + e^{y^2}\right) e^{-y^2} \geq 0$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ poiché $e^{-y^2} \geq 1$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ e $x^2(x^2 - 2) \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Pertanto $(1, 0)$ è un punto di minimo assoluto per $f$ e $f(1, 0) = -1$ è un minimo assoluto.

**Definizione 4.57.** I punti di massimo o di minimo sono detti *estremali.* Il valore assunto da una funzione in un punto estremale è detto *estremo.* Gli eventuali punti estremali interni al dominio $A$ di una funzione $f$ sono detti *liberi.*

Gli eventuali punti estremali liberi di una funzione differenziabile sono da ricercare tra i punti in cui si annulla il gradiente. Vale infatti il seguente

**Teorema 4.58.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ del piano. Se il punto $(x_0, y_0)$ è estremale per $f$ ed $f$ è differenziabile in $(x_0, y_0)$ allora*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = 0$$

*per ogni direzione $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. In particolare $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.*

*Dimostrazione.* Fissato $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$ non nullo, si consideri la funzione $g$ definita $g(t) = f(x_0+tv_x, y_0+tv_y)$ in un intorno di $0 \in \mathbb{R}$. Poiché $(x_0, y_0)$ è un punto estremale di $f$, la funzione $g$ ha un massimo o un minimo in $t = 0$; quindi, per il teorema di Fermat, $g'(0) = 0$. D'altra parte si ha (cfr. osservazione 4.32)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = g'(0)$$

e ciò conclude la dimostrazione. □

*Esempio* 4.59. La funzione $f$ definita nell'esempio 4.56 è differenziabile e si ha

$$\nabla f(x, y) = \Big((4x(x^2 - 1)e^{-y^2}, -2x^2y(x^2 - 2)e^{-y^2}\Big).$$

In particolare nei punti $(0, 0)$ e $(1, 0)$ che si è già osservato essere estremali si ha $\nabla f(0, 0) = \nabla f(1, 0) = (0, 0)$, in accordo con il teorema 4.58.

**Definizione 4.60.** Siano $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ del piano e $(x_0, y_0) \in A$ un punto in cui $f$ è differenziabile. Se $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, il punto $(x_0, y_0)$ è detto *stazionario.*

*Esempio* 4.61. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to R$ la funzione definita da $f(x, y) = x^2 + y^2$. Poichè $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$, $f$ è differenziabile in tutto il piano. I punti stazionari sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases},$$

dunque l'origine $(0, 0)$ è l'unico punto stazionario ed è evidentemente un punto di minimo assoluto.

*Esempio* 4.62. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to R$ la funzione definita da $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$. Poichè $\nabla f(x, y) = (-2x, -2y)$, $f$ è differenziabile in tutto il piano. I punti stazionari sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} -2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases},$$

dunque l'origine $(0, 0)$ è l'unico punto stazionario ed è evidentemente un punto di massimo assoluto.

Il teorema 4.58 afferma in particolare che i punti estremali di una funzione differenziabile sono stazionari. D'altra parte non tutti i punti stazionari sono estremali come illustrato dal seguente

*Esempio* 4.63. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to R$ la funzione definita da $f(x,y) = x^2 - y^2$. Poichè $\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$, $f$ è differenziabile in tutto il piano. I punti stazionari sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases},$$

dunque l'origine $(0,0)$ è l'unico punto stazionario. Si osservi però che non si tratta di un punto estremale perché $f(0,0) = 0$ ed ogni intorno dell'origine contiene punti in cui $f$ è positiva e punti in cui è negativa (in particolare la restrizione di $f$ all'asse $x$ è non negativa, mentre la restrizione all'asse $y$ è non positiva).

**Definizione 4.64.** Un punto stazionario non estremale che è di massimo se ristretto ad una retta e di minimo se ristretto ad un'altra retta è detto *punto di sella.*

L'origine degli assi coordinati è un punto di sella per la funzione dell'esempio 4.63. Il termine "punto di sella" è dovuto al fatto che il grafico della funzione $f$ dell'esempio 4.63 intorno al punto $(0,0,0)$ assomiglia ad una sella di cavallo.

*Osservazione* 4.65. Non tutti i punti stazionari non estremali sono di sella. Ad esempio $(0,0)$ per la funzione:

$$f(x,y) \;=\; x^3 + y^2$$

è stazionario, ma non estremale nè di sella. Dimostralo per esercizio.

*Esercizio* 4.66. Mostrare che l'origine $(0,0)$ è un punto di sella per la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = xy$.

Com'è noto, la natura dei punti stazionari per una funzione di una variabile spesso può essere determinata considerando il segno della derivata seconda. In particolare se $g$ è una funzione derivabile di una variabile e $g'(x_0) = 0$ in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, allora

- se $g''(x_0) > 0$, $x_0$ è un punto di minimo (esempio: $g(t) = t^2$, quindi $g'(0) = 0$ e $g''(0) = 2 > 0$);
- se $g''(x_0) < 0$, $x_0$ è un punto di massimo (esempio: $g(t) = -t^2$, quindi $g'(0) = 0$ e $g''(0) = -2 > 0$);
- se $g''(x_0) = 0$, non è possibile concludere nulla sulla natura di $x_0$ ed è necessario ricorrere alle derivate di ordine superiore (esempi: le funzioni $g_1(t) = t^4$, $g_2(t) = -t^4$ e $g_3(t) = t^3$ hanno in $t = 0$ rispettivamente un minimo assoluto, un massimo assoluto e un punto di flesso con tangente orizzontale in $t = 0$; inoltre, tutte e tre le funzioni soddisfano evidentemente le condizioni $g'(0) = g''(0) = 0$).

Per le funzioni di due variabili esiste uno strumento simile detto *test del determinante hessiano.* Premettiamo all'enunciato la seguente

**Definizione 4.67.** Siano $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un aperto $A \subset R^2$ del piano e $(x_0, y_0) \in A$ un punto. Se esistono tutte le derivate seconde di $f$ in $(x_0, y_0)$, la matrice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

è detta *matrice hessiana* di $f$ in $(x_0, y_0)$ e si denota con

$$\mathrm{H}f(x_0,y_0)$$

*Esempio* 4.68. Sia $f$ la funzione definita nell'esempio 4.39. Per ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ del piano si ha

$$\mathrm{H}f(x, y) = \begin{pmatrix} x(x^2 + 6x + 6)e^{x-y} & -x^2(x + 3)e^{x-y} \\ -x^2(x + 3)e^{x-y} & x^3e^{x-y} \end{pmatrix}.$$

*Osservazione* 4.69. Nella situazione della definizione precedente, se le derivate seconde miste di $f$ sono continue in $(x_0, y_0)$, allora la matrice hessiana $\mathrm{H}f(x_0, y_0)$ di $f$ in $(x_0, y_0)$ è simmetrica[30] per il teorema di Schwarz (cfr. 4.42).

**Teorema 4.70.** *Siano $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ del piano e $(x_0, y_0) \in A$ un punto stazionario per $f$. Si supponga che le derivate parziali seconde di $f$ esistano e siano continue in un intorno di $(x_0, y_0)$. Allora*

1. *se* $\det \mathrm{H}f(x_0, y_0) > 0$ *e* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ *allora* $(x_0, y_0)$ *è un punto di minimo relativo;*
2. *se* $\det \mathrm{H}f(x_0, y_0) > 0$ *e* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ *allora* $(x_0, y_0)$ *è un punto di massimo relativo;*
3. *se* $\det \mathrm{H}f(x_0, y_0) < 0$ *allora* $(x_0, y_0)$ *è un punto di sella;*

*Dimostrazione.* Fissato un vettore non nullo $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$ si consideri la funzione $g$ definita in qualche intorno di $0 \in \mathbb{R}$ da $g(t) = f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y)$. Per l'osservazione 4.32 e il teorema 4.45 si hanno $g'(t) = \nabla f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y) \cdot \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y)v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y)v_y$ e

$$\begin{aligned} g''(0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)v_x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)v_x v_y + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)v_x v_y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)v_y^2 \\ &= (v_x, v_y) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \\ &= \vec{v} \cdot \mathrm{H}f(x_0, y_0) \cdot \vec{v}^{\,t} \end{aligned}$$

Poiché $g'(0) = 0$, se $\vec{v} \cdot \mathrm{H}f(x_0, y_0) \cdot \vec{v}^{\,t} > 0$ la funzione $g$ ha un punto di minimo in $t = 0$. Se ciò si verifica per ogni direzione $\vec{v}$, allora $(x_0, y_0)$ è un punto di minimo per $f$ e in particolare si ha $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$. Ma la condizione

$$\vec{v} \cdot \mathrm{H}f(x_0, y_0) \cdot \vec{v}^{\,t} > 0 \qquad \text{per ogni} \vec{v} \in \mathbb{R}^2, \vec{v} \neq 0$$

equivale al fatto che la forma quadratica indotta da $\mathrm{H}f(x_0, y_0)$ sia definita positiva, quindi $\det \mathrm{H}f(x_0, y_0) > 0$. Ciò prova il primo caso e un ragionamento del tutto simile il secondo.

Se $\det \mathrm{H}f(x_0, y_0) < 0$, allora per la teoria delle forme quadratiche esistono due direzioni $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tali che le restrizioni $g_v(t) = f(x_0 + tu_x, y_0 + tu_y)$ e $g_v(t) = f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y)$ hanno rispettivamente un massimo e un minimo in $t = 0$ e dunque $(x_0, y_0)$ è un punto di sella per $f$. □

*Esercizio* 4.71. Si utilizzi il test del determinante hessiano per determinare la natura dei punti stazionari delle funzioni definite negli esempi 4.61, 4.62 e 4.63.

Si noti che **nel caso** $\det \mathrm{H}f(x_0, y_0) = 0$ **il test del determinante hessiano è inefficace**. Illustriamo tale fenomeno con i seguenti

[30] Si ricordi che una matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ è detta simmetrica se $a_{12} = a_{21}$.

*Esempio* 4.72. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = x^2y^2 + x^2$. Innanzi tutto si osservi che $(0, 0)$ è un punto di minimo assoluto per $f$ poiché evidentemente $f(x, y) \geq 0$. Poiché il gradiente di $f$ è
$$\nabla f(x, y) = \left(2xy^2 + 2x, 2x^2y\right),$$
$f$ è differenziabile in tutto il piano per il teorema del differenziale totale. I punti stazionari di $f$ sono le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} 2xy^2 + 2x = 0 \\ 2x^2y = 0 \end{cases},$$
pertanto $(0, 0)$ è il solo punto stazionario. In questo caso
$$\mathrm{H}f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y^2 + 2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}$$
e quindi $\det \mathrm{H}f(0, 0) = 0$.

*Esempio* 4.73. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Innanzi tutto si osservi che $(0, 0)$ non è un punto estremale di $f$ perché la restrizione $f(t, 0) = t^3$ di $f$ all'asse delle ascisse non ha un massimo né un minimo in $t = 0$. D'altra parte, osservato che $\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y^2, -6xy)$ e che $f$ è differenziabile per il teorema del differenziale totale, si ha
$$\mathrm{H}f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}$$
e quindi $\det \mathrm{H}f(0, 0) = 0$.

# 5 Integrali di funzioni di due variabili

Analogamente agli integrali di funzioni di una variabile, utili per il calcolo delle aree di regioni piane, la principale motivazione per lo studio degli integrali di funzioni di due variabili è il calcolo dei volumi di regioni solide. Nel seguito sarà illustrata la cosiddetta teoria di Riemann, che si discosta dalla teoria dell'integrale per funzioni di una variabile solo nella maggiore varietà di domini di integrazione.

## 5.1 Funzioni a scala e loro integrali su rettangoli

Per prima cosa si ricordi che una *partizione* $S$ di un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ è un insieme finito e ordinato di punti
$$S = \{x_0, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$$
tale che $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

**Definizione 5.1.** Sia
$$Q = [a, b] \times [b, c] = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\right\}$$
il rettangolo prodotto cartesiano degli intervalli $[a, b]$ e $[c, d]$ e siano $S_1 = \{x_0, \ldots, x_n\}$ e $S_2 = \{y_0, \ldots, y_m\}$ partizioni rispettivamente di $[a, b]$ e $[c, d]$. Il prodotto cartesiano
$$S_1 \times S_2 \subset Q$$
è detto partizione di $Q$.

Si osservi che la partizione $S$ appena definita è un insieme di punti di $Q$. Precisamente è formata dagli $(n+1)(m+1)$ punti del piano che si ottengono prendendo come ascisse gli elementi di $S_1$ e come ordinate quelli di $S_2$. Inoltre, come la partizione $S_1$ suddivide l'intervallo $[a,b]$ in $n$ sotto-intervalli, così la partizione $S$ divide $Q$ in $mn$ sotto-rettangoli aperti[31] definiti da

$$Q_{ij} = ]x_{i-1}, x_i[\times]y_{j-1}, y_j[, \qquad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

*Esempio* 5.2. Sia $Q = [0,3] \times [-1,2]$ e siano $S_1 = \{0,1,3\}$, $S_2 = \{-1,0,2\}$ partizioni rispettivamente degli intervalli $[0,3]$ e $[-1,2]$. Allora la partizione $S = S_1 \times S_2$ suddivide $Q$ nei quattro sotto-rettangoli aperti

$$]0,1[\times]-1,0[, \quad ]0,1[\times]0,2[, \quad ]1,3[\times]-1,0[, \quad ]1,3[\times]0,2[.$$

Le partizioni di rettangoli appena introdotte sono utili a definire classi di funzioni particolarmente semplici

**Definizione 5.3.** Una funzione $f : Q \to \mathbb{R}$ è detta *a scala* se esiste una partizione di $S$ del rettangolo $Q$ tale che $f$ è costante su ogni sotto-rettangolo aperto. In altre $f$ è a scala se esistono delle costanti $c_{ij} \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(x,y) = c_{ij} \qquad \text{per ogni } (x,y) \in ]x_{i-1}, x_i[\times]y_{j-1}, y_j[,$$

per ogni $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

*Esempio* 5.4. Siano $Q$ e la partizione $S$ come nell'esempio precedente. La funzione $f : Q \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} 4 & \text{se } (x,y) \in [0,1[\times[-1,0] \\ 3 & \text{se } (x,y) \in [0,1[\times]0,2] \\ 1 & \text{se } (x,y) \in [1,3] \times [-1,0] \\ -1 & \text{se } (x,y) \in [1,3]\times]0,2] \end{cases}$$

è una funzione a scala.

**Definizione 5.5.** Sia $f : Q \to \mathbb{R}$ una funzione una funzione a scala rispetto alla partizione $S$ (definita come sopra). Il numero reale

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} c_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

è detto *integrale di $f$ su $Q$* e si denota con

$$\iint_Q f(x,y)dxdy.$$

È possibile mostrare che l'integrale di una funzione a scala appena definito non dipende dalla partizione $S$ di $Q$ scelta per rappresentare $f$.

*Esercizio* 5.6. Si determini l'integrale della funzione costante $f : Q \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = c$.

*Esempio* 5.7. Siano $f$ e $Q$ come negli esempi 5.2 e 5.3. Si ha

$$\iint_Q f dxdy = 4(1-0)(0+1)+3(1-0)(2-0)+1(3-1)(0+1)-1(3-1)(2-0) = 4+6+2-4 = 8.$$

## 5.2 Integrali di funzioni limitate su rettangoli

Tramite l'integrale di funzioni a scala appena definito è possibile definire l'integrale di funzioni limitate[32]. Pertanto sia $Q = [a,b] \times [c,d]$ un rettangolo come sopra e $f : Q \to \mathbb{R}$ una funzione

[31] Per evitare confusione con i punti del piano, l'intervallo aperto dei punti compresi tra $u$ e $v$ sarà indicato con

$$]u,v[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, u < x < v\}.$$

[32] Si ricordi che una funzione $fA \to \mathbb{R}$ è detta limitata se esiste una costante $M \geq 0$ tale che $|f(x,y)| \leq M$ per ogni $(x,y) \in A$.

limitata.

Denotato con $S(Q)$ l'insieme di tutte le funzioni a scala definite su $Q$ definiamo

$$I_*(f) = \left\{ \iint_Q g(x,y)dxdy \,|\, g \in S(Q), \quad g \leq f \right\},$$

$$I^*(f) = \left\{ \iint_Q h(x,y)dxdy \,|\, h \in S(Q), \quad h \geq f \right\}.$$

Dunque $I_*(f), I^*(f) \subset \mathbb{R}$ sono insiemi numerici ed è possibile mostrare che ogni elemento di $I_*(f)$ è un minorante di $I^*(f)$ e che, viceversa, ogni elemento di $I^*(f)$ è un maggiorante di $I_*(f)$. In altre parole

$$\sup I_*(f) \leq \inf I^*(f).$$

**Definizione 5.8.** Una funzione limitata $f : Q \to \mathbb{R}$ definita su un quadrato $Q$ è detta *integrabile (secondo Riemann)* su $Q$ se

$$\sup I_*(f) = \inf I^*(f)\,.$$

Tale numero è detto *integrale* di $f$ su $Q$ e si denota con

$$\iint_Q f(x,y)dxdy.$$

Prima di fornire risultati utili al calcolo di integrali, mostriamo che esistono funzioni non integrabili con il seguente

*Esempio* 5.9. Siano $Q = [0,1] \times [0,1]$ e $f : Q \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ e } y \text{ sono razionali} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$f$ è chiaramente limitata su $Q$, ma non è integrabile perché $\sup I_*(f) = 0$ e $\inf I^*(f) = 1$.

Il calcolo dell'integrale di una funzione di due variabili può spesso essere ricondotto a quello di due integrali unidimensionali. Vale infatti il seguente

**Teorema 5.10** (formule di riduzione per rettangoli)**.** *Sia $f : Q \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile sul rettangolo $Q = [a,b] \times [c,d]$.*

1. *Se per ogni $y \in [c,d]$ esiste l'integrale $A(y) = \int_a^b f(x,y)dx$, allora la funzione $A$ che resta definita è integrabile su $[c,d]$ e vale la formula*

$$\iint_Q f(x,y)dxdy = \int_c^d A(y)dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

2. *Se per ogni $x \in [a,b]$ esiste l'integrale $B(x) = \int_c^d f(x,y)dy$, allora la funzione $B$ che resta definita è integrabile su $[a,b]$ e vale la formula*

$$\iint_Q f(x,y)dxdy = \int_a^b B(x)dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

Si noti che per applicare il teorema precedente è necessario, oltre all'integrabilità di $f$, che almeno una tra le funzioni $A$ o $B$ sia integrabile. Una vasta classe di funzioni integrabili per le quali ciò senz'altro accade è data dal seguente

**Teorema 5.11.** *Sia $f : Q \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita sul rettangolo $[a, b] \times [c, d]$. Allora $f$ è integrabile su $Q$ e valgono le formule di riduzione*

$$\iint_Q f(x, y)dxdy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y)dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

*Esempio* 5.12. Sia $f : Q \to \mathbb{R}$ la funzione definita sul rettangolo $Q = [0, 1] \times [0, 2]$ da $f(x, y) = x^2 y$. Si osservi che $f$ è integrabile in quanto continua, grazie al teorema 5.11. Pertanto, riducendo per orizzontali (cioè integrando prima rispetto a $x$ e poi rispetto a $y$) si ha

$$\begin{aligned} \iint_Q f(x, y)dxdy &= \int_0^2 \left( \int_0^1 x^2 y dx \right) dy \\ &= \int_0^2 y \left( \int_0^1 x^2 dx \right) dy \\ &= \int_0^2 y \left[ \frac{x^3}{3} dx \right]_0^1 dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^2 y dy = \frac{1}{3} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^2 dy = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

*Esercizio* 5.13. Siano $Q$ ed $f$ come nell'esercizio precedente. Si calcoli $\iint_Q f(x, y)dxdy$ riducendo per verticali (cioè integrando prima rispetto a $y$ e poi rispetto a $x$).

*Esempio* 5.14. Siano $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ ed $f : Q \to \mathbb{R}^2$ la funzione definita da $f(x, y) = \frac{x}{1+xy}$. Poiché $f$ è continua su $Q$, grazie al teorema 5.11 $f$ è certamente integrabile e si ha

$$\begin{aligned} \iint_Q f(x, y)dxdy &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x}{1 + xy} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 [\log(1 + xy)]_0^1 dx \\ &= \int_0^2 \log(1 + x)dx \\ &= [(1 + x) \log(1 + x)]_0^1 - \int_0^1 dx = 2 \log 2 - 1. \end{aligned}$$

(per passare dalla terza alla quarta riga è stata utilizzata la formula di integrazione per parti).

*Esercizio* 5.15. Siano $Q$ ed $f$ come nell'esercizio precedente. Si determini $\iint_Q f(x, y)dxdy$ riducendo per orizzontali (cioè integrando prima rispetto a $x$ e poi rispetto a $y$) constatando che in questo modo il calcolo risulta più complicato.

## 5.3 Integrali di funzioni limitate su insiemi limitati

L'idea con la quale si estende la definizione di integrale sui rettangoli a insiemi limitati[33] è piuttosto semplice: si estende in modo banale la funzione su un rettangolo contenente l'insieme in oggetto. Precisamente si dà la seguente

**Definizione 5.16.** Siano $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme limitato ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione limitata definita su $A$. Fissato un rettangolo $Q$ contenente l'insieme $A$ sia $\tilde{f} : Q \to \mathbb{R}$ il *prolungamento banale di $f$ a $Q$*, cioè la funzione definita da

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in A \\ 0 & \text{se } (x, y) \in Q \setminus A. \end{cases}$$

[33]Si ricordi che un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ del piano è detto limitato se è contenuto in un rettangolo

Se la funzione $\tilde{f}$ è integrabile su $Q$, allora la funzione $f$ è detta *integrabile su* $A$ e si pone

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \iint_Q \tilde{f}(x,y)dxdy.$$

Si eviterà, in questa sede, di affrontare la questione di riconoscere l'integrabilità di una funzione anche in rapporto alle proprietà del dominio di integrazione oltre a quelle della funzione stessa. A tale proposito ci si limiterà a fornire una classe di insiemi (detti normali rispetto ad uno degli assi) sui quali sono integrabili tutte le funzioni continue.

**Definizione 5.17.** Un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^2$ del piano è detto *normale rispetto all'asse* $x$ se esistono due funzioni continue $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ tali che $\alpha \le \beta$ e l'insieme $A$ ha la forma

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \le x \le b, \quad \alpha(x) \le y \le \beta(x)\right\}.$$

**Definizione 5.18.** Un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^2$ del piano è detto *normale rispetto all'asse* $y$ se esistono due funzioni continue $\gamma, \delta : [c,d] \to \mathbb{R}$ tali che $\gamma \le \delta$ e l'insieme $A$ ha la forma

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, c \le y \le d, \quad \gamma(y) \le x \le \delta(y)\right\}.$$

*Esempio* 5.19. Sia $Q = [a,b] \times [c,d]$ un rettangolo. Evidentemente $Q$ è normale rispetto entrambi gli assi (basta prendere funzioni costanti $\alpha = c$, $\beta = d$ e $\gamma = a$, $\delta = b$).

Per domini di integrazione normali valgono formule di riduzione analoghe a quelle già note per i rettangoli (cfr. teorema 5.10)

**Teorema 5.20** (formule di riduzione per insiemi normali)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme del piano normale rispetto a uno degli assi coordinati e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e continua sui punti interni di $A$. Allora $f$ è integrabile su $A$ e valgono le formule*

1. $\displaystyle\iint_Q f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)dx\right) dy.$ *(se $A$ è normale rispetto all'asse $y$)*

2. $\displaystyle\iint_Q f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dy\right) dx.$ *(se $A$ è normale rispetto all'asse $x$)*

*Esempio* 5.21. Si supponga di voler calcolare $\iint_T (5-3x)dxdy$, dove $T$ è il triangolo di vertici $\{(0,2),(0,0),(1,0)\}$. Poiché

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2-2x\right\}$$

è normale rispetto all'asse $x$, e la funzione $f$ definita da $f(x,y) = 5-3x$ è continua in $T$, tramite l'opportuna formula di riduzione (cfr. 5.20) si ha

$$\begin{aligned}
\iint_T (5-3x)dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} (5-3x)dy\right) dx \\
&= \int_0^1 (5-3x)(2-2x)dx \\
&= \int_0^1 (10-16x+6x^2)dx \\
&= \left[10x - 8x^2 + 2x^3\right]_0^1 = 4.
\end{aligned}$$

*Esercizio* 5.22. Sia $T$ come nell'esempio precedente. Dopo aver osservato che $T$ è normale anche rispetto all'asse $y$, si ricalcoli $\iint_T (5-3x)dxdy$ utilizzando l'opportuna formula di riduzione.

*Esempio* 5.23. Si supponga di voler calcolare $\iint_A xydxdy$, dove $A$ è la parte limitata di piano compresa tra la bisettrice del primo e terzo quadrante e la parabola di equazione $x = y^2$. Si osservi che la funzione $f$ definita da $f(x,y) = xy$ è continua su tutto il piano e dunque anche su $A$. D'altra parte

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq y \leq 1, \quad y^2 \leq x \leq y\}$$

è normale rispetto all'asse $y$, quindi per il teorema 5.20 si ha

$$\begin{aligned} \iint_A xydxdy &= \int_0^1 \left( \int_{y^2}^{y} xydx \right) dy \\ &= \int_0^1 y \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{y^2}^{y} dy \\ &= \int_0^1 \frac{y^3 - y^5}{2} dy \\ &= \left[ \frac{3y^4 - 2y^6}{24} \right]_0^1 = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

## 5.4 Proprietà notevoli dell'integrale

Si è osservato (cfr. esempio 5.9) che non tutte le funzioni sono integrabili e che ciò non dipende solo dalla funzione, ma anche dall'insieme sul quale si integra. In altre parole, dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ e denotato con $\mathcal{R}(A)$ l'insieme di tutte le funzioni integrabili su $A$, $\mathcal{R}(A)$ è in generale un sottoinsieme proprio dell'insieme di tutte le funzioni definite su $A$. Se tutte le funzioni costanti sono integrabili su $A$ (cioè fanno parte di $\mathcal{R}(A)$), allora $A$ è detto *misurabile*.

Poiché l'operazione di integrazione su $A$ associa il numero $\iint_A f = \iint_A f(x,y)dxdy$ ad ogni funzione $f$ integrabile su $A$, essa definisce a sua volta una funzione

$$\iint_A : \mathcal{R}(A) \to \mathbb{R}$$

a valori reali e definita sull'insieme $\mathcal{R}(A)$ delle funzioni integrabili su $A$.

Le principali proprietà di tale funzione sono riassunte nel seguente

**Teorema 5.24.** *Siano $f, g \in \mathcal{R}(A)$ funzioni integrabili su $A$ e $a, b \in \mathbb{R}$ costanti reali.*

1. *Linearità: $af + bg \in \mathcal{R}(A)$ e $\displaystyle\iint_A (af + bg) = a \iint_A f + b \iint_A g$.*
2. *Monotonia: se $f \leq g$ allora $\displaystyle\iint_A f \leq \iint_A g$.*
3. *Teorema della media: se $A$ è misurabile, posto $|A| = \iint_A dxdy$, si ha*
$$|A| \inf_A f \leq \iint_A f \leq |A| \sup_A f.$$

Un'altra importante proprietà dell'integrale è l'*additività rispetto al dominio d'integrazione.*

**Teorema 5.25.** *Siano $A_1$ e $A_2$ due sottoinsiemi limitati del piano tale che l'intersezione $A_1 \cap A_2$ sia misurabile e si abbia $\iint_{A_1 \cap A_2} dxdy = 0$. Se $f$ è una funzione integrabile su $A_1$ e su $A_2$, allora è integrabile sull'unione $A_1 \cup A_2$ e vale la formula*

$$\iint_{A_1 \cup A_2} f = \iint_{A_1} f + \iint_{A_2} f.$$

*Osservazione* 5.26. Se $A_1$ e $A_2$ sono come nell'enunciato del teorema precedente, grazie al teorema della media (cfr. 5.24) si ha $\iint_{A_1 \cap A_2} f = 0$. Gli insiemi misurabili sui quali ogni costante (e dunque ogni funzione per quanto appena osservato) ha integrale nullo sono detti *insiemi di misura nulla.* Dunque, nell'enunciato precedente è richiesto che l'intersezione $A_1 \cap A_2$ abbia misura nulla. Sono insiemi di misura nulla

1. gli insiemi costituiti da un numero finito di punti,
2. i segmenti,
3. i sottoinsiemi di insiemi di misura nulla,
4. l'unione di un numero finito di insiemi di misura nulla (es. il triangolo e il quadrato),
5. il grafico di una funzione continua definita su un intervallo.

*Osservazione* 5.27. Attenzione: il punto 4. dice "l'unione di un numero *finito* di insiemi di misura nulla", e non "l'unione di insiemi di misura nulla". Infatti ogni insieme è unione di insiemi di misura nulla (i suoi punti), ma non ogni insieme è di misura nulla.

Grazie al teorema 5.25 è possibile calcolare integrali di funzioni su insiemi non normali scomponendoli in sottoinsiemi normali rispetto ad uno degli assi coordinati.

*Esempio* 5.28. Si supponga di dover calcolare $\int_A 2xy^2 dxdy$, dove $C$ è la regione ottenuta rimuovendo un disco unitario centrato nell'origine dalla parte di piano delimitata dall'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 4$. Evidentemente

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + 4y^2 \leq 4, \quad x^2 + y^2 \geq 1\right\}.$$

non è normale perché le sezioni con rette verticali o orizzontali non sono segmenti. D'altra parte l'asse $y$ taglia $A$ in due sottoinsiemi normali rispetto all'asse $y$, precisamente si ha $A = A_1 \cup A_2$ dove

$$A_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \leq y \leq 1, \quad \sqrt{1-y^2} \leq x \leq 2\sqrt{1-y^2}\right\},$$

$$A_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \leq y \leq 1, \quad -2\sqrt{1-y^2} \leq x \leq -\sqrt{1-y^2}\right\}.$$

Si noti che l'intersezione

$$A_1 \cap A_2 = \{(0, 1), (0, -1)\}$$

è costituita da soli due punti perciò ha misura nulla. È dunque possibile applicare il teorema 5.25 e dopo aver calcolato

$$\begin{aligned} \iint_{A_1} 2xy^2 dxdy &= \int_{-1}^{1} \left( \int_{\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}} 2xy^2 dx \right) dy \\ &= \int_{-1}^{1} y^2 \left[x^2 dx\right]_{\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \int_{-1}^{1} 3y^2(1-y^2) dy \\ &= 3\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{5}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\iint_{A_2} 2xy^2 dxdy &= \int_{-1}^{1} \left( \int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} 2xy^2 dx \right) dy \\
&= \int_{-1}^{1} y^2 \left[ x^2 dx \right]_{-2\sqrt{1-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} dy \\
&= \int_{-1}^{1} -3y^2(1-y^2) dy \\
&= -3 \left[ \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^{1} = -\frac{4}{5},
\end{aligned}
$$

si ottiene facilmente

$$
\iint_A 2xy^2 dxdy = \iint_{A_1} 2xy^2 dxdy + \iint_{A_2} 2xy^2 dxdy = 0\,.
$$

*Osservazione* 5.29. Si poteva ottenere lo stesso risultato, nel precedente esercizio, per via più rapida: sfruttando proprietà di simmetria. Infatti l'insieme $A$ è simmetrico rispetto all'asse $\{x = 0\}$ e la funzione $f(x, y) = xy^2$ è dispari rispetto alla variabile $x$ (ovvero rispetto alla simmetria assiale rispetto all'asse $\{x = 0\}$). Pertanto

$$
\iint_A 2xy^2 dxdy = \iint_{A_1} 2xy^2 dxdy + \iint_{A_2} 2xy^2 dxdy = 0\,.
$$