Esame di Geometria - 9 CFU (Appello del 26 gennaio 2015 - A)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3$, siano dati il punto $P = (1, 2, 3)$ e la retta

$$r : (0, 1, 1) + t(1, -1 - 2),\ \ t \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare un'equazione cartesiana del piano ortogonale ad r e passante per P.
2. Determinare un'equazione cartesiana del piano contenente la retta r e il punto P.

Svolgimento:

Esercizio 2. Si considerino le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

1. Stabilire se le matrici A_1, A_2, A_3 sono linearmente indipendenti.
2. Determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ generato da A_1, A_2, A_3.

Svolgimento:

Esercizio 3. Data $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, si consideri l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definita da $L_A(v) = Av$, per ogni $v \in \mathbb{R}^3$. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di L_A.

Svolgimento:

Esercizio 4. Sia $(V, \langle\, , \rangle)$ uno spazio euclideo reale, e sia W un sottospazio vettoriale di V.

1. Dare la definizione di $W^\perp$.
2. Se $V = \mathbb{R}^4$, munito del prodotto scalare standard, e $W = \mathcal{L}((1, 1, -2, 1), (1, -1, 0, 2), (0, 0, 1, 0))$, determinare una base di $W^\perp$.

Svolgimento:

Esame di Geometria - 9 CFU (Appello del 18 Giugno 2015 - A)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Si considerino le rette

$$s_1 : \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}, \qquad s_2 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare equazioni cartesiane per la retta r passante per $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e ortogonale a s_1 e s_2.
2. Stabilire per quali valori del parametro reale k il piano $\pi : x + ky + z = k$ contiene la retta s_1.

Svolgimento:

Esercizio 2. Siano $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ e $\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ due basi di $\mathbb{R}^2$ e sia $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$.

1. Calcolare le coordinate di $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ rispetto a $\mathcal{B}$;
2. Calcolare la matrice di cambiamento di base $M(\mathcal{B}', \mathcal{C})$.
3. Calcolare la matrice di cambiamento di base $M(\mathcal{B}', \mathcal{B})$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

trovare una matrice ortogonale U ed una matrice diagonale D, tali che $D = U^T AU$.

Svolgimento:

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

1. Dare la definizione di sottospazio vettoriale di V.
2. Siano U e W due sottospazi vettoriali di V, tali che $\dim U = 3$, $\dim W = 3$ e $\dim(U \cap W) = 2$. Dimostrare che $\dim V \geq 4$.

Svolgimento:

Esame di Geometria - 9 CFU (Appello del 18 Giugno 2015 - B)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Si considerino le rette

$$s_1 : \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}, \qquad s_2 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare equazioni cartesiane per la retta r passante per $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e ortogonale a s_1 e s_2.
2. Stabilire per quali valori del parametro reale k il piano $\pi : x + ky + z = k$ contiene la retta s_1.

Svolgimento:

Esercizio 2. Siano $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ e $\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ due basi di $\mathbb{R}^2$ e sia $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$.

1. Calcolare le coordinate di $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ rispetto a $\mathcal{B}$;
2. Calcolare la matrice di cambiamento di base $M(\mathcal{B}, \mathcal{C})$.
3. Calcolare la matrice di cambiamento di base $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

trovare una matrice ortogonale U ed una matrice diagonale D, tali che $D = U^T A U$.

Svolgimento:

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

1. Dare la definizione di sottospazio vettoriale di V.
2. Siano U e W due sottospazi vettoriali di V, tali che $\dim U = 3$, $\dim W = 3$ e $\dim(U \cap W) = 2$. Dimostrare che $\dim V \geq 4$.

Svolgimento:

Esame di "Geometria" - 9 CFU (Appello del 7 luglio 2015, A)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Sia consideri la retta r_1 di equazioni cartesiane $\begin{cases} x+y-1=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$.

1. Determinare un'equazione cartesiana per il piano π ortogonale a r_1 e passante per $P=(1,2,3)$.
2. Determinare equazioni parametriche per la retta r_2 passante per il punto P, ortogonale a r_1 e incidente l'asse x.

Svolgimento:

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4$, si considerino il sottospazio vettoriale U definito dalle equazioni $x_3 = 0, x_1 = 2x_2 + x_4$, e il sottospazio W generato dai vettori

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare una base per $U \cap W$.
2. Determinare una base ortogonale per W (rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$).

Svolgimento:

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definita da

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_1 + x_3 - x_4 \\ 4x_3 - 2x_4 \end{bmatrix}.$$

1. Trovare una base di $\mathrm{Ker}(L)$ e una base di $\mathrm{Im}(L)$.
2. Scrivere la matrice associata ad L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$, presa come base di partenza, e $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, presa come base di arrivo.

Svolgimento:

Esercizio 4.

1. Sia λ un autovalore di una matrice A. Definire la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di λ, e scrivere la disuguaglianza che lega le due molteplicità.

2. Stabilire, motivando le risposte, quali tra le seguenti matrici sono invertibili, e quali sono diagonalizzabili:
$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -8 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento:

Esame di "Geometria" - 9 CFU (Appello del 20 luglio 2015)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Determinare i valori di $s, t \in \mathbb{R}$ per i quali il vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s+1 \end{bmatrix}$ è combinazione lineare dei vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Svolgimento:

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4$, si consideri il sottospazio W generato dai vettori

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare equazioni cartesiane per W.
(b) Determinare una base ortonormale per W rispetto al prodotto scalare standard.

Svolgimento:

Esercizio 3. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'applicazione lineare definita da

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},\ T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Stabilire se T è invertibile.
2. Stabilire se T è diagonalizzabile.
3. Trovare una base per ciascun autospazio di T.

Svolgimento:

Esercizio 4. Sia $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una applicazione lineare.

1. Dare la definizione di nucleo di T.
2. Siano $v, w \in \operatorname{Ker} T$. Dimostrare che $v + 11w \in \operatorname{Ker} T$.
3. Se T è iniettiva, dimostrare che $n \leq m$;

Svolgimento:

Esame di Geometria - 9 CFU (Appello del 3 Settembre 2015)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Si considerino le rette

$$s_1 : \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = -1 \end{cases} , \qquad s_2 : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} .$$

1. Determinare un'equazione parametrica per la retta r passante per $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e ortogonale a s_1 e s_2.
2. Trovare i punti di intersezione di r con i piani coordinati, ovvero $x = 0$, $y = 0$, e $z = 0$.

Svolgimento:

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$, si consideri il sottospazio U generato dai vettori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

1. Calcolare la dimensione di U.
2. Trovare equazioni cartesiane di U.
3. Determinare una base ortonormale di $U^\perp$ rispetto al prodotto scalare standard.

Svolgimento:

Esercizio 3. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

1. Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, presa come base di partenza e di arrivo.

2. Stabilire se T è diagonalizzabile. Motivare la risposta.

Svolgimento:

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ e sia $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una base di V.

1. Dare la definizione di coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
2. Per ogni $v \in V$, dimostrare che $v, v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti.

Svolgimento:

Esame di Geometria - 9 CFU (Appello del 17 Settembre 2015)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1.
Siano α il piano passante per $(1, 0, 2)$ e ortogonale all'asse x, e β il piano di equazione $x = 3y$.

1. Determinare un punto di α diverso da $(1, 0, 2)$.
2. Determinare la mutua posizione dei due piani.
3. Scrivere una equazione parametrica per una retta parallela a β e passante per l'origine.

Svolgimento:

Esercizio 2.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Le righe di A sono linearmente indipendenti? Giustificare la risposta.

2. Determinare $Sol(A, (2, 1, 1, 1))$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alle basi canoniche.

a) L e' iniettiva? L e' suriettiva? Giustificare le risposte.

b) Scrivere l'operatore associato alla matrice $({}^tA)A$ e dire se esso e' diagonalizzabile.

Svolgimento:

Esercizio 4.

1. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Dare la definizione di sottospazio di V.
2. Siano $W = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \ / \ a_{ii} = 0 \ \forall i\}$ e $S = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \ / \ {}^tA = A\}$.
   Dire se W e S sono sottospazi di $M(n \times n, \mathbb{R})$ e giustificare le risposte.

Svolgimento: