Esame di GEOMETRIA A - prof. L. Alessandrini, prof. L. Biliotti - 16.07.2009

Scrivere la risposta negli spazi, senza giustificarla.

1. Sia r la retta di equazione parametrica $(1,1,0)+t(2,-1,-1)$ e α il piano passante per l'origine ortogonale all'asse delle x. Il piano α e la retta r sono (mutua posizione) $INCIDENTI$. Un piano passante per $(1,0,0)$ e ortogonale a r $2X-Y-Z=2$. Una equazione parametrica per il piano α è $x=0, y=t, z=s$.

2. Sia $L:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L(x,y,z)=(x-z, 2y+3z, x-z)$. Gli autovalori di L sono $0,2$. L è suriettiva? NO. $\mathrm{Ker}(L-2\mathrm{Id})=\{(0,y,0)/\ y\in\mathbb{R}\}$

3. Sia $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. $\mathrm{rg}(A)=2$. $\mathrm{Tr}(A^2)=13$
$\mathrm{Sol}(A|(1,1,2)^{\mathrm{T}})=\{(1-z,-1+2z,z)\ z\in\mathbb{R}\}$

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(F) $x^2-5z^2=y$ è l'equazione di un parabaoloide ellittico.

(F) Se $A,B\in M_{n\times n}$, allora $\big(\det(AB)\big)^2=\big(\det(A)\big)^2\det(B)$.

(V) L'area del parallelogramma di vertici O, v, w e $v+w$, con $v=(1,0,-4)$ e $w=(-1,0,-1)$ è maggiore di tre.

(F) Un sistema omogeneo di 7 equazioni in 8 incognite ammette sempre soluzioni e queste dipendono da almeno 2 parametri.

(V) Se A,B sono matrici simmetriche, allora anche $2A-5B^{\mathrm{T}}$ è simmetrica.

(V) Se $L:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ è una applicazione iniettiva, allora $n=1$.

(F) Due rette parallele non possono giacere sullo stesso piano.

(V) $\mathcal{L}((1,1,1),(2,0,1),(1,8,-9))=\mathbb{R}^3$.

Risolvere per esteso sul retro di questo foglio.

1. a) Scrivere la definizione di matrice ortogonale.
b) Dimostrare che se A è una matrice ortogonale, allora $|\det(A)|=1$.
SOLUZIONE. a) definizione 6.6 del libro.
b) Se $A^TA=I$, si ha dal teorema di Binet $1=detI=det(A^TA)=det(A^T)det(A)=(detA)^2$, da cui segue $|\det(A)|=1$.

2. Sia $L:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare.
a) Scrivere la definizione di immagine di L.
b) Dimostrare che se $L(v_1),\dots,L(v_k)\in\mathbb{R}^m$ sono lineramente indipendenti, allora anche $v_1,\dots,v_k$ lo sono.
SOLUZIONE. a) vedi per esempio Proposizione 11.5 del libro.
b) vedi problema 10 a) del libro.