Esame di Geometria - 9 CFU (Appello del 14 gennaio 2014 - A)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Si considerino le rette

$$s_1 : \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 = 0, \end{cases} \qquad s_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

1. Stabilire la posizione reciproca di s_1 e s_2.
2. Determinare le equazioni cartesiane e parametriche per la retta r passante per $(1, 1, 1)$ e ortogonale alle rette s_1 e s_2.
3. Trovare i punti di intersezione di r con i piani coordinati.

Svolgimento:

Esercizio 2. Determinare i valori dei parametri $s, t \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1-s \\ s+1 & 0 \end{bmatrix}$ è combinazione lineare delle matrici $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2-t \\ t & 0 \end{bmatrix}$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Considerare i tre vettori $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (2, 0, 1)$, $v_3 = (0, -3, 2)$.

1. Mostrare che $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
2. Calcolare le due matrici $M(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ e $M(\mathcal{B}, \mathcal{C})$.
3. Se $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è data da $L(x, y, z) = (x, x + y, x)$, determinare $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L)$.

Svolgimento:

Esercizio 4. Diagonalizzare in base ortonormale la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (calcolare la base ortonormale e la matrice diagonale).

Svolgimento:

Esame di Geometria - 9 CFU (Appello del 12 febbraio 2014, A)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Stabilire per quali valori del parametro reale k i tre piani di equazioni

$$\begin{aligned}&\pi_1 : x_1 + x_2 + 2x_3 = 1,\\ &\pi_2 : x_1 + (k-1)x_2 + (k-2)x_3 = 3,\\ &\pi_3 : kx_1 + x_2 + x_3 = 2\sqrt{2},\end{aligned}$$

si intersecano in una retta.

Svolgimento:

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4$, si considerino il sottospazio vettoriale U definito dalle equazioni $x_3 = 0, x_1 = 2x_2 + x_4$, e il sottospazio W generato dai vettori

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare una base per $U \cap W$.
2. Determinare una base per $W^\perp$ (rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$).

Svolgimento:

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definita da

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_1 + x_3 - x_4 \\ 4x_3 - 2x_4 \end{bmatrix}.$$

1. Scrivere la matrice associata ad L rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$, prese, rispettivamente, come base di partenza e di arrivo.
2. Trovare una base di $\mathrm{Ker}(L)$ e una base di $\mathrm{Im}(L)$.

Svolgimento:

Esercizio 4. a) Stabilire, motivando le risposte, quali tra le seguenti matrici sono invertibili, e quali sono diagonalizzabili:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -8 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

b) Stabilire, motivando la risposta, se le matrici A e B sono simili fra loro.

Svolgimento:

Esame di Geometria - 9 CFU (Appello 9 giugno 2014)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si considerino la retta

$$r : \begin{cases} x + y - z = \alpha \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

ed il piano $\pi : x + \beta y - z = 2\alpha$.

1. Studiare la mutua posizione di r e π al variare di α e β;
2. Dire per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il piano π è ortogonale al piano di equazione $x + y = 2\alpha$.

Svolgimento:

Esercizio 2. Sia $F : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{bmatrix}.$$

1. Calcolare $F(3 + 2t - 5t^2)$. Stabilire se $t^2 - t \in \operatorname{Ker} F$. Dire se $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \operatorname{Im} F$.
2. Scrivere la matrice associata ad F rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}_2[t]$ e di $\mathbb{R}^2$.
3. F è un isomorfismo? Giustificare la risposta.

Svolgimento:

Esercizio 3. Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Stabilire se esiste una matrice ortogonale P, tale che $P^T AP = D$ sia una matrice diagonale.
2. Scrivere la matrice P e la matrice diagonale D;

Svolgimento:

Esercizio 4.

1. Enunciare il Teorema di nullità più rango (ovvero il Teorema della dimensione) per un'applicazione lineare.

2. Sia $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Dimostrare che se $\mathrm{Ker}\, F = \{0\}$, allora $n \leq m$.

Svolgimento:

Esame di Geometria - 9 CFU (Appello 7 luglio 2014)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+z \\ y+z \\ x+y+2z \end{bmatrix}$$

1. Scrivere la matrice associata ad F rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ in partenza e $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ in arrivo.
2. Dire se F è un isomorfismo, motivando la risposta.
3. Scrivere la matrice associata a $F \circ F$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ come base di partenza e di arrivo .

Svolgimento:

Esercizio 2. Considerare i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5/2 \end{bmatrix} \right\rangle, \qquad U = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x - 5z = 0 \right\}.$$

1. Determinare una base di $U + W$ e una base di $U \cap W$.
2. Dire se $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$, cioè se U e W sono in somma diretta, motivando la risposta.

Svolgimento:

Esercizio 3. Considerare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Per quali valori di k, A è invertibile?.
2. Per quali valori di k, A è diagonalizzabile?.

Svolgimento:

Esercizio 4.

1. Scrivere la definizione di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V.
2. Scrivere la definizione di nucleo di una applicazione lineare $T : V \longrightarrow W$.
3. Dimostrare che $\operatorname{Ker} T$ è un sottospazio vettoriale di V.

Svolgimento:

Esame di Geometria - 9 CFU (Appello del 21 luglio 2014 - A)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$F\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix},\quad F\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix},\quad F\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}.$$

1. Stabilire, giustificando la risposta, se F è un isomorfismo.
2. Stabilire, giustificando la risposta, se F è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Svolgimento:

Esercizio 2. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare una base di W.
2. Completare la base trovata ad una base di $\mathbb{R}^4$.
3. Determinare una base di $W^{\perp}$, rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Si consideri il piano α passante per il punto $P = (1, 0, 1)$ e ortogonale al vettore $(2, 1, 0)$.

1. Determinare un'equazione cartesiana per α.
2. Determinare il punto di intersezione di α con l'asse delle y.
3. Determinare equazioni per la retta r giacente su α, passante per P e incidente l'asse delle y.

Svolgimento:

Esercizio 4.

1. Enunciare il Teorema (Formula) di Grassmann.
2. In $V = \mathbb{R}^{10}$, si considerino due sottospazi vettoriali U e W, entrambi di dimensione 8. Giustificando la risposta, stabilire quali sono le possibili dimensioni per il sottospazio $U \cap W$.

Svolgimento:

Esame di Geometria - 9 CFU (Appello del 9 settembre 2014 - A)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, si considerino le rette

$$s_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 \\ z = 3t \end{cases} , \quad s_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t' \\ z = 0 \end{cases} .$$

1. Stabilire la mutua posizione delle due rette.
2. Determinare equazioni per la retta r passante per $P = (0, 1, 2)$ e ortogonale a s_1 e s_2.

Svolgimento:

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4$, si consideri il sottospazio W generato dai vettori

$$w_1 = (2, 1, 0, 1)^T, \quad w_2 = (-1, 2, 1, 3)^T, \quad w_3 = (-4, 3, 2, 5)^T.$$

1. Calcolare la dimensione di W e determinare una base di W.
2. Trovare una base ortonormale di W, rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare una base per il nucleo e una base per l'immagine di L.
2. Stabilire se il vettore $(1, 0, 2)^T$ appartiene all'immagine di L.

Svolgimento:

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale e sia $T : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare.

1. Scrivere la definizione di autovalore, di autovettore e di autospazio di T.

2. Dimostrare che, se A è una matrice $n \times n$, allora $\lambda = 0$ è un autovalore di A se e solo se $\det A = 0$.

Svolgimento:

Esame di Geometria - 9 CFU (Appello del 23 settembre 2014 - A)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, si considerino i piani

$$\alpha: \ 2x + hy - 2z + 2 = 0, \qquad \beta: \ y + z + 1 = 0.$$

1. Determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali α è parallelo a β.
2. Determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali α è ortogonale a β.
3. Determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali α contiene una retta con vettore di direzione $A = (0, -2, 2)$.

Svolgimento:

Esercizio 2. Siano $\mathcal{B} = ((-1,0),(2,3))$ e $\mathcal{B}' = ((0,-1),(3,2))$ due basi di $\mathbb{R}^2$ e sia $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$.

1. Calcolare la matrice del cambiamento di base $M(\mathcal{B},\mathcal{C})$.
2. Calcolare la matrice del cambiamento di base $M(\mathcal{B},\mathcal{B}')$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Si consideri l'operatore $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definito dalla matrice

$$A = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di T, al variare del parametro $m \in \mathbb{R}$.
2. Stabilire per quali valori del parametro $m \in \mathbb{R}$ la matrice A è ortogonale.
3. Stabilire per quali valori del parametro $m \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile.

Svolgimento:

Esercizio 4. Sia $(V, \langle\,,\rangle)$ uno spazio euclideo reale, e sia W un sottospazio vettoriale di V.

1. Dare la definizione di $W^{\perp}$.
2. Se $V = \mathbb{R}^3$, munito del prodotto scalare standard, e $W = ((-1,-1,-2),(-1,0,2))$, determinare una base di $W^{\perp}$.

Svolgimento: