Esame di GEOMETRIA - 9 CFU (Appello del 21 febbraio 2017)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita da

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1. Stabilire se T è iniettiva.
2. Stabilre per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, il vettore $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$ appartiene all'immagine di T.

Svolgimento:

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4$, si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. Dimostrare che v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.
2. Giustificando la risposta, completare i vettori v_1, v_2, v_3 ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Svolgimento:

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^4$, si considerino i sottospazi U e W definiti da

$$U = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_3 = x_2 + x_4,\, x_1 = x_2 - x_4\right\},$$

$$W = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_3 = x_1 - x_2,\, x_4 = x_1 + x_2\right\}.$$

1. Determinare una base di W.
2. Determinare una base di $U^\perp$.
3. Stabilire se $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di U e W.

Svolgimento:

Esercizio 4. Sia $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

1. Scrivere la definizione di autovalore e di autovettore della matrice A.
2. Dimostrare che se $\lambda = 0$ è un autovalore di A, allora $\det(A) = 0$.

Svolgimento:

Esame di "Geometria" - 9 CFU (Appello del 10 aprile 2017)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Siano date la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

e la retta s di equazioni cartesiane

$$s : \begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ x + 2y + 3z + 4 = 0. \end{cases}$$

Determinare un'equazione cartesiana del piano π contenente la retta s e parallelo alla retta r.

Svolgimento:

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Trovare una base per ogni autospazio di A.
2. Determinare una matrice P *ortogonale* e una matrice D diagonale, tali che $D = P^T AP$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Si considerino i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ dati da

$$U = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad W = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

1. Calcolare equazioni cartesiane per W.
2. Calcolare la dimensione di $U + W$.
3. Trovare una base ortogonale di W.

Svolgimento:

Esercizio 4. Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 2x_3 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare una base per il nucleo e una base per l'immagine di L.
2. Stabilire se il vettore $(1, 0, 2)^T$ appartiene all'immagine di L.

Svolgimento:

Esame di GEOMETRIA - 9 CFU (Appello del 12 giugno 2017)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1.

1. Scrivere la formula di Grassmann.
2. Siano U e W sottospazi vettoriali di $V = \mathbb{R}^{10}$. Sapendo che $U \cap W = \{0_V\}$ e $\dim_{\mathbb{R}} U = \dim_{\mathbb{R}} W = 5$, dimostrare che $\mathbb{R}^{10}$ è somma diretta di U e W.

Svolgimento:

Esercizio 2. Si consideri la retta r di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

1. Determinare un'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e passante per $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
2. Determinare equazioni parametriche per la retta s passante per il punto P, ortogonale ad r e incidente l'asse delle x.

Svolgimento:

Esercizio 3. Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$W = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \qquad U : \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ y - z + 3w = 0 \end{cases}.$$

1. Determinare equazioni cartesiane per W.
2. Determinare una base ortogonale di $U^{\perp}$.

Svolgimento:

Esercizio 4. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Stabilire se T è iniettiva.
2. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$ appartiene all'immagine di T.
3. Stabilite, giustificando la risposta, se T è diagonalizzabile.

Svolgimento:

Esame di GEOMETRIA - 9 CFU (Appello del 17 luglio 2017)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

1. Scrivere la definizione di sottospazio vettoriale di V.
2. Dire, giustificando la risposta, se $W = \{A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : A + A^T = 0\}$ e $S = \{A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : AA^T = \mathrm{Id}\}$ sono sottospazi vettoriali di V.

Svolgimento:

Esercizio 2. Si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 3 \end{cases}, \qquad s : \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \beta \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare un'equazione cartesiana del piano ortogonale ad r e passante per $P = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. Stabilire al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la mutua posizione di r ed s.

Svolgimento:

Esercizio 3. Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$W = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right), \qquad U : \begin{cases} x + y + w = 0 \\ y + z + 2w = 0 \end{cases}.$$

1. Determinare la dimensione di $W^{\perp}$.
2. Determinare una base di $U + W$.
3. Dire, giustificando la risposta, se $\mathbb{R}^4$ è in somma diretta di U e W.

Svolgimento:

Esercizio 4. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

trovare una matrice ortogonale U ed una matrice diagonale D tale che $U^T AU = D$.

Svolgimento:

Esame di GEOMETRIA - 9 CFU (Appello del 19 Settembre 2017)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Sia $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

1. Scrivere la definizione di autovalore di A.
2. Dimostrare che se $\lambda = 0$ è un autovalore di A, allora $\mathrm{rg}(A) < n$.

Svolgimento:

Esercizio 2. Si consideri la retta r di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x - y - z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases} .$$

1. Scrivere un'equazione parametrica di r.

2. Stabilire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$, il piano $\pi : x - kz = 2$ contiene la retta r.

Svolgimento:

Esercizio 3. Siano $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$, $\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ due basi di $\mathbb{R}^2$.

1. Calcolare le coordinate di $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

2. Calcolare la matrice di cambiamento di base $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Svolgimento:

Esercizio 4. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base canonica, presa come base di partenza e di arrivo. Stabilire se T è invertibile.
2. Calcolare gli autovalori T e stabilire, giustificando la risposta, se T è diagonalizzabile.

Svolgimento: