Esame di "Geometria" - 9 CFU (Appello del 17 luglio 2019)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

IMPORTANTE: Alla fine della prova si deve consegnare solo questo foglio.

Esercizio 1. Si consideri la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. In caso affermativo, determinare una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tale che $P^{-1}AP = D$.

Svolgimento:

Esercizio 2. Siano dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$W = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}\right), \qquad U := \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

1. Dare la definizione di $W^\perp$ e determinare equazioni cartesiane per esso.
2. Stabilire, giustificando la risposta, se $\mathbb{R}^4 = U + W$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. Determinare la dimensione e una base per l'immagine di $\operatorname{Im} T$.

2. Determinare la dimensione e equazioni cartesiane per il nucleo di T.

Svolgimento:

Esercizio 4. Si considerino la retta s_1 di equazioni cartesiane

$$s_1 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

e la retta s_2 di equazione parametrica

$$s_2 : \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Stabilire la mutua posizione di s_1 e s_2.
2. Determinare equazioni cartesiane per la retta r ortogonale a s_1 e s_2 e passante per $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Svolgimento: