1. Esercizi

(1) Calcolare

$$2\begin{bmatrix}1\\4\\-1\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}2\\3\\-2\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}3\\0\\-2\end{bmatrix};$$

(2) dimostrare che i vettori $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}$, sono linearmente dipendenti;

(3) dimostrare che i vettori $\begin{bmatrix}4\\-2\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix}$, sono linearmente indipendenti;

(4) stabilire se i vettori $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}$ sono linearmente dipendenti;

(5) stabilire se i vettori $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti;

(6) stabilire se il vettore $\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$ è combinazione lineare dei vettori $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}$;

(7) siano $v_1, v_2, v_3, \in \mathbb{R}^3$. Dimostrare che:
- se v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti, allora v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti;
- se v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti, allora v_2, v_3 sono linearmente indipendenti;
- se v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti, allora v_1, v_2+v_3, v_2-v_3 sono linearmente indipendenti;

(8) Dimostrare che ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ è combinazione lineare dei seguenti vettori:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix};$$

(9) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, il vettore $\begin{bmatrix}1\\(1-k)\\k\end{bmatrix}$, ha norma 2;

(10) determinare l'angolo fra i vettori $X = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix}1\\\sqrt{3}\\1\end{bmatrix}$;

(11) stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i vettori $X = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ -1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} -2k \\ k \\ -1 \end{bmatrix}$ sono ortogonali;

(12) stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'angolo fra i vettori $X = \begin{bmatrix} k \\ k \\ -1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 2k \\ -k \\ 2 \end{bmatrix}$ è acuto, rispettivamente ottuso;

(13) sia $S = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$. Determinare $S^{\perp}$;

(14) siano $X, Y \in \mathbb{R}^3$ due vettori non nulli ed ortogonali. Dimostrare che sono linearmente indipendenti;

(15) calcolare l'area del parallelogramma di lati $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$;

(16) stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i vettori $X = \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ k+1 \end{bmatrix}$ sono linearmente dipendenti;

(17) siano $X, Y \in \mathbb{R}^3$ vettori lineramente indipendenti. Dimostrare che i vettori $X, Y, X \times Y$ sono linearmente indipendenti.

2. Esercizi

(1) Determinare equazioni parametriche per la retta r:
- passante per i punti $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.
- passante per $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ e con vettore direttore $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$;
- passante per $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e parallela alla retta $r : X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$;

(2) siano $r_1 = P_1 + tA_1$ e $r_2 = P_2 + tA_2$ due rette nello spazio. Dimostrare che:
- r_1 e r_2 sono coincidenti se e solamente se $A_1 \times A_2 = 0$ e $(P_2 - P_1) \times A_1 = 0$;
- r_1 e r_2 sono parallele se e solamente se $A_1 \times A_2 = 0$ e $(P_2 - P_1) \times A_1 \neq 0$;

(3) determinare un'equazione cartesiane per il piano passante per $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e ortogonale al vettore $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$;

(4) determinare un'equazione cartesiane per il piano passante per $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ed ortogonale alla retta $r : X = t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$;

(5) determinare un'equazione cartesiane per il piano π passante per i punti $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

(6) determinare un'equazione cartesiane di un piano passante per $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(7) determinare un'equazione cartesiane per il piano contenente la retta

$r : X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e passante per $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$;

(8) sia $P \in \mathbb{R}^3$ e sia $n \in \mathbb{R}^3$ un vettore non nullo. Sia $\pi = \{X \in \mathbb{R}^3 : \langle X - P, n \rangle = 0\}$ il piano passante per P e ortogonale a n. Siano $P_1, P_2 \in \pi$. Dimostrare che la retta passante per P_1 e P_2 è contenuta nel piano π;

(9) sia $\pi \subset \mathbb{R}^3$ un piano e sia $r : P + tA$, $A \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$ una retta spazio. Se indichiamo con n un vettore ortogonale al piano, dimostrare che $r \subset \pi$ se e solamente se $P \in \pi$ e $\langle A, n \rangle = 0$;

(10) sia $\pi \subset \mathbb{R}^3$ un piano e sia $r : P + tA$, $A \neq 0$ e $t \in \mathbb{R}$ una retta nello spazio. Se indichiamo con n un vettore ortogonale al piano, dimostrare che π e r sono incidenti se e solamente se $\langle A, n \rangle \neq 0$;

(11) determinare un'equazione parametrica per il piano $\pi : x - y + z = 2$;

(12) determinare un'equazione parametrica per il piano passante per $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e ortogonale al vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$;

(13) determinare un'equazioni parametrica per il piano π passante per i punti $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

(14) determinare un'equazione parametrica per il piano contentente la retta $r : X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e passante per $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$;

(15) determinare un'equazione cartesiana per il piano $\pi : X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, per $s, t \in \mathbb{R}$;

(16) siano $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ tre punti non allineati. Dimostarare una equazione parametrica, rispettivamente una equazione cartesiana, per il piano passante per P_1, P_2, P_3 è $X = P_1 + t(P_2 - P_1) + s(P_3 - P_1)$, $t, s \in \mathbb{R}$, rispettivamente $ax + by + cz = d$, dove $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = (P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1)$ ed $d = \langle n, P_1 \rangle$;

(17) determinare equazioni cartesiane per la retta r:

- passante per $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$;
- passante per $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e parallela alla retta $r : X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$;
- ortogonale alle rette $s_1 : X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $s_2 : X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e passante per $P = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(18) Determinare Un'equazione cartesiana e parametrica per il piano π:
- ortogonale ad $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ e passante per $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;
- passante per $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$;
- passante per $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e parallelo alla retta

$$r : \begin{cases} 3x - 2z = 3 \\ 3y - z = 1 \end{cases}$$

(19) sia $r : X = P + tA$, $t \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, un retta nello spazio e sia $Q \notin r$. Dimostrare che una equazione parametrica per il piano contenente la retta r e passante per Q è $\pi : P + \alpha(P - Q) + \beta A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(20) siano dati, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il piano $\pi : kx + 2y - 3z = k$ ed la retta $r : \begin{cases} x - kz = k \\ y + 2kz = 4 \end{cases}$. Determinare per quali valori di k il piano π e la retta r sono paralleli;

(21) siano $s_1 : X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $s_2 : X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ due rette nello spazio. Determinare un piano π contenente le rette s_1 e s_2. Tale piano è unico?

(22) sia $r : X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Determinare un piano π contenente

r e passante per $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(23) Determinare equazioni cartesiane e parametriche per la retta r passante per $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ed incidente alle rette

$$s_1 : \begin{cases} x - 2y - z = 2 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \qquad s_2 : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

(24) Determinare equazioni cartesiane e parametriche per la retta r incidente e ortogonale alle rette

$$s_1 : \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 1 \end{cases} \qquad s_2 : \begin{cases} x = 2 \\ -y + z = 2 \end{cases}$$

(25) Determinare una equazione cartesiane per il piano π contenetente la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}.$$

e parallelo all'asse delle y

3. Esercizi

(1) Calcolare

$$4\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\1\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}0\\-3\\2\\8\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}3\\0\\-2\\8\end{bmatrix};$$

(2) dimostrare che i vettori $\begin{bmatrix}1\\0\\1\\9\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\2\\18\end{bmatrix}$, sono linearmente dipendenti;

(3) dimostrare che i vettori $\begin{bmatrix}3\\4\\-2\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\\2\\-4\end{bmatrix}$, sono linearmente indipendenti;

(4) stabilire se i vettori $\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\\2\\-1\end{bmatrix}$ sono linearmente dipendenti;

(5) stabilire se i vettori $\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti;

(6) stabilire se il vettore $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\2\end{bmatrix}$ è combinazione lineare dei vettori $\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix};$

(7) siano $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{C}^5$. Dimostrare che:
- se v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti, allora v_1, v_2, v_4 sono linearmente dipendenti;
- se v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente indipendenti, allora v_1, v_3 sono linearmente indipendenti;
- se v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti, allora $v_1, v_2+v_3, v_1+v_2+v_3$ sono linearmente indipendenti;

(8) In $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, calcolare
$$2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(9) stabilire se $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ sono linearmente dipendenti oppure indipendenti;

(10) calcolare la trasposta delle seguenti matrici:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & 7 \\ 9 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(11) calcolare la coniugata e l'aggiunta delle seguenti matrici:
$$\begin{pmatrix} 2i & 1+i & 1 \\ -3+i & 2-i & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & -i & 4-5i \\ 2+i & -i & 2i \\ 1+i & 2+i & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5+i & -3-i & i & 7+i \\ 9+4i & -4-3i & i & 1 \end{pmatrix}.$$

(12) stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ le seguenti matrici
$$\begin{pmatrix} h+1 & h+2 \\ h & 1-h^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2-h & h+1 & 0 \\ -h-1 & h^2-4 & h^2-2 \\ 0 & -h & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2-h & 2 \\ h+2 & 0 & -2 \\ h-2 & 2+h & 0 \end{pmatrix}.$$
sono antisimmetriche;

(13) stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ le seguenti matrici
$$\begin{pmatrix} h+1 & h+1 \\ 2h & h^2-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & h+1 & h^2-1 \\ 2 & 33 & h-2 \\ 0 & h-2 & 111 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -h & 2 \\ h+2 & 0 & -1 \\ 1-h & h & 0 \end{pmatrix}.$$
sono simmetriche;

(14) stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{C}$ le seguenti matrici
$$\begin{pmatrix} h+i & h+1 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & h & 2i-h \\ -2i & 33 & 2 \\ 0 & h+2-2i & h-2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-h & 2i+h & -2i+2 \\ -2i+2 & 33 & 2 \\ 2i+h & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
sono Hermitiane;

(15) stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{C}$ le seguenti matrici
$$\begin{pmatrix} -i & -1+h \\ 1+i & h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & h+1 & h+3 \\ -3+h & 0 & -2 \\ -4+i & -2 & h-2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i & h & 1 \\ 2i & 0 & -1 \\ -1 & h+1-2i & h-2i \end{pmatrix}.$$
sono anti-Hermitiane;

(16) calcolare la traccia delle seguenti matrici:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 7 & \\ 0 & 0 & 3 & 90 \\ 1000 & 100000 & -3 & -23 \end{pmatrix}$$

(17) Calcolare, quando possibile, i prodotti AB e BA delle seguenti matrici:

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

(iii) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 11 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

(iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2-i & 3 \\ 1 & -1+i & i \\ -1 & 4 & -i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 1-i & i & 1 \\ 1 & i & 1-i \end{pmatrix}$

(18) Siano $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $e_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5$ e sia $A \in \mathrm{M}_{m\times 5}(\mathbb{R})$, rispettivamente $B \in \mathrm{M}_{5\times n}(\mathbb{R})$. Dimostrare che

$$Ae_i = A^i$$

per $= 1, \dots, 5$, rispettivamente

$$e_i^T B = B_i,$$

per $i = 1, \dots, 5$;

(19) siano $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrici ortogonali. Dimostrare che
- AB è ancora una matrice ortogonale;
- A è invertibile ed $A^T = A^{-1}$ è ancora una matrice ortogonale.

(20) siano $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ matrici unitarie. Dimostrare che
- AB è ancora una matrice unitaria;
- A è invertibile ed $A^* = A^{-1}$ è ancora una matrice unitaria.

(21) stabilire se le seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

sono ortogonali;