CAPITOLO IV - IPERBOLE

1. La definzione di iperbole

Definizione 1.1. *Un'iperbole è la sezione di un cono circolare retto con un piano π che non passa per il vertice V del cono e forma con l'asse del cono un angolo inferiore a quello che le generatrici formano con lo stesso asse.*

Per meglio comprendere osserviamo che il piano α, parallelo a π e passante per il vertice V, taglia sul cono due generatrici (cfr. Fig. 1 e Cap. II, Proposizione 4.1).

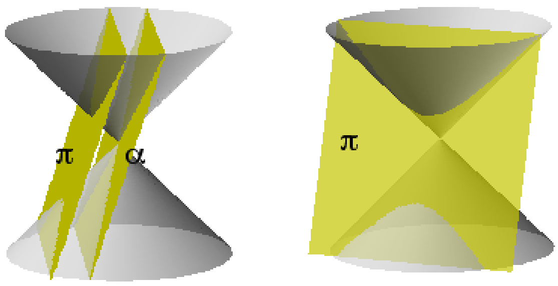

Figure 1

Con l'iperbole concludiamo lo studio delle sezioni piane di un cono circolare retto.

Osservazione 1.2. *Sia π il piano che taglia il cono di vertice V e sia θ l'angolo che le generatrici formano con l'asse s; abbiamo ottenuto la seguente classificazione:*

- *il piano π passa per il vertice e $\widehat{\pi s} > \theta$: la conica è degenere ed è un punto (il vertice);*
- *il piano π passa per il vertice e $\widehat{\pi s} = \theta$: la conica è degenere ed è una retta (una generatrice);*
- *il piano π passa per il vertice e $\widehat{\pi s} < \theta$: la conica è degenere ed è una coppia di rette incidenti (due generatrici che s'incontrano nel vertice);*
- *il piano π non passa per il vertice e $\widehat{\pi s} > \theta$: la conica è non degenere ed è un'ellisse;*
- *il piano π non passa per il vertice e $\widehat{\pi s} = \theta$: la conica è non degenere ed è una parabola;*
- *il piano π non passa per il vertice e $\widehat{\pi s} < \theta$: la conica è non degenere ed è un'perbole.*

2. Proprietà focali dell'iperbole

Così come per ellisse e parabola, determiniamo una proprietà di geometria piana con cui caratterizzare l'iperbole.

Teorema 2.1. *Sia H un'iperbole. Nel piano di H ci sono due punti, F ed F', detti fuochi, tali che H è il luogo dei punti del piano per i quali* il valore assoluto della differenza delle distanze dai fuochi è costante. *In altre parole esiste una costante $p > 0$, tale che un punto P del piano sta sulliperbole H se e solo se*

$$\big||PF| - |PF'|\big| = 2p.$$

N.B.. Come si vede dalla Fig. 1 l'iperbole è una curva formata da due archi o *rami* separati. Come vedremo se P sta su un ramo è più vicino al fuoco F che a F'; accade il contrario se P è sull'altro ramo. Dunque la differenza delle distanze $|PF'| - |PF|$ è positiva se P sta sul primo ramo, negativa se sta sul secondo. Il Teorema afferma che tali differenze sono costanti su ciascun ramo e uguali in valore assoluto.

Dimostrazione. L'iperbole H è sezione di un cono circolare retto con un piano π che non passa per il vertice V del cono e incontra entambe le falde. Inseriamo,

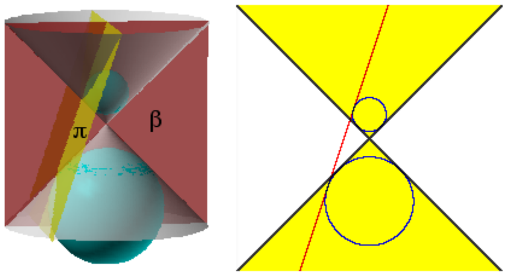

FIGURE 2. a - b

come in Fig. 2a, in ciascuna falda una sfera che sia tangente al cono e al piano π dell'iperbole (in Fig. 2b vediamo una sezione con un piano β passante per l'asse del cono e perpendicolare a π).

L'argomento della dimostrazione è analogo a quello già usato per l'ellisse: le sfere S ed S' sono tangenti al piano π nei punti F ed F' (i fuochi) e lungo due circonferenze C e C'. Preso un punto P dell'iperbole la generatrice passante per P taglia sulle circonferenze i punti Q e Q'.

I segmenti PF e PQ sono tangenti condotte per P alla sfera S e dunque

$$|PF| = |PQ|.$$

Analogamente si conclude

$$|PF'| = |PQ'|.$$

A differenza di quanto accade per l'ellisse il punto P è esterno al segmento QQ'; quindi, se P sta su un ramo dell'iperbole, $|PQ| + |QQ'| = |PQ'|$, cioè

$$|QQ'| = |PQ'| - |PQ|;$$

se sta sull'altro ramo i ruoli di Q e Q' si scambiano e vale:

$$|QQ'| = |PQ| - |PQ'|.$$

Dunque

$$|QQ'| = \big||PQ| - |PQ'|\big|.$$

Ovviamente $|QQ'|$ è una costante che non dipende da P. $\square$

Osservazione 2.2. *La differenza $2p$ tra le distanze di un punto dell'iperbole dai due fuochi è minore della distanza tra i fuochi, cioè*

$$2p < |FF'|.$$

Dimostrazione. In un triangolo la differenza delle lunghezze di due lati è maggiore del terzo lato. Basta applicare questa osservazione al triangolo PFF' per concludere che se P sta sull'iperbole, allora

$$2p = \big||PF| - |PF'|\big| \leq |FF'|.$$

$\square$

3. Costruzione dell'iperbole con riga e compasso

La proprietà enunciata nel Teorema 2.1 consente di disegnare effettivamente un'iperbole. Vediamo come si fa.

3.1. **Metodo di costruzione.** *Siano assegnati i fuochi F e F' e la differenza $2p$ delle distanze da essi.*

(i) Con centro F tracciamo la circonferenza di raggio $2p$ (segui guardando la Fig. 3).

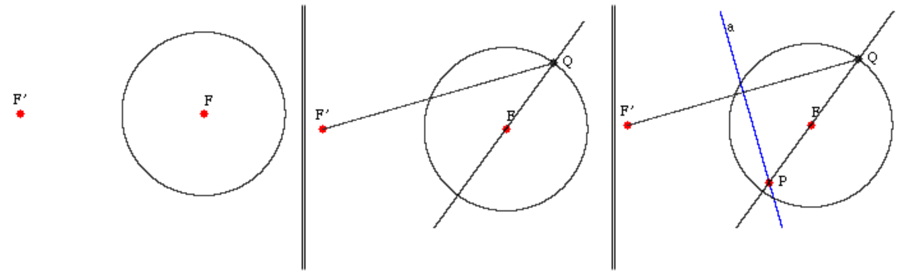

Figure 3. Apri il file

(ii) Preso un qualunque punto Q di essa, l'asse a del segmento $F'Q$ taglia la retta FQ in un punto P che sta sull'iperbole.

Dimostrazione. Si tratta di giustificare la costruzione. Osserviamo che per costruzione $|FQ| = 2p$. Inoltre poiché P è sull'asse a del segmento $F'Q$, il triangolo PQF' è isoscele e

$$|PF'| = |PQ| = |PF| + |FQ| = |PF| + 2p.$$

Perci $|PF'| - |PF| = 2p$ cioè P sta sull'iperbole. $\square$

Si noti che la procedure illustrata è identica a quella utilizzata in Cap.II, Proposizione 5.4 per l'ellisse. L'unica differenza è che, essendo $2p < |FF'|$, qui i fuochi sono uno interno e l'altro esterno alla circonferenza.

Esercizio 3.1. *Siano assegnati i fuochi F e F' e la differenza $2p$ delle distanze da essi. Disegnare alcuni punti dell'iperbole con il metodo appena visto e poi, con la guida di questi punti, tracciare l'iperbole a mano libera.*

4. Asintoti, assi di simmetria, vertici

4.1. **Gli asintoti.** Come si vede dal filmato della Fig. 3 compaiono due misteriose rette e inoltre il punto che descrive l'iperbole scompare fuori dalla figura lungo un ramo dell'iperbole per poi riapparire sull'altro. Cerchiamo di spiegare questi due fenomeni.

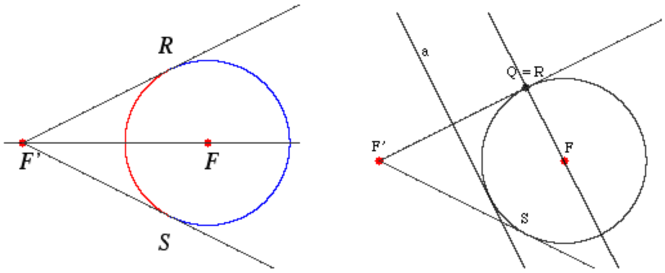

Figure 4. a - b

Conduciamo dal fuoco F' le tangenti alla circonferenza di centro F; siano R ed S i punti di tangenza. Come si vede dalla Fig. 4b, se Q coincide con R, l'asse a del segmento $F'Q$ è parallelo alla retta FQ. Analogamente quando Q coincide con S si comprende (per ragioni di simmetria anche se non è rappresentato in figura) che accade un fenomeno analogo. Dunque ai punti R ed S non corrisponde nessun punto dell'iperbole.

Seguiamo nella sequenza d'immagini di Fig. 5 che cosa accade:

(a) i punti Q e P sono allineati ai fuochi e il punto Q si muoverà in senso antiorario;

(b) il punto Q ha percorso poco più di un quarto di giro e il punto P ha percorso un tratto del ramo di destra dell'iperbole;

(c) ormai $Q = R$ e l'asse r del segmento $F'Q$ è parallelo alla retta FQ: il punto P è scomparso in basso lungo il ramo di destra nella direzione di r;

(d) Q ha superato R e il punto P è riapparso in alto sul ramo di sinistra;

(e) P si sta allontanando verso il basso sul ramo di sinistra;

(f) Q coincide con S, l'asse r' del segmento $F'Q$ è parallelo a FQ e P è scomparso nella direzione di r';

(g) Q sta per completare il giro e P ricompare in alto a destra.

In conclusione le due rette misteriose si chiamano *asintoti* e hanno questa proprietà: essi rappresentano le direzioni verso cui si allontana un punto che percorre l'iperbole.

5. Assi di simmetria, vertici e loro legame con fuochi e asintoti

Una volta che siano dati i fuochi F e F' e la costante $2p$, con $2p < |FF'|$, l'iperbole è assegnata. Evidentemente la retta che unisce i fuochi e l'asse del segmento FF' sono rette simmetriche rispetto al dato geometrico (cioè ai fuochi); pertanto se P è un punto dell'iperbole per simmetria ci procuriamo altri tre punti dell'iperbole (cfr. Fig. 6a). Pertanto: *la retta che congiunge i fuochi e l'asse del segmento FF' sono assi di simmetria dell'iperbole;* essi si incontrano nel punto medio M del segmento FF' che *è centro di simmetria*. I punti in cui i rami dell'iperbole tagliano l'asse focale si chiamano *vertici* (cfr. Fig. 6b)

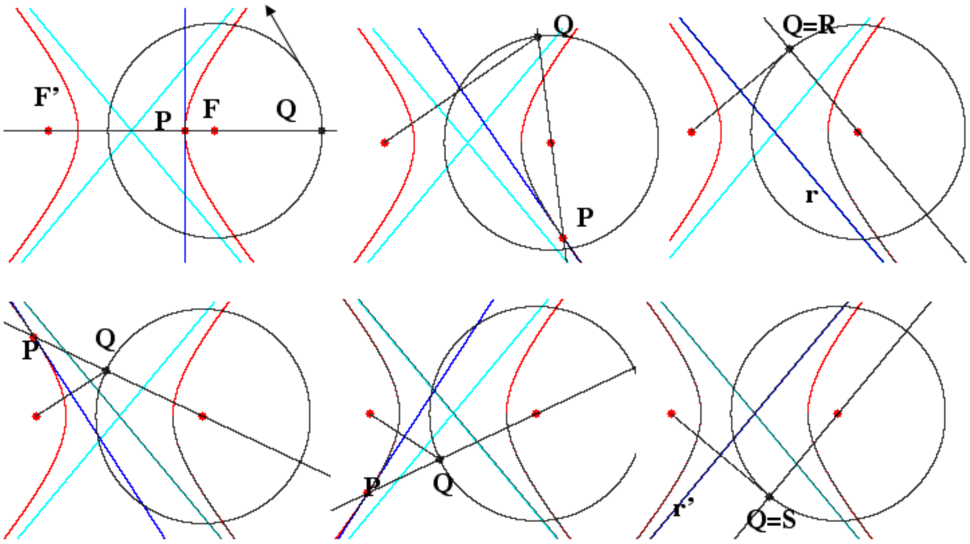

FIGURE 5

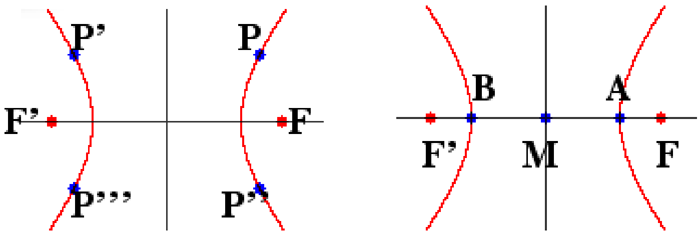

FIGURE 6. a - b

Proposizione 5.1. *Il legame tra fuochi, vertici, assi, asintoti e costante* $2p$ *è stabilito come segue* cfr. Fig. 7a*: la circonferenza di diametro l'asse focale* FF' *taglia*

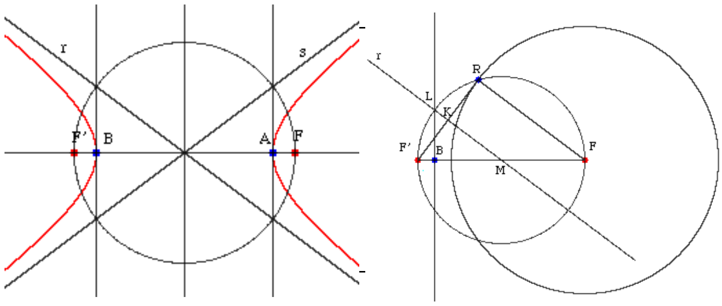

FIGURE 7. a - b

le perpendicolari condotte per i vertici all'asse focale in 4 *punti per i quali passano gli asintoti.*

<u>Dimostrazione</u>. (Tralasciata a lezione e qui esposta per completezza). Dati i fuochi tracciamo (cfr. Fig. 7b) la circonferenza che ha per diametro l'asse focale FF' e,

come nella costruzione 3.1, la circonferenza di centro F e raggio $2p$. Le due circonferenze si tagliano in R. Il triangolo FRF' è inscritto nella prima circonferenza e ha un lato che coincide con il diametro, dunque l'angolo in R è retto. Allora $F'R$ è tangente alla seconda circonferenza e l'asse r del segmento $F'R$ è un asintoto.

Resta solo da vedere che il punto B è un vertice, cioè che sta sull'iperbole. Poiché r è l'asse di $F'R$, esso biseca la corda $F'R$ e quindi passa per il centro della circonferenza, cioè M è il punto medio di FF'. Quindi

$$|FB| = |BM| + |MF| = |BM| + |MF'| = |BM| + |BM| + |BF'|$$

dunque

$$|FB| - |BF'| = 2|MB|.$$

Perciò si tratta di provare che $|MB| = p$.

Ora i triangoli LBM e $F'RF$ sono simili, infatti sono rettangoli e i loro angoli in M ed F rispettivamente sono uguali (perché r è parallela a FR). Le loro ipotenuse sono rispettivamente raggio e diametro della circonferenza, quindi i due triangoli sono in rapporto di $1 : 2$. Il cateto FR è lungo $2p$, quindi il cateto MB è lungo p. $\square$

Esercizio 5.2. *Dati i fuochi F e F' e la costante $2p$ (rappresentata da un segmento), si disegnino gli assi, i vertici, gli asintoni e si tracci approssimativamente l'iperbole.*

Soluzione. Si colloca il segmento di lunghezza $2p$ al centro del segmento FF'. Gli estremi saranno i vertici A e B. Si traccia la circonferenza che ha l'asse focale FF' come diametro. Le perpendicolari condotte per A e B tagliano in 4 punti la circonferenza per cui passano gli asintoti. A questo punto è facile tracciare approssimativamente l'iperbole (cfr. Fig. 8)

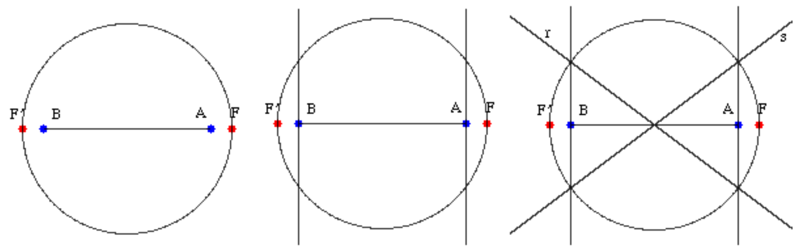

FIGURE 8

Esercizio 5.3. *Siano assegnate due rette incidenti r ed s e due punti A e B posti su una delle due bisettrici dell'angolo $\widehat{rs}$. Disegnare i fuochi dell'iperbole che ha queste rette come asintoti e A, B come vertici.*

Soluzione. Si conducano per A e B le perpendicolari al segmento AB. Esse tagliano sulle rette r ed s quattro punti, per i quali passa una sola circonferenza. Le intersezioni di questa circonferenza con la retta AB sono i fuochi (cfr. Fig. 9).

Esercizio 5.4. *Assegnati i fuochi e gli asintoti si determinino i vertici.*

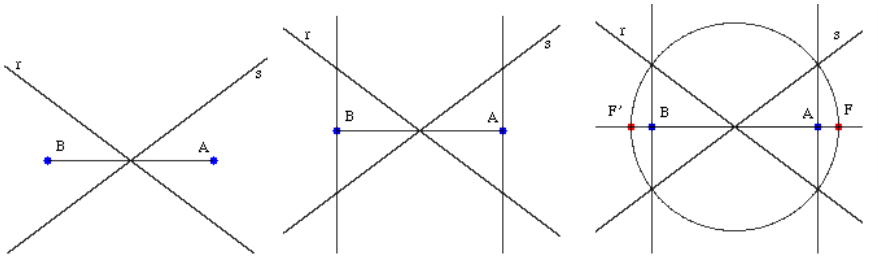

FIGURE 9

6. Rette e iperbole

Come abbiamo già fatto per ellisse e parabola, vogliamo discutere le possibili posizioni di una retta rispetto ad un'iperbole e rivedere, dal punto di vista delle sezioni coniche, gli asintoti.

Consideriamo un'iperbole H, sezione di un cono circolare retto con un piano π. Sia π' un piano, perpendicolare all'asse del cono e che non passa per il vertice, allora esso taglia sul cono una circonferenza C.

La proiezione dal vertice V determina una corrispondenza $\pi \to \pi'$. Come sappiamo ci sono due rette: r su π e r' su π' su cui la proiezione non è definita.

Precisamente la retta r è l'intersezione di π con il piano α', parallelo a π' e passante per il vertice V. I punti di r proiettati da V, restano sul piano α' e quindi non possono raggiungere π'. Il piano α' taglia il cono nel solo vertice e quindi non tocca l'iperbole, dunque anche la retta r non tocca l'iperbole. La retta

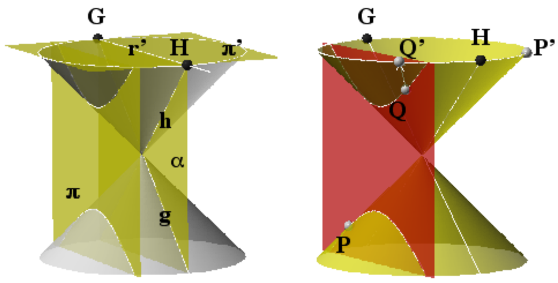

FIGURE 10. a - b Apri il file

r' è l'intersezione del piano π' (della circonferenza) con il piano α, parallelo a π e passante per V. Poiché H è un'iperbole, il piano α taglia sul cono due generatrici g e h, che a loro volta intersecano il piano π' in due punti, rispettivamente, G ed H. Dunque r' è la retta GH ed è secante in questi due punti alla circonferenza C (cfr. Fig. 10a).

In conclusione la proiezione $\pi \to \pi'$ da V stabilisce una corrispondenza biunivoca tra il piano π, privato della retta r, esterna all'iperbole, e il piano π' privato della retta r' secante la circonferenza in G e H.

In particolare ciascun punto P dell'iperbole K è proiettato in un punto P' della circonferenza C. Precisamente la direttrice VP taglia la circonferenza nel punto P'. Quando P si muove nel ramo superiore (superiore con riferimento alla Fig. 10b) dell'iperbole, il punto P' descrive l'arco di circonferenza GH di sinistra. E mentre P' si avvicina a G (oppure ad H), il punto P si allontana verso l'infinito in un verso (o nell'altro). Analogamente se P percorre il ramo inferiore (inferiore sempre con riferimento alla Fig. 10b) il punto P' percorre l'arco di circonferenza GH di destra. Si verifica facilmente che si presenta la situazione già vista in precedenza (cfr. 4.1): quando P' passa attraverso il punto G, il punto P scompare da un ramo dell'iperbole, per comparire nell'altro.

Dunque *i punti dell'iperbole corrispondono biunivocamente ai punti della circonferenza privata dei punti G ed H.*

La proiezione $\pi \to \pi'$ proietta ogni retta $s \neq r$ del piano π in una retta $s' \neq r'$ del piano π'. Precisamente ogni piano β (diverso da α e α') passante per il vertice taglia sui piani π e π' una coppia di rette s su π, s' su π', corrispondenti.

Va da sè che se una retta s taglia l'iperbole in un punto P, la proiezione s' di s taglia la circonferenza nel punto P', proiezione di P. Poiché una retta s' ha al più due punti in comune con la circonferenza, la corrispondente retta s può avere al più due punti in comune con l'iperbole. Dunque possiamo dire che *una retta s è* secante, tangente *oppure* esterna *all'iperbole se ha in comune con l'iperbole, rispettivamente* $2, 1$ *oppure* 0 *punti.* Tuttavia questa definizione non è completamente soddisfacente.

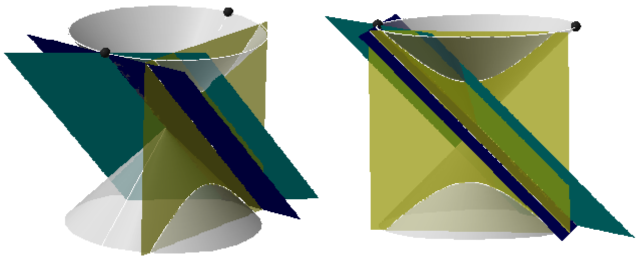

FIGURE 11. a - b Apri il file

Consideriamo il fascio di piani di asse la generatrice g. Questi piani tagliano sul piano π' della circonferenza il fascio di rette di centro G (cfr. fig. 11a). Mentre essi tagliano sul piano π dell'iperbole un fascio di rette parallele. Per convincersi di quest'ultimo fatto conviene immaginare il fascio di piani come le pagine di un libro, la cui costola è la generatrice g. Poiché il piano π è paralello a g, esso taglia su tutte le pagine rette parallele a g e quindi parallele tra loro.

Tra le rette del fascio di centro G sul piano π', c'è la retta $r' = GH$, c'è la retta s'_0 tangente la circonferenza in G, e tutte le altre rette s' del fascio sono secanti. Alla retta r', come detto, non corrisponde nessuna retta sul piano π, mentre alle altre corrispondono rette s_0 e s tutte parallele tra loro. Poiché il punto G non si proietta su π, le rette s hanno un solo punto in comune con l'iperbole e la retta s_0 non ne ha nessuno. Tuttavia come risulta dalla Fig. 11b sarebbe piuttosto strano dire che le rette s sono tangenti all'iperbole.

In effetti dalla figura sembra piuttosto che la retta s_0 che corrisponde alla tangente s'_0 alla circonferenza sia un asintoto. Vediamo come stanno le cose. Preso un punto P sull'iperbole la corda $P'G$ è una retta del fascio di centro G e la corrispondente retta s sul piano π passa per P. Mentre P si muove sull'iperbole, la retta s lo segue mantenendosi paralella (perché, come detto corrisponde ad una retta del fascio di centro G). Quando P' si avvicina a G, il punto P si allontana verso l'infinito e la retta $P'G$ si avvicina alla tangente s'_0; dunque la corrispondente retta

s si avvicina alla retta s_0. Pertanto quando il punto P si allontana lungo un ramo dell'iperbole la retta s tende alla retta s_0 che dunque è un asintoto.

In conclusione gli asintoti si ottengono come proiezione delle rette tangenti alla circonferenza nei punti G ed H, quindi abbiamo motivo per dire che *gli asintoti sono tangenti all'iperbole all'infinito.* Mentre le rette parallele agli asintoti, toccano sì l'iperbole in un punto, ma in un certo senso la toccano anche all'infinito (perché corrsipondono a rette di π' che passano per G) dunque diciamo che *le rette parallele agli asintoti sono secanti l'iperbole.* In Fig. 12 vediamo l'iperbole, gli asintoti e due

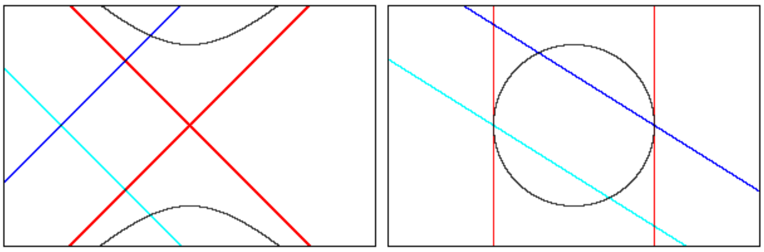

FIGURE 12

parallele agli asintoti, la circonferenza e le rette corrispondenti (per semplicità si è considerato il caso in cui il piano π è parallelo all'asse del cono e quindi i punti G e H sono diametralmente opposti).

7. Retta tangente alliperbole

Analogamente a quanto accade per l'ellisse e parabola:

Teorema 7.1. *La retta tangente ad un'iperbole in un suo punto biseca l'angolo formato dalle rette che congiungono il punto ai fuochi* (cfr. Fig. 13a).

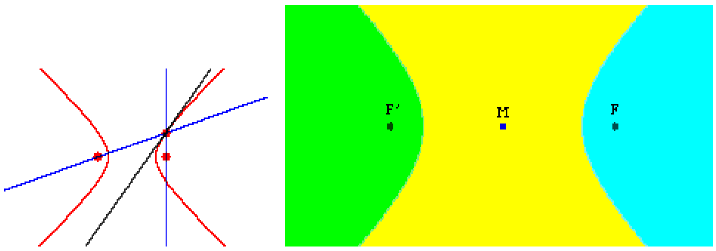

FIGURE 13. a - b

Dimostrazione. Si tratta di vedere che, preso un punto P dell'iperbole, la bisettrice t dell'angolo formato dalle rette che congiungono P ai fuochi, è tangente all'iperbole. Cio tutti i suoi punti, tranne P stanno nella regione centrale di Fig. 13b.

Caratterizziamo la regione centrale. La differenza delle distanze di un punto Q dai fuochi dipende continuamente da Q (in altre parole la funzione $\big||FQ| - |F'Q|\big|$ una funzione continua di Q). Essa assume il valore $2p$ solo nei punti dell'iperbole, quindi in ciascuna delle tre regioni del piano da essa determinate essa assume sempre valori minori o sempre maggiori di $2p$. Precisamente valori maggiori di $2p$ nelle due regioni “interne” e minori di $2p$ nella regione “estern” o centrale. Per verificarlo sufficiente osservare che nei fuochi la differenza delle distanze ovviamente $|FF'| > 2p$, mentre nel punto medio M essa $0 < 2p$. (Si noti anche che si parla di regione esterna e regioni interne, con riferimento al fatto che, rispetto al cono di cui l’iperbole è sezione, la zona compresa tra i due rami è sterna al cono).

Quindi la regione esterna caratterizzata dal fatto che per tutti i suoi punti la differenza delle distanze dai fuochi maggiore di $2p$.

Consideriamo ora le rette che congiungono un punto P dell’iperbole ai fuochi e la loro bisettrice (Fig. 14); le rette FP e $F'P$ sono simmetriche rispetto alla bisettrice e quindi il punto F'', simmetrico di F rispetto alla bisettrice è allineato a P e F'.

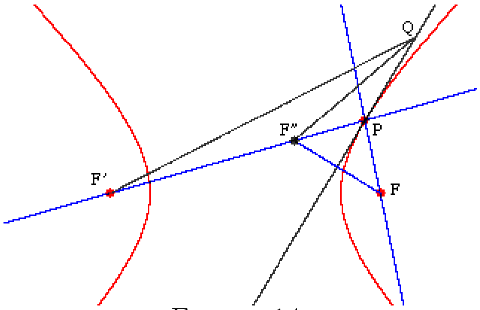

Figure 14

Per un qualunque punto Q della bisettrice, vale

$$|QF| = |QF''|.$$

In particolare $|PF| = |PF''|$ e quindi la differenza $2p$ delle distanze di P dai fuochi $|F'F''|$.

Infine se Q sta sulla bisettrice e $Q \neq P$, allora le distanze di Q dai fuochi sono $|F'Q|$ e $|F''Q|$. La loro differenza, si consideri il triangolo $QF'F''$, maggiore di $|F'F''| = 2p$. Ne segue che Q sta nella regione centrale. □

Esercizio 7.2. *Dati i punti F, F' e P distinti, si disegni approssimativamente l’iperbole che passa per P e ha fuochi in F e F' e la sua tangente in P.*

Soluzione. La seconda parte dell’esercizio è facile: basta tracciare le rette PF e PF' e poi osservare che, delle due bisettrici dell’angolo da esse formato, la tangente cercata è quella che taglia il segmento FF'. Per la prima parte invece si tracci la circonferenza di centro P passante per F. Riportando il raggio sul segmento PF' si ottiene la lunghezza $2p = \big||PF| - |PF'|\big|$. Poi si prosegue come nell’Esercizio 5.2.

Esercizio 7.3. *Spiegare perché la curva in Fig. 15 è un’iperbole.*

Soluzione. Una circonferenza è fissa e ha centro un certo punto F e raggio R, l’altra è di raggio variabile e il suo centro P percorre la curva. La seconda circonferenza passa sempre per un certo punto fisso F' ed è tangente alla prima.

Se le due circonferenze sono esterne una all’altra, allora la somma dei raggi $|PF'| + R$ è pari alla distanza $|PF|$ dei centri. Se le circonferenze sono una dentro l’altra, allora la distanza $|PF|$ dei centri è la differnza $|PF'| - R$ dei raggi.

Comunque

$$\big||PF| - |PF'|\big| = R.$$

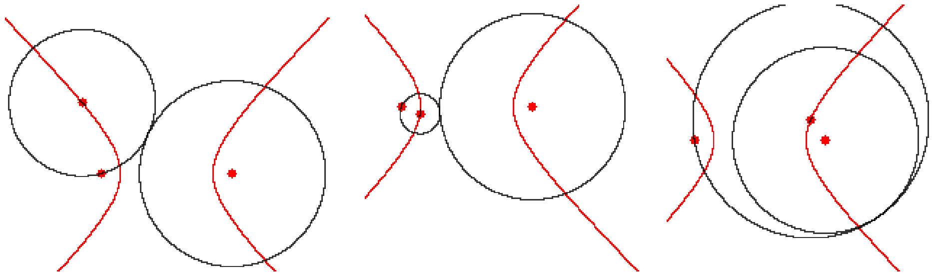

FIGURE 15. Apri il file

8. Equazione cartesiana dell'iperbole

Data un'iperbole H si prenda l'asse focale come asse delle ascisse e il suo asse come asse delle ordinate. Allora l'iperbole avrà equazione

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1$$

i fuochi saranno i punti $(\pm\sqrt{p^2+q^2}, 0)$ e gli asintoti hanno equazione $\frac{x}{p} \pm \frac{y}{q} = 0$.