Esame di GEOMETRIA (Appello del 30 gennaio 2018)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$W = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \qquad U : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

1. Scrivere equazioni cartesiane per W.
2. Determinare una base di $U + W$.

Svolgimento:

Esercizio 2. Siano date la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

e la retta s di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y + z = 4, \\ 2x - y = 5. \end{cases}$$

1. Stabilire la mutua posizione di r e s.
2. Dire per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la retta r è contenuta nel piano $\pi : 2x + \alpha y + z = \beta$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da da

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

1. Stabilire se T è iniettiva;
2. Stabilire, giustificando la risposta, se T è diagonalizzabile.

Svolgimento:

Esercizio 4. Sia $W = \mathcal{L}(w_1, w_2, w_3) \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare una base di $W^\perp$.
2. Verificare che $W \cap W^\perp = \{0\}$.

Svolgimento:

Geometria - 9 CFU (Appello del 20 febbraio 2018)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3$, si consideri la retta

$$r : \begin{cases} 2x_1 - x_3 - 1 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4 = 0 \end{cases} .$$

1. Determinare un'equazione cartesiana per il piano π ortogonale a r e passante per $P = (1, 0, 3)$.
2. Detto Q il punto di intersezione tra la retta r e il piano π, determinare equazioni parametriche della retta s passante per P e Q.

Svolgimento:

Esercizio 2. Si consideri il sottospazio U di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Trovare una base ortogonale di U, rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$.
2. Trovare una base del complemento ortogonale $U^\perp$, rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Sia $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

1. Calcolare la matrice associata ad L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
2. Trovare una base di $\operatorname{Ker} L$ e stabilire se L è un isomorfismo.
3. Stabilire se le immagini tramite L dei vettori $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

Svolgimento:

Esercizio 4. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

trovare una matrice ortogonale P e una matrice diagonale D tali che $D = P^{-1}AP$.

Svolgimento:

Esame di GEOMETRIA - 9 CFU (Appello del 26 marzo 2018)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Si considerino le rette r e s di equazioni parametriche

$$r : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}, \quad s : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t' \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \ t' \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare un piano ortogonale a s e passante per l'origine.
2. Determinare l'intersezione delle due rette.
3. Scrivere un'equazione cartesiana per r.

Svolgimento:

Esercizio 2. Al variare del parametro reale $h \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ h & 2 & 1 \\ -1 & -1 & h \end{bmatrix}.$$

1. Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice A risulta essere invertibile.

2. Stabilire, giustificando la risposta, se la matrice A è diagonalizzabile per $h = 0$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

rispetto alle basi canoniche in partenza e in arrivo.

1. Calcolare la dimensione e una base per il nucleo di L.
2. Calcolare la dimensione e una base per l'immagine di L.
3. Stabilire se L è iniettiva, se L è suriettiva, e se L è un isomorfismo. Giustificare le risposte.

Svolgimento:

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinare una matrice ortogonale U e una matrice diagonale D, tali che $U^T A U = D$.

Svolgimento:

Esame di GEOMETRIA - 9 CFU (11 giugno 2018, A)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Si consideri la retta s_1 di equazioni cartesiane

$$s_1 : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - z = 3 \end{cases}$$

e la retta s_2 di equazione parametrica vettoriale

$$s_2 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ k \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

1. Studiare, al variare del parametro reale k, la mutua posizione di s_1 e s_2.
2. Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per il punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e parallelo sia alla retta s_1 che alla direzione individuata dal vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Svolgimento:

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4$, si considerino il sottospazio vettoriale W generato dai vettori

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \; w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \; w_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e il sottospazio vettoriale U definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

1. Determinare una base di $W^\perp$.
2. Determinare una base di $U + W$.
3. Stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Sia $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$F \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

1. Trovare una base di $\operatorname{Ker} F$ e stabilire se F è un isomorfismo.
2. Calcolare una base ortogonale di $\operatorname{Im} F$.
3. Stabilire se le immagini tramite F dei vettori $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

Svolgimento:

Esercizio 4. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

determinare una matrice P ortogonale e una matrice D diagonale, tali che $D = P^{-1}AP$.

Svolgimento:

Esame di GEOMETRIA (Appello del 12 luglio 2018)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

1. Scrivere la definizione di autovalore e autovettore della matrice A.
2. Sia $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{C})$. Supponiamo che 2 sia un autovalore di A. Dimostrare che $\mathrm{rg}(A - 2Id) < 4$.

Svolgimento:

Esercizio 2. Siano date la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

e la retta s di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2x - y = 5. \end{cases}$$

1. Determinare un'equazione cartesiana del piano π contenente la retta s e passante per $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.
2. Dire per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la retta r è contenuta nel piano $\pi : x + \alpha y + z = \beta$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \\ 6 \end{bmatrix}$$

1. Stabilire se T è suriettiva.
2. Stabilire, giustificando la risposta, se T è diagonalizzabile.

Svolgimento:

Esercizio 4. Sia $W = \mathcal{L}(w_1, w_2, w_3) \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Calcolare equazioni cartesiane per W.
2. Trovare una base ortogonale di $W^{\perp}$.

Svolgimento:

Esame di GEOMETRIA (Appello del 3 settembre 2018)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ così definita;

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x_1 - 2x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare equazioni cartesiane per l'immagine di T.
2. Trovare una base del nucleo di T e completare la base trovata ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Svolgimento:

Esercizio 2. Si considerino le rette

$$s_1 : \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad s_2 : \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}.$$

1. Stabilire la posizione reciproca delle due rette.
2. Stabilire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il piano $\alpha x - 3y + 2z = \beta$ contiene la retta s_1.

Svolgimento:

Esercizio 3. Siano dati i sottospazi $\mathbb{R}^4$:

$$W = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \qquad U : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

1. Determinare una base di $W^\perp$.
2. Determinare una base di $U + W$.

Svolgimento:

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e in tal caso determinare una matrice invertibile P e una matrice diagonale D, tali che $D = P^{-1}AP$.

Svolgimento:

Esame di GEOMETRIA (Appello del 17 settembre 2018)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare equazioni cartesiane per l'immagine di L_A.
2. Calcolare una base per il nucleo di L_A e una base per l'immagine di L_A.

Svolgimento:

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$, si consideri il piano π di equazione cartesiana

$$\pi : 2x - 6y + 2z - 3 = 0.$$

1. Determinare un'equazione cartesiana per il piano α parallelo a π e passante per $P = (2, 0, -1)^T$.

2. Determinare equazioni per la retta r passante per P, parallela al piano π ed incidente l'asse x.

Svolgimento:

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - \lambda x_2 + \lambda x_3 = 1 \\ x_1 - \lambda x_2 = 0 \\ -x_1 + (\lambda + 3)x_2 - x_3 = 1 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1. Stabilire per quali valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema risulta compatibile.

2. Al variare di λ, calcolare la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema (1).

Svolgimento:

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare una matrice ortogonale P e una matrice diagonale D, tali che $D = P^T AP = P^{-1}AP$.

Svolgimento: