CAPITOLO VI

1. Sezioni normali e curvatura normale

Definizione 1.1. *La* retta normale *ad una superfice in un suo punto, o più brevemente* la normale*, è la perpendicolare, condotta per il punto, al piano tangente alla superfice.*

Un versore normale *alla superfice in un suo punto P è un vettore di lunghezza 1 che ha la stessa direzione della normale. Esistono due versori normali in P, uno opposto all'altro;* fissare un versore normale in P *significa scegliere uno dei due.*

Esempio 1.2. Se la superfice $\mathcal{S}$ è una sfera, il piano tangente, in un punto P, è il piano π, per quel punto P, perpendicolare al raggio. Dunque la normale n_P alla sfera in un punto P è la retta che congiunge P al centro della sfera. Il versore normale $\vec{n}_P$ potrà essere diretto verso l'interno della sfera oppure verso l'esterno. In Fig. 1 sono rappresentate le due possibilità. Una situazione analoga si presenta

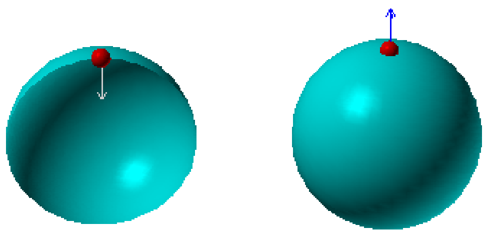

Figure 1

per ogni superfice.

Un versore normale $\vec{n}_P$ in un punto P di una superfice, possiamo pensarlo come uno stecchino conficcato nella superfice esattamente nel punto P. Appoggiamo la lama di un coltello allo stecchino e tagliamo la superfice. Possiamo ruotare la lama del coltello, lasciandola aderente allo stecchino, ottenendo così fette di forma diversa. Al momento del taglio il filo della lama corre lungo una retta tangente alla superfice nel punto; questa retta determina completamente la forma della fetta. Fuor di metafora diamo la seguente definizione:

Definizione 1.3. *Una* sezione normale *di una superfice in un suo punto è una curva ottenuta sezionando la superfice con un piano passante per la retta normale alla superfice.*

Tale piano taglia sul piano tangente una retta tangente nel punto e viceversa ogni retta tangente determina un piano passante per la normale.

Dunque ad ogni retta tangente t in P corrisponde una sezione normale $\mathcal{C}_t$, tagliata sulla superfice dal piano che passa per t e per la normale n_P.

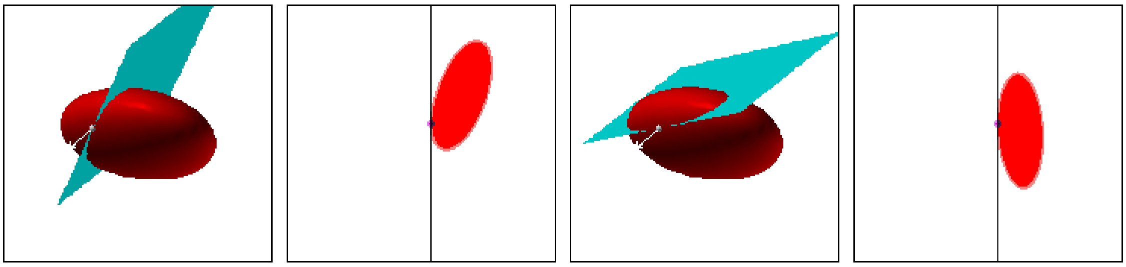

Figure 2. Apri il file fv

In Fig. fv 2 vediamo due sezioni normali di un ellissoide; entrambi i piani secanti contengono il versore normale (in bianco in figura). Nelle immagini di destra il piano secante: è evidenziata la sezione normale (la "fetta") e la retta tangente tagliata dal piano secante sul piano tangente; come dovrebbe essere ovvio, tale rette è tangente alla sezione normale.

Definizione 1.4. *Sia fissato un versore normale $\vec{n}_P$ e sia t una retta tangente alla superfice $\mathcal{S}$ nel punto P. Essa determina una sezione normale $\mathcal{C}_t$. Indichiamo con k_t la curvatura di questa curva nel punto P.*

Come sappiamo, se $k_t \neq 0$, allora la curva $\mathcal{C}_t$ presenta una concavità. Conveniamo di assegnare segno positivo alla curvatura se la concavità è rivolta verso il versore $\vec{n}_P$, segno negativo in caso contrario.

La curvatura k_t così definita si chiama curvatura normale nella direzione *t.*

2. Classificazione dei punti di una superfice

La convenzione circa la curvatura normale ora stabilita è piuttosto precaria, perché dipende dal verso di $\vec{n}_P$ che è scelto arbitrariamente. Non ha molta importanza, come vedremo quello che interessa è poter distinguere i due casi, non quale sia positivo e quale negativo.

Ora stabiliamo una certa nomenclatura, poi ci preoccuperemo di commentarla con esempi.

Definizione 2.1. *In un punto P di una superfice, fissiamo un versore normale $\vec{n}_P$. Per ogni retta tangente t alla superfice in P, consideriamo la curvatura normale k_t.*

- *Se la curvatura k_t è > 0 per tutte le direzioni tangenti t, oppure è < 0 per tutte le direzioni tangenti t, il punto P si dice* ellittico.
- *Se la curvatura k_t, al variare della direzione t, assume valori sia positivi che negativi, il punto P si dice* iperbolico.
- *Se la curvatura k_t è nulla per ogni direzione t, allora il punto P si dice* planare.

Resta un ultimo caso da considerare:

- *Se la curvatura k_t è nulla per almeno una direzione t, ma assume solo valori ≥ 0 oppure ≤ 0, allora il punto si dice* parabolico.

Inoltre un punto P è un ombelico *se la curvatura k_t è una costante che non dipende dalla direzione. Ne viene che i punti planari sono ombelichi con curvatura normale nulla, mentre ogni altro ombelico è un punto ellittico.*

2.1. **Punti ellittici.**

E1 **Esercizio 2.2.** *Spiegare perché tutti i punti di un ellissoide sono ellittici.*

<u>Soluzione</u>. Fissiamo un punto P dell'ellissoide $\mathcal{E}$. Tutte le sezioni normali (alla superfice) in P sono ellissi (infatti, come sappiamo, tutte le sezioni piane, anche quelle non normali, di un ellissoide sono ellissi). Un'ellisse ha curvatura $\neq 0$ in ogni punto (cfr. Esempio 9.7 del Cap.V). Dunque le curvature normali k_t in P sono tutte non nulle. A titolo d'esempio, nel caso della Fig. fv 2 tutte le sezioni hanno la concavità rivolta verso l'interno dell'ellissoide, mentre il versore $\vec{n}_P$ è diretto esternamente. Vuol dire che la curvatura normale k_t di tutte queste sezioni è < 0. Se avessimo scelto diversamente il verso di $\vec{n}_P$ il risultato sarebbe opposto. Dunque P è ellittico.

Diamo un'interpretazione geometrica dei punti ellittici.

E2 **Proposizione 2.3.** *Se P è un punto ellittico della superfice $\mathcal{S}$, allora e il piano tangente lascia una porzione di superfice vicina a P tutta dalla stessa parte e la tocca solo in P stesso.*

Non possiamo dare qui una dimostrazione. Il risultato è credibile infatti, fissata una qualunque direzione t tangente alla superfice in P, la corrispondente sezione normale $\mathcal{C}_t$ ha curvatura normale $k_t \neq 0$; perciò esiste un piccolo arco della curva $\mathcal{C}_t$, vicino a P, che giace dalla stessa parte del piano tangente e lo tocca solo nel punto P. Inotre, poiché il segno di k_t non dipende da t, la concavità di tutte le sezioni normali è rivolta dalla stessa parte. Quindi tutti questio piccoli archi stanno dalla stessa parte del piano tangente e messi insieme formano il pezzettino di superfice vicino a P che cercavamo. Proprio in quest'ultimo argomento c'è una difficoltà su cui torneremo.

L'affermazione inversa è falsa, vale a dire è possibile che il piano tangente in P alla superfice $\mathcal{S}$ lasci tutta da una parte una piccola porzione di superfice vicina a P, in modo tale che P sia l'unico punto comune al piano e a questa porzione di superfice, e tuttavia il punto non sia ellittico.

Esercizio 2.4. *Dare un esempio di una superfice $\mathcal{S}$ che possiede un punto P con le seguenti proprietà:*

- *il piano tangente in P lascia la superfice tutta da una parte*
- *il punto P non è ellittico.*

<u>Soluzione</u>. Come sappiamo la quartica $\mathcal{Q}$ di equazione $y = x^4$ ha curvatura nulla

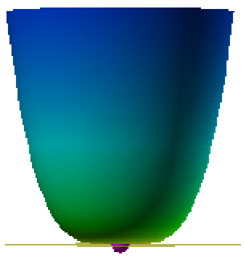

FIGURE 3. Apri il file fz

nell'origine. L'asse dell'ascisse è la retta tangente nell'origine e tutta la curva (salvo l'origine) è nel semipiano sopra l'asse dell'ascisse. Ruotando la quartica $\mathcal{Q}$ attorno all'asse delle ordinate otteniamo una superfice di rotazione $\mathcal{S}$ (vedi Fig. 3) che si trova tutta dalla stessa parte del piano tangente nell'origine, ma tutte le curvature normali nell'origine sono nulle.

Completiamo per il momento gi esempi di superfici con punti ellittici con i due esercizi seguenti:

Esercizio 2.5. *Spiegare perché tutti i punti di paraboloide ellittico sono ellittici.*

N.B. Come vedremo esiste anche un paraboloide iperbolico, i cui punti sono tutti iperbolici. Questo spiega il nome. Poiché di ellissoidi ne esistono solo di un tipo, non si parla di ellissoide ellittico, ma si dice semplicemente ellissoide.
Soluzione. L'argomento è lo stesso dell'esercizio precedente. L'unica differenza è questa: le sezioni di un paraboloide ellittico sono ellissi o parabole e anche quest'ultime hanno in tutti i punti curvatura $\neq 0$ (cfr. Esercizio 9.3 del cap. V).

Esercizio 2.6. *Spiegare perché tutti i punti di iperboloide ellittico sono ellittici* (da cui il nome).

Soluzione. L'argomento è lo stesso dell'esercizio precedente. L'unica differenza è questa: le sezioni di un iperboloide ellittico sono ellissi, parabole o iperboli e anche quest'ultime hanno in tutti i punti curvatura $\neq 0$ (lo si può controllare ragionando in modo analogo all'Esercizio 9.3 del cap. V).

2.2. **Punti iperbolici.** Vediamo un esempio di punto iperbolico:

E21 **Esempio 2.7.** Prendiamo come in Fig. 4 un punto P su un iperbolide iperbolico, scegliamo il versore $\vec{n}_P$ e guardiamo le sezioni normali (Fig. 4). Evidentemente

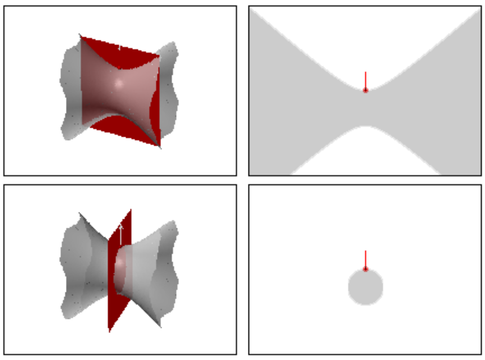

FIGURE 4. Apri il file fw

ce ne sono con la concavità rivolta verso il versore tangente $\vec{n}_P$ e altre in senso opposto. Questo significa che la curvatura delle sezioni, con la convenzione che abbiamo stabilito, cambia di segno! E questo accade qualunque sia il verso che abbiamo scelto per il versore normale. Dunque si tratta di un punto iperbolico.

Osserviamo che il punto in figura è stato scelto con cura: per evidenti ragioni di simmetria il piano tangente è orizzontale e quindi le sezioni in figura sono sezioni normali. Resta il problema di stabilire se tutti i punti di un iperboloide iperbolico sono iperbolici.

E3 **Proposizione 2.8.** *Se P è un punto iperbolico della superfice $\mathcal{S}$, allora il piano tangente taglia la superfice vicino a P.*

Anche questo risultato appare ragionevole, infatti, poiché il punto è iperbolico, esistono sezioni normali con curvatura di segno opposto. Dunque piccoli archi di queste sono disposti da parti opposte del piano tangente che necessariamente deve tagliare la superfice.

E5 **Esercizio 2.9.** *Mostrare un esempio di superfice $\mathcal{S}$ che possiede un punto P con le seguenti proprietà:*
- *il piano tangente in P taglia la superfice*
- *tutte le curvature normali sono nulle*

Soluzione. La superfice in Fig. 5 ha nel punto P, evidenziato con una pallina, piano

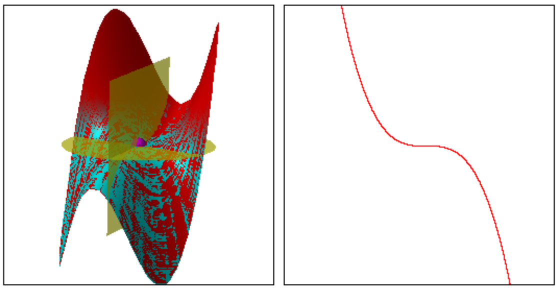

FIGURE 5. Apri il file gb

tangente orizzontale che taglia la superfice lungo una retta e tutte le altre sezioni normali sono curve che hanno un flesso nel punto P, quindi curvatura nulla.

2.3. **Punti parabolici.** Concludiamo queste esemplificazioni con l'esempio di una superfice i cui punti sono tutti parabolici.

Esercizio 2.10. *Dare un esempio di superfice i cui punti sono tutti parabolici.*

Soluzione. Si consideri un cilindro circolare retto. Il piano tangente in un suo qualunque punto P lascia la superfice tutta da una parte (è del tutto evidente: immaginiamo di appoggiare un cilindro sul tavolo come per farlo rotolare, il piano del tavolo è il piano tangente). Quindi (per la Proposizione 2.8) certamente P non è iperbolico, dunque tutte le curvature normali in P sono ≤ 0 oppure tutte ≥ 0. La retta, generatrice del cilindro, che appoggia sul piano è una sezione normale del cilindro e ha curvatura nulla. Resta il dubbio che il punto possa essere planare (cioè che tutte le curvature normali sinao nulle), ma la circonferenza che si ottiene segando il cilindro con il piano perpendicolare alla generatrice (tagliandolo come un salame) ha curvatura non nulla. Dunque il punto è parabolico.

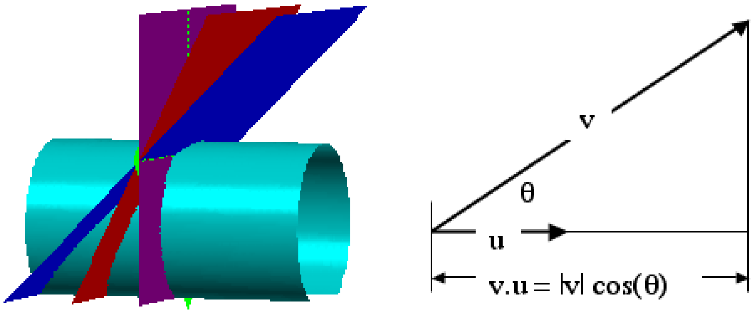

FIGURE 6. a - b fw.A

3. CURVATURA NORMALE DI UNA SEZIONE PIANA QUALUNQUE

Possiamo tagliare un salame in tanti modi diversi pur tenendo il filo della lama sempre nella stessa direzione: è sufficiente cambiare l'inclinazione della lama (vedi Fig. 6a) .

Fuor di metafora fissiamo una retta tangente t alla superfice $\mathcal{S}$ nel punto P e consideriamo i piani α del fascio di asse t. Ciascuno di questi piani taglia sulla superfice una sezione $\mathcal{C}$, ma solo uno di essi passa anche per la retta n_P normale alla superfice in P e solo esso taglia la sezione normale $\mathcal{C}_t$. Vogliamo stabilire una relazione tra la curvatura normale k_t, curvatura della sezione $\mathcal{C}_t$, e la curvatura $K_{\mathcal{C}}$ in P di una qualunque delle altre sezioni che stiamo considerando.

A questo scopo ricordiamo che dato un vettore $\vec{v}$ ed un versore $\vec{u}$, la componente del vettore $\vec{v}$ sul versore $\vec{u}$ è il prodotto scalare $\vec{v}.\vec{u} = |v||u|cos(\theta) = |v|cos(\theta)$ (vedi Fig. 6b) dove θ è l'angolo formato dai due vettori. Allora

E4 **Proposizione 3.1.** *Fissata una retta tangente t ad una superfice $\mathcal{S}$ in un punto P, preso un piano passante per t, sia $\mathcal{C}$ la sezione da esso determinata, $K_{\mathcal{C}}$ la sua curvatura, $\vec{N}$ il versore normale a $\mathcal{C}$ nel punto P (orientato verso la conavità della curva).*

Allora la curvatura normale k_t è la componente del vettore $K_{\mathcal{C}}\vec{N}$ sul versore normale $\vec{n}_P$; in formule:

$$k_t = K_{\mathcal{C}}\vec{N}.\vec{n}_P = K_{\mathcal{C}}cos(\theta).$$

Vediamo un'applicazione di questo risultato.

Osservazione 3.2. *Curvatura normale di meridiani e paralleli.*

Consideriamo la superfice generata dalla curva piana $\mathcal{C}$ attorno ad un asse a ad essa complanare (vedi Fig. 7) . Per un certo punto P della superfice passano un meridiano e un parallelo; alle loro tangenti in P corrispondono due curvature normali k_m, k_p che per brevità chiamiamo curvatura normale del meridiano e del parallelo[1].

[1]Ma si osservi che è una locuzione impropria perché, come vedremo, il parallelo non è in generale una sezione normale

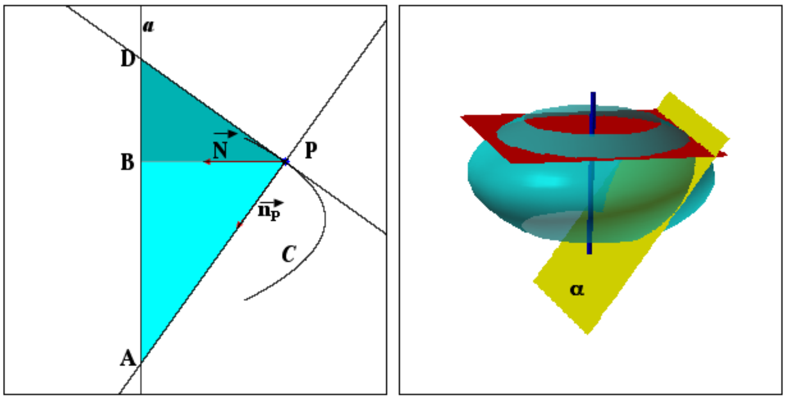

FIGURE 7. a - b

fw.B

Proposizione 3.3. *In un punto P di una superfice di rotazione la curvatura normale k_m del meridiano è, a meno del segno, la curvatura del meridiano. La curvatura normale k_p del parallelo è data dalla formula*

$$k_p = \frac{cos(\theta)}{d}$$

dove θ è l'angolo formato dalla tangente al meridiano con l'asse di rotazione e d è la distanza di P dall'asse di rotazione.

Dimostrazione. Il piano che contiene il meridiano (cioè il piano la cui sezione è rappresentata in Fig. 7a) è perpendicolare al parallelo (cioè alla tangente al parallelo). Dunque la normale n_P alla superfice giace su questo piano. Pertanto il meridiano stesso è una sezione normale; perciò la curvatura normale k_m è la curvatura del meridiano, cioè della generatrice $\mathcal{C}$ nel punto P (a meno del segno che dipende dalla scelta del versore normale $\vec{n}_P$. Nel caso in figura, la concavità della generatrice è rivolta dalla stessa parte del versore $\vec{n}_P$, quindi $k_m > 0$.)

Per calcolare k_p dobbiamo considerare il piano α che passa per la normale e per la tangente al parallelo. La sezione da esso tagliata (la si vede in trasparenza in Fig. 7b) è difficile da determinarsi, conviene dunque usare la Proposizione 3.1. Il parallelo $\mathcal{H}$ è tagliato sulla superfice da un piano orizzontale che passa (ovviamente) per la tangente al parallelo, quindi, per la Proposizione 3.1:

$$k_p = (K_{\mathcal{H}}\vec{N}).\vec{n}_P.$$

La curvatura $K_{\mathcal{H}}$ è la curvatura del parallelo $\mathcal{H}$, cioè

$$K_{\mathcal{H}} = \frac{1}{d}$$

dove d è il raggio del parallelo, cioè la distanza di P dall'asse di rotazione. Mentre i versori $\vec{N}$ e $\vec{n}_P$ sono rappresentati in Fig. 7a e detto θ l'angolo da essi formato

$$\vec{N}.\vec{n}_P = cos(\theta).$$

Pertanto

$$k_p = \frac{cos(\theta)}{d}.$$

Per concludere osserviamo che i triangoli PAB e PAD sono rettangoli e con un angolo in comune (quello in A), dunque sono simili. Pertanto l'angolo θ formato dai due versori è uguale all'angolo $P\hat{D}B$ tra tangente al meridiano e asse di rotazione. Questo prova la tesi. $\square$

Osservazione 3.4. Possiamo esprimere l'ultima formula in modo più suggestivo. Osserviamo che (vedi Fig. 7a) nel triangolo PAB riesce $|PA|cos(\theta) = |PB| = d$ e quindi
$$\frac{cos(\theta)}{d} = \frac{1}{|PA|}.$$
Ma quest'ultima quantità è la curvatura di una circonferenza di raggio $|PA|$, dunque *la curvatura del parallelo è la curvatura di una circonferenza passante per P con centro nel punto A in cui asse di rotazione e normale alla superfice si incontrano.*

Diamo un'altra interpretazione della Proposizione 3.1. Un punto che percorre a velocità unitaria una sezione piana $\mathcal{C}$ di una superfice $\mathcal{S}$ è sottoposto ad un'accelerazione $K_{\mathcal{C}}\vec{N}$. In ogni punto P della curva la curvatura normale k_t nella direzione t tangente alla curva, rappresenta la componente dell'accelerazione diretta perpendicolarmente alla superfice.

4

Esempio 4.1. *Mostrare che tutti i punti di un iperboloide iperbolico sono iperbolici.*

<u>Soluzione</u>. Sia P un punto di un iperboloide iperbolico. Come sappiamo il piano tangente taglia l'iperbolide lungo due rette, ma come abbiamo visto (cfr. Esercizio 2.9) il fatto che il piano tangente tagli la superfice non è sufficiente a concludere che il punto è iperbolico. Come risulta evidente dalla Fig. 8c'è un piano che taglia

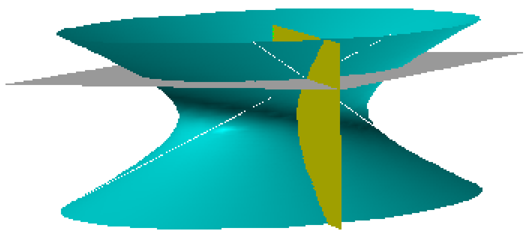

FIGURE 8

l'iperboloide lungo un'ellisse $\mathcal{E}$ e un altro piano che lo taglia lungo un'iperbole $\mathcal{I}$. Si osservi tuttavia che questi piani non sono necessariamente normali alla superfice. Poco importa.

Fissiamo il versore normale $\vec{n}_P$ per esempio verso l'esterno. Sia t la retta tangente per cui passa il piano (orizzontale) che taglia l'ellisse $\mathcal{E}$, sia $K_{\mathcal{E}}$ la curvatura dell'ellisse e sia $\vec{N}_{\mathcal{E}}$ il versore normale all'ellisse. Ora $\vec{N}_{\mathcal{E}}$ punta verso l'interno e qundi l'angolo θ tra i versori $\vec{N}_{\mathcal{E}}$ e $\vec{n}_P$ è ottuso, dunque
$$\vec{N}_{\mathcal{E}}.n_P = cos(\theta) < 0,$$
e perciò
$$k_t = (K_{\mathcal{E}}\vec{N}_{\mathcal{E}}).n_P < 0.$$
Sia t' la retta tangente per cui passa il piano (verticale) che taglia l'iperbole $\mathcal{I}$, sia $K_{\mathcal{I}}$ la curvatura dell'iperbole e sia $\vec{N}_{\mathcal{I}}$ il versore normale all'ipebole. Ora $\vec{N}_{\mathcal{I}}$ punta verso l'esterno e qundi l'angolo ϕ tra i versori $\vec{N}_{\mathcal{I}}$ e $\vec{n}_P$ è acuto, dunque
$$\vec{N}_{\mathcal{I}}.n_P = cos(\phi) > 0,$$

e perciò

$$k_{t'} = (K_{\mathcal{I}}\vec{N}_{\mathcal{I}}).n_P > 0.$$

Dunque abbiamo curvature normali $k_t < 0 < k_{t'}$ e questo dice che il punto è iperbolico.

Esempio 4.2. *Si chiama* toro *la superfice a ciambella ottenuta ruotando una circonferenza attorno ad un'asse ad essa complanare ma esterno (vedi Fig. 9)*

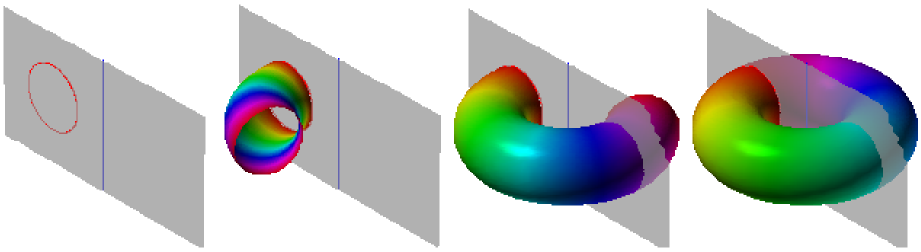

FIGURE 9. Apri il file gc

Una questione interessante è questa: fatta un buco in un toro è possibile rivoltarlo come un calzino? La risposta si vede in Fig. 10

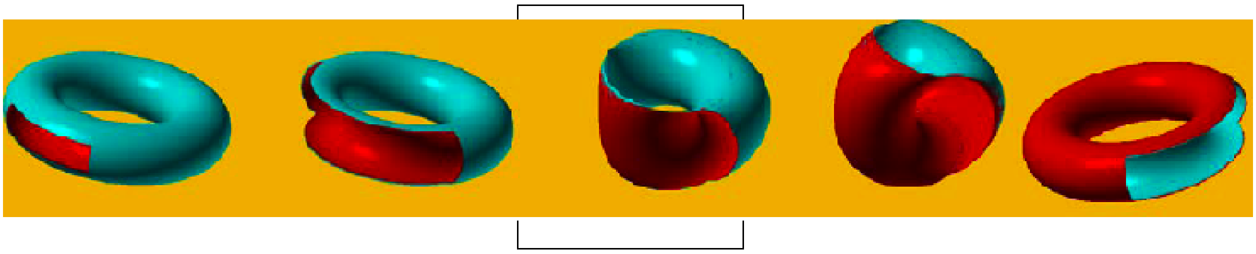

FIGURE 10. Apri il file gd

Esercizio 4.3. *Un toro appoggiato su un piano (come una ciambella) tocca il piano lungo una circonferenza. Mostrare che questa circonferenza è composta di punti parabolici.*

<u>Soluzione</u>. Sia P un punto della circonferenza, vedi Fig. 11. Il piano tangente

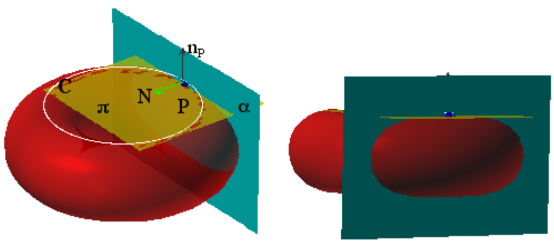

FIGURE 11 gf

contiene la circonferenza e il versore $\vec{n}_P$ è perpendicolare a tale piano. In particolare è perpendicolare al versore normale $\vec{N}$ alla circonferenza (che è puntato da P verso il centro della circonferenza stessa). Pertanto detta t la retta tangente alla circonferenza in P, vale

$$k_t = (K_{\mathcal{C}}\vec{N}).\vec{n}_P = 0.$$

Dunque c'è una curvatura normale in P che è nulla.

Dunque P non è ellittico. Certamente P non è iperbolico perché altrimenti ci sarebbero porzioni del toro da una parte e dall'altra del piano tangente. Per concludere che P è parabolico basta escludere che sia planare, cioè basta mostrare che esiste una sezione normale che ha curvatura non nulla. In effetti il piano perpendicolare alla retta t taglia sul toro una sezione normale che è una circonferenza e dunque la corrispondente curvatura normale è $\neq 0$.

Osservazione 4.4. Ritorniamo alla Proposizione 2.3 e in particolare sull'argomento che abbiamo usato per suggerirne una dimostrazione. Consideriamo il punto P del toro che abbiamo appena dimostrato essere parabolico. Risulta evidente che tutte le sezioni normali in P hanno in comune con il piano tangente solo il punto P, tuttavia non esiste nessuna porzione di superfice vicina a P che tocchi il piano tangente solo in P. In effetti per ciascuna sezione normale in P esiste un piccolo arco che sta tutto, tranne il punto P sotto il piano tangente; ma la lunghezza di questo arco dipende dalla sezione normale e l'insieme di questi archi non è sufficiente a formare un pezzetto di superfice vicino a P.

Questo dice che per dimostrare la Proposizione 2.3 bisogna sfruttare il fatto che tutte le sezioni normali hanno curvatura non nulla.

5

Sia P un punto di una superfice $\mathcal{S}$. Fissiamo un versore normale $\vec{n}_P$. Se la superfice è sufficientemente regolare, torneremo su questo aspetto, la funzione

$$t \mapsto k_t$$

che associa ad ogni retta tangente ad $\mathcal{S}$ in P la corrispondente curvatura normale è continua.

Il significato esatto di questa affermazione è il seguente. Fissiamo una retta tangente t_0 e per $\theta \in [0, \pi]$ indichiamo con $t(\theta)$ la retta tangente che forma con t_0 un angolo θ (in senso antiorario). Allora la funzione

$$[0, \pi] \ni \theta \mapsto k_{t(\theta)} \in \mathbb{R}$$

è continua.

Dunque tale funzione è costante, nel qual caso P è un ombelico, oppure esistono direzioni tangenti in cui questa funzione assume valori minimo e massimo. (Si noti che cambiando la scelta del versore normale $\vec{n}_P$ le direzioni diminimo diventano di massimo e viceversa). Tali direzioni si chiamano direzioni principali.

Vale questo importantissimo

E6 **Teorema 5.1.** *Le direzioni principali sono solo due: una di minimo e l'altra di massimo e sono perpendicolari tra loro. Inoltre se indichiamo con k_{min}, k_{max} i valori di minimo e di massimo (dette curvature principali) e contiamo gli angoli a partire dalla direzione di minimo vale:*

$$k_{t(\theta)} = k_{min}cos^2(\theta) + k_{max}sin^2(\theta).$$

In particolare questo dice: (i) che la curvatura normale in ogni direzione è determinata dai valori delle curvature nelle direzioni principali, (ii) che passando da una direzione di minimo ad una direzione di massimo la curvatura è strettamente crescente e (iii) che direzioni simmetriche rispetto alle curvature principali hanno la stessa curvatura normale.

Non possiamo dare una dimostrazione, ma vediamo di capire l'enunciato. L'affermazione (ii) segue dal fatto che dalla formula si ricava

$$\frac{dk_{t(\theta)}}{d\theta} = \big(k_{max} - k_{min}\big) sin(2\theta) > 0.$$

L'affermazione (iii) segue da

$$k_{t(\pi/2-\theta)} = k_{t(\pi/2+\theta)}.$$

Comunque possiamo sintetizzare in questo schema in cui sono marcate le direzioni

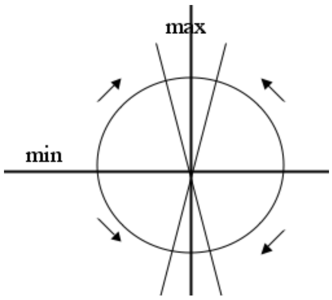

FIGURE 12

gg

principali, le frecce indicano in che verso di rotazione la curvatura normale cresce e le due rette meno marcate, simmetriche rispetto alle direzioni principali, hanno la stessa curvatura normale.

5.1. **Curvature principali in una superfice di rotazione.**

Teorema 5.2. *In un punto P di una superfice di rotazione le direzioni principali sono le tangenti al parallelo e al meridiano che passano per P.*

<u>Dimostrazione</u>. La prima affermazione si prova facilmente. Il piano passnate per l'asse e per P è un piano di simmetria per la superfice, quindi le direzioni tangenti in P e simmetriche rispetto al meridiano hanno la stessa curvatura normale. Dunque se una certa direzione t è di massimo, lo sarà anche la sua simmetrica t'. Ma per il teorema E6 5.1 esiste un'unica direzione di massimo, dunque $t = t'$, cioè t è tangente al meridiano oppure al parallelo. Lo stesso argomento vale per il minimo. □

Osservazione 5.3. *Siano k_{min}, k_{max} le curvature principali in un punto P di una superfice $\mathcal{S}$.*

- *P è* ellittico *se e solo se k_{min}, k_{max} sono entrambe positive o entrambe negative, cioè se e solo se*

$$k_{min}.k_{max} > 0.$$

- *P è* iperbolico *se e solo se k_{min}, k_{max} hanno segno opposto, cioè se e solo se*

$$k_{min}.k_{max} < 0.$$

• P è parabolico *se e solo se una tra* k_{min}, k_{max} *è nulla, ma non sono entrambe nulle cioè se e solo se*

$$k_{min}.k_{max} = 0,$$

ma non sono entrambe nulle.

• P è planare *se e solo se*

$$k_{min} = k_{max} = 0.$$

Esercizio 5.4. *Sia* $\mathcal{T}$ *un toro generato dalla rotazione di una circonferenza di raggio* r *intorno ad un asse che dista* R *dal centro della circonferenza. Determinare per ciascun punto del toro le curvature principali e stabilire se è ellittico, parabolico o iperbolico.*

Soluzione. Le curvature principali sono le curvature normali di meridiano e parallelo. La curvatura normale k_m del meridiano è a meno del segno la curvatura del meridiano stesso. Il meridiano è la circonferenza che genera il toro, quindi la sua curvatura è $1/r$. Si consideri la Fig. 13 , abbiamo scelto il versore normale $\vec{n}_P$

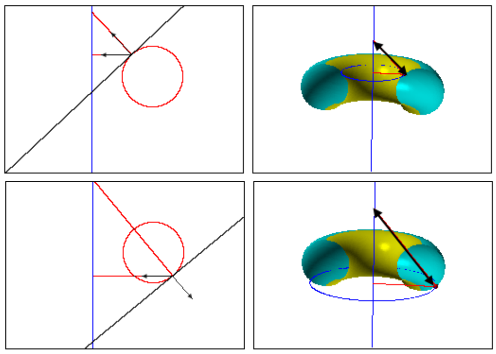

FIGURE 13 gh

esterno e quindi opposto alla concavità del meridiano, dunque:

$$k_m = -\frac{1}{r}.$$

La curvatura normale k_p del parallelo è la curvatura di una circonferenza che ha per raggio il segmento evidenziato in Fig. 13 a destra con la doppia freccia. Detta L la lunghezza di questo segmento risulta $k_p = \pm 1/L$. Il segno dipende dall'ampiezza dell'angolo formato dai versori normali $\vec{n}_P$ alla superfice e $\vec{N}$ al parallelo. Nella prima figura l'angolo è acuto, quindi $\vec{N}.\vec{n}_P > 0$ e

$$k_p = \frac{1}{L}.$$

Nella seconda figura l'angolo è ottuso, quindi $\vec{N}.\vec{n}_P < 0$ e

$$k_p = -\frac{1}{L}.$$

Morale se il punto si trova nella metà gialla $k_m < 0$ e $k_p > 0$ e il punto è iperbolico. Se si trova nellametà azzurra k_m e k_p sono entrambe negative e il punto è ellittico.

Infine al confine tra le due regioni il punto è parabolico, infatti la curvatura normale

$$k_p = \frac{cos(\theta)}{d}$$

dove d è la distanza dall'asse e θ è l'angolo tra tangente e asse; che in questo caso è retto, quindi $cos(\theta) = 0$.