Esame di Geometria - 9 CFU (Appello del 26 gennaio 2016)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si considerino la retta

$$r : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + \alpha y + z = 0 \end{cases}$$

ed il piano $\pi : -x + (\alpha - 1)y + z = 1$.

1. Studiare la mutua posizione di r e π al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, il piano π è ortogonale al piano $\pi' : x + 2y + z = 5$.

Svolgimento:

Esercizio 2. Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$W = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \qquad U : \begin{cases} x + y - z + w = 0 \\ x + 2y + z + 2w = 0 \end{cases}.$$

1. Determinare equazioni cartesiane per W.
2. Determinare una base di U.
3. Dire se $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di U e W.

Svolgimento:

Esercizio 3. Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e in tal caso trovare una matrice invertibile P e un matrice diagonale D, tali che $P^{-1}AP = D$.

Svolgimento:

Esercizio 4. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

1. Scrivere la matrice $M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(T)$, dove $\mathcal{C}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
2. Stabilire se T è suriettiva.
3. Stabilire se $\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ appartiene all'immagine di T.

Svolgimento:

Esame di "Geometria" - 6 CFU (Appello del 15 febbraio 2016)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Si considerino le rette

$$r : \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}, \qquad s : \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare un piano ortogonale a s e passante per l'origine.
2. Determinare la mutua posizione delle due rette.
3. Scrivere un'equazione cartesiana per r.

Svolgimento:

Esercizio 2.
Considerare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ h & 2 & 1 \\ -1 & -1 & h \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$ parametro reale.

1. Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice A risulta invertibile.
2. Stabilire se per $h = 0$ la matrice A diagonalizzabile, giustificando la risposta.

Svolgimento:

Esercizio 3. Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ rispetto alle basi canoniche.
Calcolare la dimensione e una base per il nucleo e per l'immagine di L. L è un isomorfismo, iniettiva, suriettiva? Giustificare le risposte.

Svolgimento:

Esercizio 4. Al variare di $k, b \in \mathbb{R}$, studiare il seguente sistema lineare, ovvero dire per quali valori dei parametri è risolubile, e per quali la soluzione è unica:

$$\begin{cases} x + 2y + kz &= 1 \\ 2x + ky + 8z &= -1 \\ 4x + 7y + z &= b. \end{cases}$$

Svolgimento:

Esame di Geometria - 9 CFU (Appello del 21 marzo 2016 - A)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Siano dati, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, i piani:

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \ x - 2y + 2z = 2, \\ \pi_2 &: \ z = 5, \\ \pi_3 &: \ kx - y = 3. \end{aligned}$$

Determinare i valori del parametro k per cui i tre piani hanno intersezione non vuota.

Svolgimento:

Esercizio 2. Siano date le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calcolare, se possibile, $A_1 A_2^T$ e $A_3 A_2$.
2. Stabilire se A_1, A_2, A_3 sono linearmente indipendenti.

Svolgimento:

Esercizio 3. Si consideri le matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Calcolare gli autovalori di A e una base per gli autospazi corrispondenti.

2. Stabilire, giustificando la risposta, se la matrice A è diagonalizzabile.

Svolgimento:

Esercizio 4. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}.$$

1. Calcolare una base del nucleo ed una base dell'immagine di F.
2. Calcolare la matrice associata a F rispetto alla base $\mathcal{B} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \}$ in partenza e alla base canonica in arrivo.

Svolgimento:

Esame di GEOMETRIA - 9 CFU (Appello del 20 Giugno 2016, A)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Siano $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ e $\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ due basi di $\mathbb{R}^2$.

1. Calcolare le coordinate di $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ rispetto alle base $\mathcal{B}$.

2. Calcolare la matrice di cambiamento di base $M(\mathcal{B}', \mathcal{B})$.

Svolgimento:

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^5$, si considerino i sottospazi

$$W_1 : x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5 = 0, \qquad W_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 + x_5 = 0. \end{cases}$$

1. Determinare una base e la dimensione di $W_1 \cap W_2$.
2. Determinare una base ortonormale di $W_1^{\perp}$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

trovare una matrice ortogonale U ed una matrice diagonale D tale che $U^T AU = D$.

Svolgimento:

Esercizio 4. Sia $T : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare.

1. Scrivere la definizione di nucleo di T.

2. Dimostrare che se T è iniettiva allora $\dim V \leq \dim W$.

Svolgimento:

Esame di GEOMETRIA - 9 CFU (Appello del 18 Luglio 2016)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, si considerino le rette

$$s_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}, \qquad s_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 \\ z = 2 + t \end{cases}$$

1. Stabilire la posizione reciproca delle due rette.
2. Determinare equazioni cartesiane della retta passante per $P = (1, 1, 1)^T$ e incidente a s_1 e s_2.

Svolgimento:

Esercizio 2. Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$W = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \qquad U = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

1. Determinare equazioni cartesiane per W.
2. Determinare una base di W e completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$.
3. Calcolare $\dim(U + W)$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita da

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x-y+z \\ x+3y-3z \\ y-z \end{pmatrix}.$$

1. Determinare una base per il nucleo e una base per l'immagine di L.
2. Stabilire se il vettore $(0, 2, -2, -1)^T$ appartiene all'immagine di L.

Svolgimento:

Esercizio 4. Sia A una matrice quadrata a coefficienti reali.

1. Scrivere la definizione di autovalore di A.
2. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovaolore di A. Definire la molteplicitità algebrica e molteplicità geometrica di λ e scrivere la disuguaglianza che lega le due molteplicità.
3. Stabilire, motivando le risposte, quali tra le seguenti matrici sono invertbili e quali sono simili:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento:

Esame di "Geometria" - 9 CFU (Appello del 12 settembre 2016)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Si considerino i sottospazi vettoriali $U, W \subset \mathbb{R}^4$ dati da

$$U = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \quad W = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right).$$

1. Determinare equazioni cartesiane per U.
2. Determinare una base di $U + W$.
3. Calcolare la dimensione di $U \cap W$.

Svolgimento:

Esercizio 2. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Stabilire se gli autospazi di A sono fra loro ortogonali.

(b) Determinare, se possibile, una matrice P ortogonale e una matrice D diagonale in modo che sia $P^{-1}AP = D$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Siano date la retta r di equazioni parametriche

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

e la retta s di equazioni cartesiane

$$s : \begin{cases} x - y + 3z + 7 = 0\,, \\ x + y + 5z + 3 = 0\,. \end{cases}$$

Determinare un'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e parallelo alla retta s.

Svolgimento:

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Determinare tutti i vettori $b \in \mathbb{R}^3$ per i quali il sistema lineare $Ax = b$ risulta essere compatibile (risolubile).

b) Si dica che cosa rappresenta geometricamente l'insieme di questi vettori.

Svolgimento:

Geometria - 9 CFU (Appello del 21 settembre 2016)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3$, si consideri la retta

$$r : \begin{cases} 2x_1 - x_3 - 1 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4 = 0 \end{cases} .$$

1. Determinare un'equazione cartesiana per il piano π ortogonale a r e passante per $P = (1, 0, 3)$.
2. Detto Q il punto di intersezione tra la retta r e il piano π, determinare un'equazione parametrica per la retta passante per P e Q.

Svolgimento:

Esercizio 2. Si consideri il sottospazio U di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Trovare una base ortogonale di U, rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$.

2. Trovare una base del complemento ortogonale $U^\perp$, rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Sia $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

1. Calcolare la matrice associata ad L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
2. Trovare una base di $\operatorname{Ker} L$ e stabilire se L è un isomorfismo.
3. Stabilire se le immagini tramite L dei vettori $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

Svolgimento:

Esercizio 4. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

trovare una matrice P *ortogonale* e una matrice D diagonale tali che $D = P^{-1}AP$.

Svolgimento: