Esame di Geometria - 9 CFU (Appello del 20 Giugno 2012 - A)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Siano dati, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, i piani:

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \ x - 2y + 2z = 2, \\ \pi_2 &: \ z = 5, \\ \pi_3 &: \ kx - y = 3. \end{aligned}$$

1. Determinare i valori di k per cui $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 \neq \emptyset$.
2. Determinare, se possibile, una retta passate per l'origine e ortogonale a π_1 e π_2.

Svolgimento:

Esercizio 2. Siano

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. È possibile scrivere ogni matrice in $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ come combinazione lineare di A_1, A_2, A_3? Giustificare la risposta.

2. Stabilire se A_1, A_2, A_3 sono linearmente indipendenti.

Svolgimento:

Esercizio 3. Siano $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2\pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ due basi ordinate di $\mathbb{R}^2$. Sia $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi x \\ 2x - y \end{pmatrix}.$$

1. Determinare $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ e $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.
2. Determinare $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L)$ e $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(L)$.

Svolgimento:

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{K}), \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R},\ \text{o } \mathbb{K} = \mathbb{C}).$$

1. Discutere, nei due casi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la possibilità o meno di diagonalizzare A. In caso affermativo, diagonalizzare la matrice A.
2. Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, stabilire se le colonne di A formano una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$.

Svolgimento:

Esame di Geometria - 9 CFU (Appello del 20 Giugno 2012 - B)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Siano dati, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, i piani:

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \ z = 5, \\ \pi_2 &: \ x - 2y + 2z = 2, \\ \pi_3 &: \ kx - y = 3. \end{aligned}$$

1. Determinare i valori di k per cui $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 \neq \emptyset$.
2. Determinare, se possibile, una retta passate per l'origine e ortogonale a π_1 e π_2.

Svolgimento:

Esercizio 2. Siano

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. È possibile scrivere ogni matrice in $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ come combinazione lineare di A_1, A_2, A_3? Giustificare la risposta.

2. Stabilire se A_1, A_2, A_3 sono linearmente indipendenti.

Svolgimento:

Esercizio 3. Siano $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2\pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ due basi ordinate di $\mathbb{R}^2$. Sia $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi x \\ 2x + y \end{pmatrix}.$$

1. Determinare $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ e $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.
2. Determinare $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L)$ e $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(L)$.

Svolgimento:

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{K}), \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R},\ \text{o}\ \mathbb{K} = \mathbb{C}).$$

1. Discutere, nei due casi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la possibilità o meno di diagonalizzare A. In caso affermativo, diagonalizzare la matrice A.
2. Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, stabilire se le colonne di A formano una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$.

Svolgimento:

Esame di Geometria - 9 CFU (Appello del 12 Luglio 2012 - A)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Siano dati il punto $P = (2, 1, 2)$ e la retta r di equazioni

$$\begin{cases} x - y + z = 2, \\ x - 4 = 0. \end{cases}$$

1. Determinare un'equazione cartesiana per il piano π contenente r e P.
2. Determinare un'equazione parametrica per la retta passante per P e parallela a r.

Svolgimento:

Esercizio 2. Siano dati i sottospazi

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 0,\ 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0\}, \\ W_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_2 + 6x_3 - 9x_4 - 9x_5 = 0\}. \end{aligned}$$

1. Determinare una base e la dimensione di $W_1 \cap W_2$.
2. Determinare una base e la dimensione di $W_1 + W_2$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Si consideri il prodotto scalare g di $\mathbb{R}^2$, rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

1. Calcolare $g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$.
2. Determinare lo spazio ortogonale al sottospazio $W = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3x_1 = 2x_2\}$, rispetto al prodotto scalare g.

Svolgimento:

Esercizio 4. Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R},$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, presa come base di partenza e di arrivo.

1. Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, una base per ogni autospazio di L.
2. Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione L è diagonalizzabile.

Svolgimento:

Esame di Geometria - 9 CFU (Appello del 12 Luglio 2012 - B)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Siano dati il punto $P = (2, 1, 2)$ e la retta r di equazioni

$$\begin{cases} y - z = 2, \\ x - 4 = 0. \end{cases}$$

1. Determinare un'equazione cartesiana per il piano π contenente r e P.
2. Determinare un'equazione parametrica per la retta passante per P e parallela a r.

Svolgimento:

Esercizio 2. Siano dati i sottospazi

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_2 + 6x_3 - 9x_4 - 9x_5 = 0\}, \\ W_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 0,\ 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0\}. \end{aligned}$$

1. Determinare una base e la dimensione di $W_1 \cap W_2$.
2. Determinare una base e la dimensione di $W_1 + W_2$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Si consideri il prodotto scalare g di $\mathbb{R}^2$, rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

1. Calcolare $g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.
2. Determinare lo spazio ortogonale al sottospazio $W = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3x_1 = 2x_2\}$, rispetto al prodotto scalare g.

Svolgimento:

Esercizio 4. Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R},$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, presa come base di partenza e di arrivo.

1. Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, una base per ogni autospazio di L.
2. Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione L è diagonalizzabile.

Svolgimento:

Esame di Geometria - 9 CFU (Appello del 17 settembre 2012 - A)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, si considerino le rette

$$s_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 \\ z = 3t \end{cases} , \quad s_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t' \\ z = 0 \end{cases} .$$

1. Specificare la posizione rispettiva delle due rette.
2. Determinare equazioni cartesiane della retta r passante per $P = (0, 1, 2)$ e incidente s_1 e s_2.

Svolgimento:

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4$, si considerino i vettori

$$w_1 = (2,1,0,1)^T, \quad w_2 = (-1,2,1,3)^T, \quad w_3 = (-4,3,2,5)^T.$$

1. Scrivere un sistema di equazioni cartesiane per il sottospazio W generato da w_1, w_2, w_3.
2. Trovare una base per lo spazio ortogonale a W, rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.

Svolgimento:

Esercizio 3. Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \end{bmatrix},$$

1. Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e in tal caso trovare una matrice invertibile P e una matrice diagonale D, tali che $A = PDP^{-1}$.

2. Calcolare la potenza A^{17}.

Svolgimento:

Esercizio 4. Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare una base per il nucleo e una base per l'immagine di L.
2. Stabilire se il vettore $(1, 0, 2)^T$ appartiene all'immagine di L.
3. Calcolare la controimmagine tramite L del vettore $(0, 2, 2)^T$.

Svolgimento: