Esame di GEOMETRIA A - prof. L. Alessandrini, prof. L. Biliotti - 15.06.2009

Cognome e nome | |

Matricola e Corso di Laurea | |

Scrivere la risposta negli spazi, senza giustificarla.

1. Sia $P = (1, 1, 1)$ e siano r ed r' le rette di equazioni

$$r : \begin{cases} -2x - z & = & 6 \\ x + y + z & = & 0 \end{cases} , \quad r' : \begin{cases} x & = & 3 + 2t \\ y & = & 2 + 2t \\ z & = & -1 - t \end{cases}$$

Le due rette sono SGHEMBE. Un piano passante per P ortogonale a r è $x + y - 2z = 0$. Una retta s passante per P e ortogonale a r' (in equazione parametrica) è es. $x = t + 1, y = 1, z = 1 + 2t$.

2. Sia $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x, y) = (4x + 2y, 2x + 2y)$. $L^{-1}(1, 0) = (1/2, -1/2)$. Gli autovalori di L $3 \pm \sqrt{5}$. La matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $\mathcal{B} = (-e_1 - e_2, e_1 + 2e_2)$ è $M(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Siano $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 3)$. $\mathrm{rg}(v_1, v_2, v_3)$ è 2. Completare a base di $\mathbb{R}^3$ i vettori v_1 e v_2 es. $(1, 0, 0)$. $\mathrm{pr}_{v_1}(v_2) = (2/5, 0, 4/5)$

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(F) L'applicazione $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $L(x, y, z) = (x + y^2, x, z)$ è lineare.

(F) Ogni matrice simmetrica è invertibile.

(V) Un sistema omogeneo di 6 equazioni in 10 incognite ammette sempre soluzioni e queste dipendono da almeno 4 parametri.

(V) Sia A una matrice ortogonale. Allora $|\det(A)| = 1$

(V) Se 4 vettori di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti, allora essi generano $\mathbb{R}^4$.

(V) Un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è suriettiva se e solo se $\det M_L \neq 0$.

(V) Sia $\mathcal{B} = \big((1, 2), (0, -1)\big)$ una base di $\mathbb{R}^2$. Allora $[(2, 2)]_{\mathcal{B}} = (2, 2)$.

(F) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ è un cono.

Risolvere per esteso sul retro di questo foglio.

1.
a) Scrivere la definizione di prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$
b) Sia $v = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ e sia $S = \{v\}^\perp$. Dimostrare che se $w_1, w_2 \in S$, allora anche $2w_1 + 5w_2 \in S$.

2. a) Scrivere la definizione di matrice simmetrica.
b) Sia C una matrice 3×3. Dimostrare che se $C^{\mathrm{T}} C = 0$, allora $C = 0$.