Esame di "Geometria 1" - 9 CFU (Appello del 16 settembre 2019)

Cognome:	Nome:					
Nr.matricola:	Corso di laurea:					

Esercizio 1. Si consideri la retta

$$r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - 2z = -1 \end{cases} .$$

1. Determinare un'equazione cartesiana per il piano π ortogonale ad r e passante per $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$;
2. Determinare equazioni cartesiane per la retta s passante per $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, parallela al piano $x - y = 1$ ed incidente all'asse delle y.

Svolgimento:

Esercizio 2. Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$W = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}\right), \qquad U := \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

1. Determinare equazioni cartesiane di W.
2. Determinare la dimensione e una base di U.

Svolgimento:

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ così definita:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

1. Calcolare la dimensione del nucleo di T e stabilire se l'applicazione è iniettiva.
2. Stabilire, giustificando la risposta, se T è diagonalizzabile.

Svolgimento:

Esercizio 4. Siano $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$, $\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ due basi di $\mathbb{R}^3$.

1. Scrivere la definizione di coordinate di un vettore di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
2. Calcolare le coordinate del vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
3. Calcolare la matrice di cambiamento di base $M(\mathcal{B}', \mathcal{B})$.

Svolgimento: